



**UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA**  
**LICENCIATURA EN MATEMATICA**

**Trabajo: Análisis de la Ecuación de Onda  
en los Instrumentos de Cuerda**

**Autor: Marcelo Raúl Monferrato**

**Directora: Dra. Samira Abdel Masih**

**Título: Licenciado en Matemática**

**Fecha: Junio 2009**

## **RESUMEN:**

De las muchas y muy variadas relaciones existentes entre música y matemática se ha escogido, para el presente trabajo, el análisis de la ecuación de onda en el caso particular de los instrumentos de cuerda.

La elección de este tema se efectúa, principalmente, porque su contenido permite un acercamiento sumamente práctico a todos los conocimientos matemáticos que aquí se exponen, con ejemplos de simple ilustración y fácilmente interpretables, y que a la vez nos permiten un enfoque alternativo a los instrumentos musicales. Por otro lado, quien se encuentre más familiarizado con los conceptos asociados al sonido, podrá interiorizarse en los mecanismos que permiten analizar esos conceptos.

El trabajo ha sido dividido en siete capítulos específicos y un anexo en el que se realiza una exposición práctica de todo lo descrito en los capítulos anteriores.

Se comienza con la explicación de los principales conceptos relacionados con las ondas y el sonido y que tendrán relevancia a lo largo de este trabajo, estableciendo un lenguaje conveniente para el correcto seguimiento del subsiguiente análisis. Luego se establece una aproximación a las características generales de los instrumentos musicales y las particularidades de un grupo en especial, el conformado por los instrumentos de cuerda

Más adelante comienzan a aparecer algunas relaciones entre los términos vistos en los capítulos anteriores y los conceptos matemáticos a aplicar. Se realiza una introducción a las Series de Fourier y se practica el análisis y las condiciones para su convergencia. Con las herramientas y conceptos mencionados se realiza un abordaje más completo a los diversos métodos que se necesitan para completar el análisis y presentar la ecuación de onda de una cuerda vibrante.

Por último, ya en el anexo, se trabajará con software de edición musical y de análisis de espectros de sonido, para interpretar de manera gráfica y auditiva el alcance de los conceptos y teoremas aquí demostrados, muchos de los cuales, si bien son enunciados en numerosos textos, no son demostrados en ninguno de ellos.

# Índice

## **CAPÍTULO I: ONDAS**

|                              |    |
|------------------------------|----|
| El movimiento ondulatorio    | 7  |
| Clasificación de las Ondas   | 7  |
| Características de las Ondas | 10 |

## **CAPÍTULO II: SONIDO**

|                       |    |
|-----------------------|----|
| El Sonido             | 12 |
| Naturaleza del Sonido | 16 |
| El Oído Humano        | 18 |

## **CAPÍTULO III: INSTRUMENTOS MUSICALES e INSTRUMENTOS MUSICALES DE CUERDA**

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Los Instrumentos Musicales                              | 22 |
| Características Generales de los Instrumentos Musicales | 23 |
| Clasificación de los Instrumentos Musicales             | 26 |
| Los Instrumentos de Cuerda                              | 27 |

## **CAPÍTULO IV FUNCIONES PERIÓDICAS**

|                      |    |
|----------------------|----|
| Funciones Periódicas | 30 |
| Período Fundamental  | 31 |
| Ciclo                | 36 |
| Frecuencia           | 36 |

## **CAPÍTULO V SERIES DE FOURIER**

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Series de Fourier                                                                            | 39 |
| Convergencia de las Series de Fourier                                                        | 43 |
| Función continua por tramos                                                                  | 43 |
| Derivada derecha / Derivada izquierda                                                        | 44 |
| Función derivable por tramos                                                                 | 45 |
| El núcleo de Dirichlet                                                                       | 56 |
| Convergencia uniforme de la serie de Fourier                                                 | 68 |
| El fenómeno de Gibbs                                                                         | 70 |
| Series de Fourier para funciones no periódicas                                               | 73 |
| Teorema de Fourier para funciones no periódicas                                              | 75 |
| Integración y diferenciación de Series de Fourier                                            | 77 |
| Teorema: Diferenciación término a término de series de Fourier                               | 80 |
| Teorema: Diferenciación término a término de series de Fourier para funciones no periódicas. | 84 |
| Teorema: Integración término a término de series de Fourier para funciones no periódicas.    | 85 |
| Teorema: Integración término a término de series de Fourier                                  | 87 |
| Series de Fourier de funciones periódicas pares o impares                                    | 88 |
| Teorema: Series de Fourier de funciones pares o impares.                                     | 89 |
| Series de Fourier en senos y cosenos                                                         | 90 |
| Teorema: Convergencia de la serie de Fourier en cosenos.                                     | 92 |

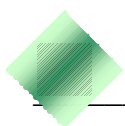
|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Teorema: Convergencia de la serie de Fourier en senos.                                                   | 93  |
| <b>CAPÍTULO VI ECUACION DE LA CUERDA VIBRANTE</b>                                                        |     |
| Solución de una ecuación Diferencial Ordinaria Lineal, de Orden 2, Homogénea y a coeficientes constantes | 104 |
| Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales                                                          | 104 |
| Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales                                                   | 105 |
| Método de Separación de Variables                                                                        | 106 |
| Principio de Superposición de Soluciones                                                                 | 108 |
| Ecuación de la Cuerda Vibrante (o Ecuación de Onda)                                                      | 109 |
| Solución de la Ecuación de Onda                                                                          | 113 |
| Solución de la Ecuación de Onda según D' Alembert                                                        | 126 |
| <b>CAPÍTULO VII LA ECUACION DE ONDA EN LOS INSTRUMENTOS DE CUERDA</b>                                    |     |
| Introducción                                                                                             | 142 |
| La ecuación de onda en los instrumentos de cuerda                                                        | 143 |
| <b>ANEXO APLICACIONES DEL ANÁLISIS DE FOURIER EN ECUACIONES DE ONDAS</b>                                 |     |
| Introducción                                                                                             | 147 |
| Análisis de Fourier del Punteo de una Guitarra                                                           | 148 |

## Análisis de la Ecuación de Onda en los Instrumentos de Cuerda



# CAPÍTULO I

## ONDAS



## 1.1 El movimiento ondulatorio

El movimiento ondulatorio es el proceso por el cual se propaga energía de un lugar a otro sin transferencia de materia. Este proceso se realiza mediante ondas.

Desde el punto de vista físico, una onda es una perturbación que se propaga desde el punto en que se produjo hacia el medio que rodea ese punto. Este medio puede ser de naturaleza diversa: sólido, líquido o gaseoso. Ejemplos de medios pueden ser el aire, el agua, un trozo de metal o inclusive el vacío, aunque veremos que no todas las ondas son capaces de propagarse en él.

También son variadas las propiedades que sufren la perturbación: densidad, presión, campo eléctrico o campo magnético son sólo algunos ejemplos de ellas.

## 1.2 Clasificación de las Ondas

Las ondas pueden clasificarse de acuerdo a diversos criterios:

### 1.2.1 Clasificación en función del medio en el que se propagan

- **Ondas mecánicas:** son aquéllas que necesitan de un medio elástico para propagarse. Si se produce una vibración en un punto de un medio elástico, ésta se transmite a todos los puntos de éste. Cuando el movimiento es uniforme, se llama vibración armónica. Las partículas del medio oscilan alrededor de un punto fijo, por lo que no existe transporte neto de materia a través del medio. Dentro de las ondas mecánicas consideramos las ondas elásticas, las ondas sonoras y las ondas de gravedad (analizadas en dinámica de los fluidos, no confundir con las ondas gravitacionales).
- **Ondas electromagnéticas:** tienen la característica de propagarse por el espacio sin necesidad de un medio pudiendo, por tanto, propagarse en el vacío. Esto es debido a que las ondas electromagnéticas son producidas por las oscilaciones de un campo eléctrico en relación con un campo magnético asociado.
- **Ondas gravitacionales:** las ondas gravitacionales son perturbaciones que alteran la geometría misma del espacio-tiempo y aunque es común representarlas viajando en el vacío, técnicamente no podemos afirmar que se desplacen por ningún espacio sino que en sí mismas son alteraciones del espacio-tiempo. Aunque la radiación gravitacional no ha sido aún detectada directamente, hay evidencia indirecta significativa de su existencia.

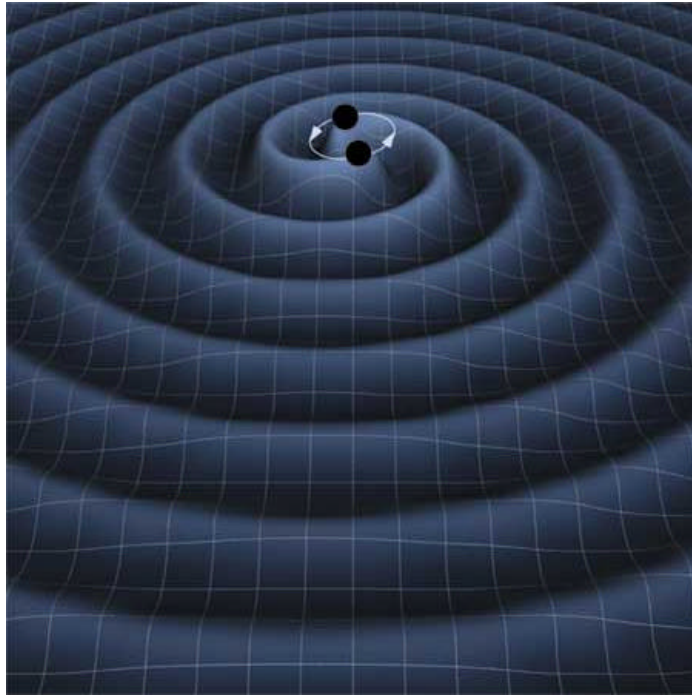
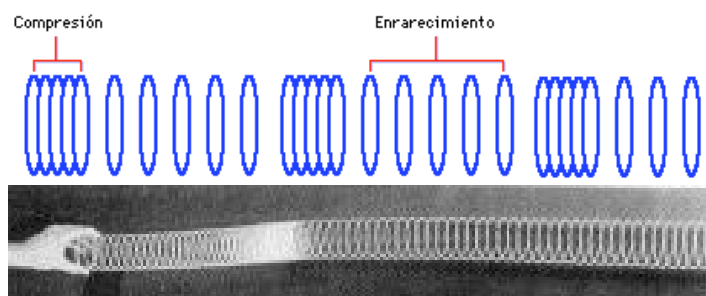


Figura 1.1: Onda gravitacional creada por un sistema binario.  
Crédito: K. Thorne (Caltech), T. Carnahan (NASA GSFC)

### 1.2.2 Clasificación en función de la dirección de la propagación

- **Ondas longitudinales:** la vibración de la onda es paralela a la dirección de propagación de la propia onda, es decir que el movimiento de las partículas que transportan la onda es paralelo a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, un resorte que se comprime da lugar a una onda longitudinal.
- **Ondas transversales:** la vibración es perpendicular a la dirección de la onda, es decir que las partículas se mueven perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, las ondas sobre la superficie del agua.

Cabe señalar que las ondas longitudinales se propagan en medios con resistencia a la compresión (gases, líquidos y sólidos) y las transversales necesitan medios con resistencia a la flexión, como la superficie de un líquido, y en general medios rígidos. **Los gases y los líquidos no transmiten las ondas transversales.**





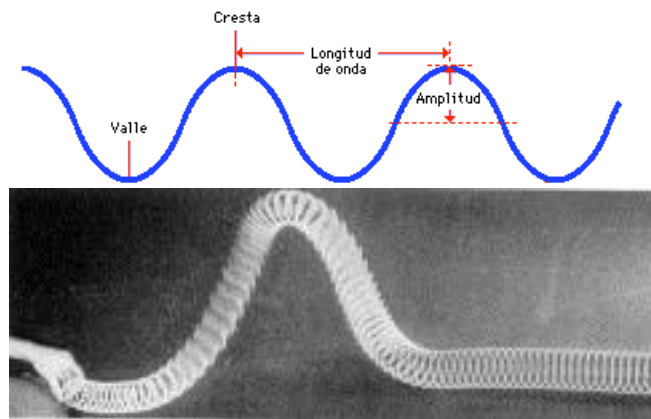


Figura 1.2: Onda Longitudinal y Onda Transversal, ambas generadas con un resorte.

### 1.2.3 Clasificación en función de su propagación

- **Ondas unidimensionales:** se propagan a lo largo de una sola dirección del espacio, como en el caso de una cuerda. Si la onda se propaga en una dirección única, sus frentes de onda son planos y paralelos.
- **Ondas bidimensionales o superficiales:** se propagan en dos direcciones, como por ejemplo las ondas que se producen en la superficie de un lago cuando se deja caer una piedra sobre él.
- **Ondas tridimensionales o esféricas:** se propagan en tres direcciones. Sus frentes de ondas son esferas concéntricas que salen de la fuente de perturbación expandiéndose en todas direcciones. El sonido es una onda tridimensional, como también lo son las ondas electromagnéticas.

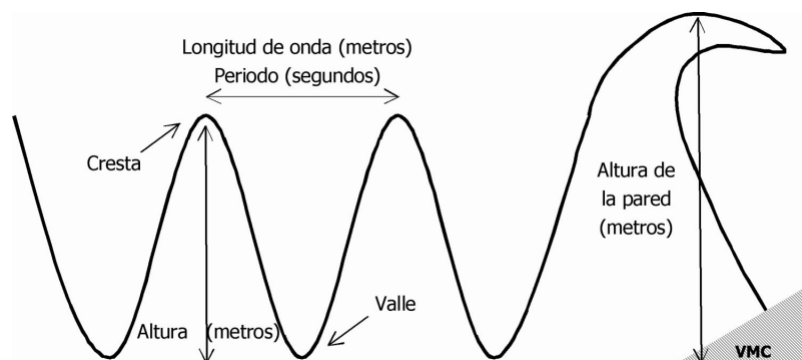


Figura 1.3: Una ola explicada como Onda.

### 1.2.4 Clasificación en función de su periodicidad

- **Ondas periódicas:** la perturbación local que las origina se produce en ciclos repetitivos, por ejemplo una onda sinusoidal.

- **Ondas no periódicas:** la perturbación que las origina se da aisladamente o, en el caso de que se repita, las perturbaciones sucesivas tienen características diferentes. Las ondas aisladas se denominan también pulsos.

## 1.2 Características de las Ondas

Cuando una partícula se mueve desde un punto extremo hasta el otro y vuelve (pasando dos veces por la posición de equilibrio), decimos que ha hecho una **oscilación o vibración completa**.

Si no aplicamos ninguna fuerza exterior, la amplitud de este movimiento va decreciendo progresivamente, pero a veces es posible compensar esta pérdida de amplitud con impulsos de forma que cada vibración sea idéntica a la precedente. En este caso decimos que el movimiento es periódico y se llama período ( $p$ ), al tiempo que tarda en tener lugar una vibración completa. Se llama frecuencia ( $f$ ) al número de oscilaciones por unidad de tiempo, tal como vimos en el capítulo anterior.

La frecuencia, juntamente con la velocidad de propagación del sonido ( $v$ ) está relacionada con la longitud de onda ( $\lambda$ ).

### **Definición 1.1: Longitud de Onda**

La Longitud de Onda ( $\lambda$ ) es el espacio que recorre una onda del inicio al final de una oscilación completa. La longitud de onda se mide en metros y se obtiene a partir de la fórmula:

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}.$$

Cuando hablamos de una vibración armónica, longitud de onda = velocidad de transmisión · período, es decir:

La ecuación que relaciona  $v$ ,  $\lambda$ , y  $f$  es:  $v = \lambda \cdot f$

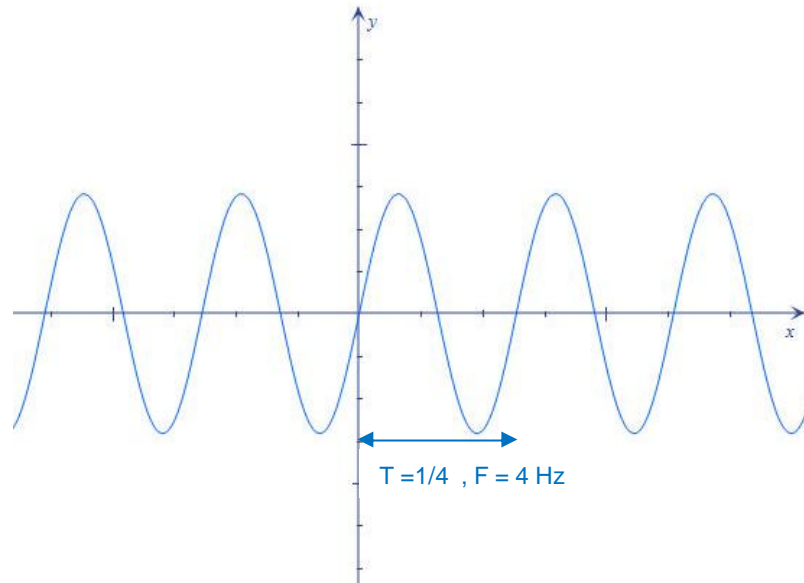
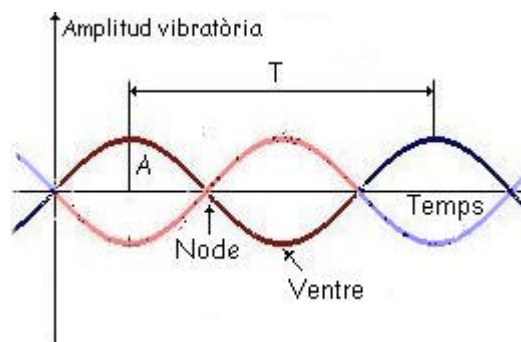


Figura 1.4: La imagen corresponde a una onda de  $f = 4\text{Hz}$ . La función que corresponde a esta gráfica es  $g(t) = \sin(2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot t)$ , y su período  $T$  es igual a  $1/f = 1/4$ .

Cuando ha transcurrido un tiempo  $T$ , los puntos situados a distancia  $l$  del punto inicial comienzan a iniciar el movimiento vibratorio, eso también pasa con el punto perturbador, que había vuelto a su posición de equilibrio. Decimos que estos dos puntos están en *concordancia de fase*.

Cuando el medio de propagación está limitado (una cuerda atada a los extremos, la columna de aire dentro de un tubo), la onda, cuando llega a este límite, se refleja. Esta reflexión se combina con la perturbación inicial dando lugar a lo que se llama onda estacionaria. Estas ondas están caracterizadas por la aparición de puntos en reposo (nodos) y puntos con amplitud vibratoria máxima (vientre). En las cuerdas vibrantes y en los tubos sonoros, se producen fenómenos de esta clase.



## CAPÍTULO II

### SONIDO

## 2.1 El Sonido

Para una primera aproximación, bastaría con definir al sonido como el estímulo producido en el oído por la vibración de partículas que se desplazan por el aire en forma de ondas sonoras.

Esta definición, si bien es práctica, puede llevarnos a creer que el sonido sólo se propaga en el aire y que el oído es capaz de percibir todos los sonidos existentes.

A continuación veremos que ninguna de las dos aseveraciones es completamente correcta y que es más adecuado referirse al sonido como ***la vibración producida por un grupo de partículas que se desplaza a través de un medio elástico, sea éste de naturaleza sólida, líquida o gaseosa.***

Ciertamente el sonido se propaga a través de cualquier medio elástico y no sólo por el aire, aunque cabe aclarar que no es posible la propagación del sonido en el vacío. Este es un desliz muy frecuente en las películas de ciencia ficción, que agregan a su banda sonora las explosiones y los motores de las naves en el espacio, aunque debemos convenir que sería muy aburrido – aunque adecuado en términos de la Física – verlo de otra manera.

Además, casi todos hemos experimentado la sensación de escuchar sonidos bajo el agua, o apoyando el oído en una mesa o una pared. Y casi todos estamos habituados a la imagen, también cinematográfica, de una persona apoyando el oído sobre los rieles del ferrocarril para oír un tren que se aproxima, y que aún no se escucha por el aire. Esto se corresponde con el hecho de que el sonido se propaga con mayor velocidad a través de un sólido, además de hacerlo en forma más directa y prácticamente sin los atenuantes y el ruido que interfieren en la propagación del mismo por el aire.

Características propias del medio de transmisión, como por ejemplo la temperatura y la densidad (que en el caso de los gases se compensa casi en todos los casos con la presión) hacen que varíe la velocidad con que se desplaza el sonido. Otros factores, como la humedad, influyen en menor medida.

Para calcular la velocidad del sonido existen muchas y muy variadas fórmulas, específicas para el caso de los gases, los líquidos y los sólidos. Por ejemplo se cuenta con fórmulas específicas para el agua, como la desarrollada por Chávez, Sosa y Tsumura, o la de Weissler y Del Grosso para agua con sales. Incluso se han establecido de manera empírica determinadas fórmulas para el caso del agua del océano, en las que se toman datos como la salinidad, la temperatura del agua y la profundidad con respecto a la superficie del mar para encontrar la velocidad deseada.

Para el aire en particular se puede utilizar la siguiente fórmula, donde  $J$  es la temperatura del aire en grados Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) y la velocidad queda expresada en metros por segundo (m/s)

$$v_{\text{aire}} = 331.3 \sqrt{1 + \frac{J}{273.15}}$$

Así, si quisiéramos obtener la velocidad del sonido en el aire a una temperatura de 20°C el valor obtenido sería:

$$v_{\text{aire}} = 331.3 \sqrt{1 + \frac{20}{273.15}} = 343.21 \text{ m/s}$$

En la fórmula precedente, se utiliza el valor 331.3 m/s como la velocidad del aire en condiciones normales a una temperatura de 0°C. Los casi 12 m/s de diferencia en la velocidad – unos 43 km/h – no son nada despreciables si se considera que la temperatura sólo se ha elevado unos veinte grados.

A continuación se muestran algunos ejemplos de la velocidad del sonido a través de diversos medios. Nótese que ésta se incrementa significativamente en los sólidos con respecto a los gases y los líquidos, y dentro de este grupo a medida que los materiales son más rígidos.

También es interesante señalar la baja velocidad de la goma con respecto a otros sólidos, lo cual evidencia el efecto amortiguador del sonido de dicho material.

La mayor velocidad del sonido registrada para sólidos en condiciones normales es la correspondiente al berilio, y alcanza unos 12.870 m/s

| Material         | Estado  | v (m/s) |
|------------------|---------|---------|
| Aire (0°C)       | Gaseoso | 331     |
| Aire (20°C)      | Gaseoso | 343     |
| Helio (0°C)      | Gaseoso | 971     |
| Hidrógeno (0°C)  | Gaseoso | 1286    |
| Alcohol metílico | Líquido | 1143    |
| Kerosene         | Líquido | 1325    |
| Agua             | Líquido | 1493    |
| Agua de mar      | Líquido | 1534    |
| Mercurio         | Líquido | 1450    |
| Goma             | Sólido  | 1599    |
| Oro              | Sólido  | 3240    |
| Cobre            | Sólido  | 3560    |
| Aluminio         | Sólido  | 5100    |
| Acero            | Sólido  | 5130    |
| Vidrio templado  | Sólido  | 5640    |
| Diamante         | Sólido  | 12000   |

Tabla 2.1 Velocidad del sonido en diversos medios<sup>1</sup>

Ahora, con respecto al rango de sonidos que percibe el oído humano, podemos agregar que existen sonidos por debajo y por encima de sus límites, y que se denominan infrasonidos y ultrasonidos, respectivamente.

Estos sonidos son demasiado graves o demasiado agudos y el hombre no es capaz de percibirlos, aunque sí algunos animales. Una muestra de esto son los silbatos de ultrasonido utilizados para llamar a los perros, o los dispositivos electrónicos que repelen plagas. Muchos son los animales capaces de generar sonidos fuera del rango de audición humana: elefantes, hipopótamos, palomas, lobos y numerosos insectos y reptiles son capaces de producir y percibir sonidos inaudibles para el hombre.

Pero los animales no son la única fuente de infrasonidos y ultrasonidos. Tornados, terremotos, erupciones volcánicas, olas del mar, meteoritos y auroras boreales son fuente de sonidos no audibles.

Incluso entre los seres humanos, no todos percibimos el mismo rango de sonidos, y además el mismo va cambiando a lo largo de nuestra vida, puesto que con el correr de los años nos costará más reconocer ciertas frecuencias agudas. Actualmente se encuentran en internet sonidos de timbres para teléfonos celulares que son perfectamente audibles para un adolescente pero no así para sus padres.

La característica del sonido que nos permite definir el rango de audición es la frecuencia, que será analizada en profundidad más adelante, junto con otras características de las ondas sonoras. La frecuencia se mide en hertzios (Hz.), y para el caso de un oído humano sano y joven el rango de audición se encuentra entre los 20 Hz y los 20000 Hz aproximadamente. En la siguiente tabla se muestran las frecuencias mínima y máxima detectadas por algunas especies.

| Espece            | Mín (Hz) | Máx (Hz) |
|-------------------|----------|----------|
| <b>Tortuga</b>    | 20       | 1.000    |
| <b>Goldfish</b>   | 100      | 2.000    |
| <b>Rana</b>       | 100      | 3.000    |
| <b>Cocodrilo</b>  | 50       | 4.000    |
| <b>Chimpancé</b>  | 100      | 20.000   |
| <b>Grillo</b>     | 400      | 28.000   |
| <b>Perro</b>      | 50       | 46.000   |
| <b>Gato</b>       | 30       | 50.000   |
| <b>Rata</b>       | 1.000    | 60.000   |
| <b>Ratón</b>      | 1.000    | 100.000  |
| <b>Murciélago</b> | 3.000    | 120.000  |
| <b>Delfín</b>     | 1.000    | 130.000  |

*Tabla 2.2 Rango de Audición<sup>ii</sup>*

De todas maneras, es evidente que, a igual intensidad de sonido, la audición no será la misma para dos frecuencias distintas. El rango de audición está relacionado con la intensidad sonora mediante funciones de audibilidad (threshold), que describen el umbral absoluto de audibilidad en función de la frecuencia. La siguiente fórmula nos brinda una buena aproximación del umbral:

$$Thr(f) = 3.64 \left( \frac{f}{1000} \right)^{-0.8} - 0.5 e^{-0.6 \left( \frac{f}{1000} - 3.3 \right)^2} + 10^{-3} \left( \frac{f}{1000} \right)^4$$

La gráfica de esta función, que se muestra en la figura 2.3, se puede obtener ejecutando los siguientes comandos del software Mathematica:

$$Thr[f\_ ] = 3.64 \left( \frac{f}{1000} \right)^{-0.8} - 0.5 e^{-0.6 \left( \frac{f}{1000} - 3.3 \right)^2} + 10^{-3} \left( \frac{f}{1000} \right)^4;$$

$$Plot[ Thr[ f ], { f ,0, 10^5 } , PlotRange -> { 0,100 } ] ;$$

### Umbral absoluto de audibilidad

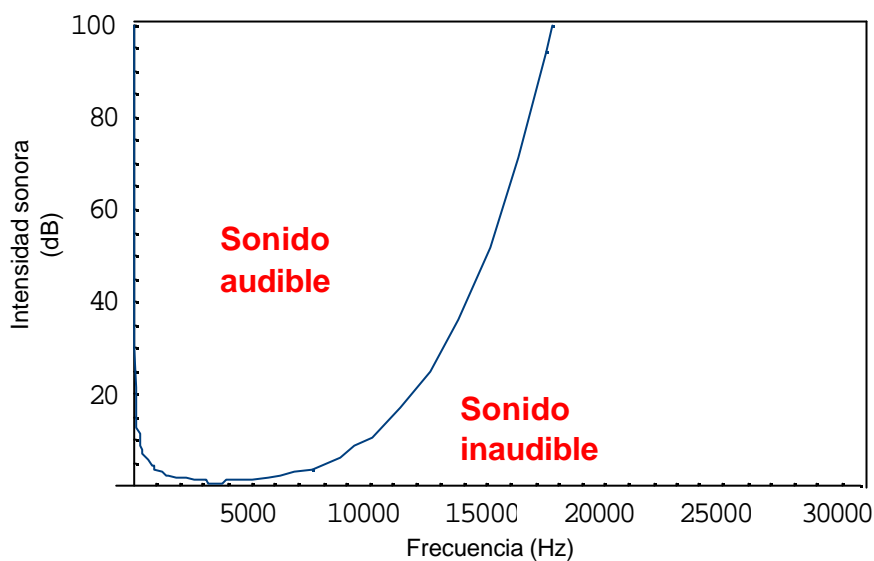


Figura 2.3 Gráfica de la función de audibilidad.

A continuación veremos qué es lo que ocurre cuando estas partículas se desplazan y cómo hace el oído para apreciarlas y distinguirlas.

## 2.2 Naturaleza del Sonido

El sonido se origina en un cuerpo vibrante, como puede ser una varilla, una cuerda tensa, una membrana o cualquier material que se golpea o perturba.

Este cuerpo se denomina **foco** o **fuelle** del sonido, y al vibrar transmite esa agitación al medio que lo rodea, que por su elasticidad, es capaz de propagar la vibración a través de sí. Esto ocurre porque las partículas, al desplazarse a través del medio, producen diversas tensiones y variaciones de la densidad o presión del mismo.



Físicamente, el fenómeno se describe mediante la teoría de ondas, en términos de la mecánica ondulatoria. La particularidad de las ondas es que son capaces de transportar energía sin desplazamiento de la materia. Se puede representar la situación con el siguiente modelo mecánico, intercalando masas y resortes conectados unos con otros.

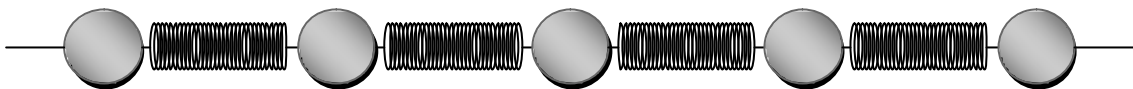


Figura 2.4 Simulación de la transmisión del sonido mediante un sistema de masas y resortes.

Si se hace vibrar la primera masa, las demás también se moverán, repitiendo la oscilación y quedando a la vista una onda que se desplaza a través de la serie de masas y resortes.

Algo similar ocurre con el sonido. El foco, al vibrar, transmite esta agitación al medio elástico que lo rodea. De esta manera, la serie de compresiones y dilataciones avanza, traduciéndose en una onda de presión. Lo graficaremos de la siguiente manera:

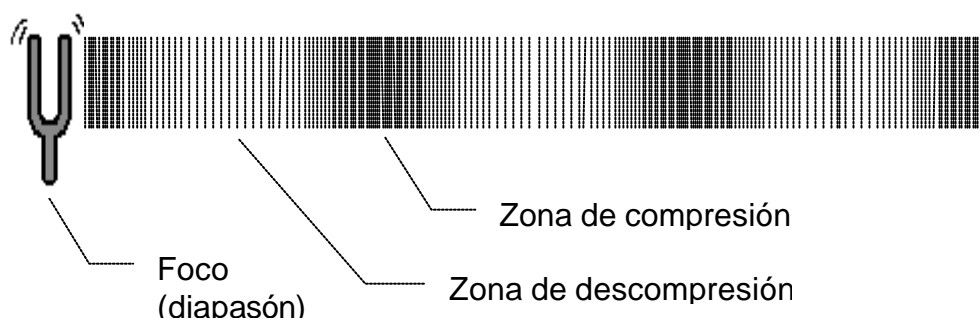


Figura 2.5 Transmisión del sonido al vibrar un diapasón.

Como onda, el sonido tiene las siguientes características:

### **1. El sonido es una onda mecánica**

Efectivamente, las ondas de sonido son ondas mecánicas porque ya hemos visto que necesitan de un medio para desplazarse. (ver 1.2.1)

### **2. El sonido es una onda longitudinal**

En las ondas sonoras, la vibración se propaga en dirección paralela a la dirección de la propia onda. (ver 1.2.2)

### **3. El sonido es una onda tridimensional**

Los frentes de ondas de un sonido son esferas concéntricas que salen de la fuente en todas direcciones. (ver 1.2.3)

#### 4. El sonido es una onda periódica

De hecho, los sonidos “puros”, pueden generarse mediante una oscilación que describe perfectamente la trayectoria de una curva sinusoidal a una frecuencia dada, por ejemplo, la nota **LA** = 440 Hz. (ver 1.2.4)

## 2.3 El Oído Humano

Explicaremos brevemente cómo es que el sonido se percibe mediante el oído.

La función primaria del oído humano es la de transformar la energía mecánica de las ondas sonoras en un impulso nervioso eléctrico, que el cerebro será capaz de decodificar.

El oído se divide en tres partes principales: oído externo, oído medio y oído interno, y su esquema general se puede ver en el siguiente diagrama:

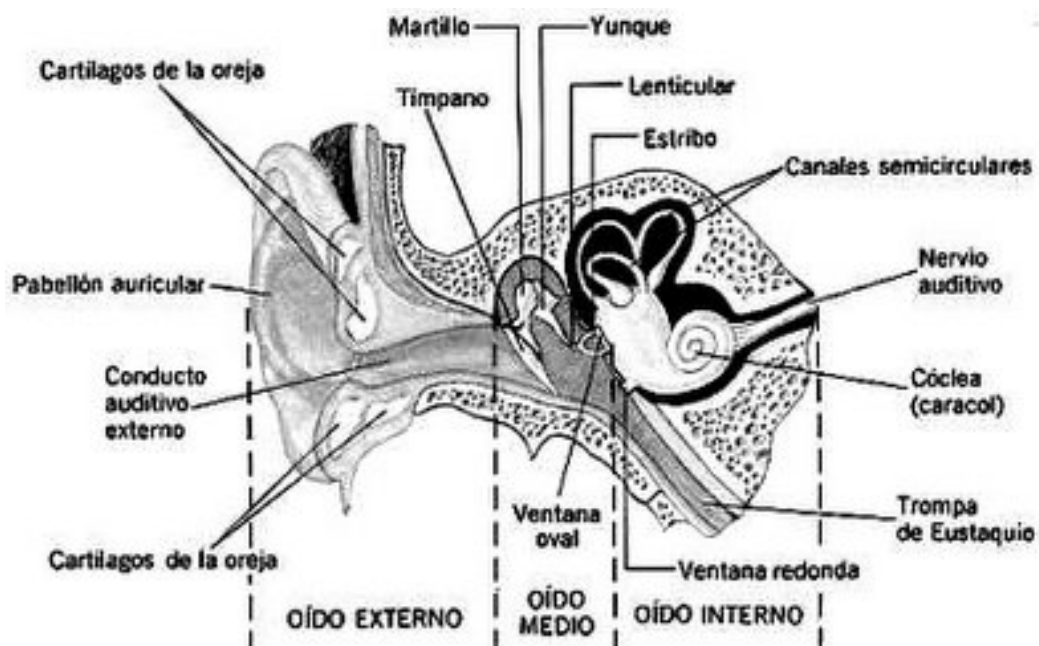
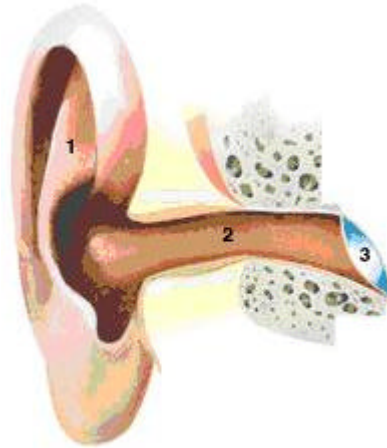


Figura 2.6 Anatomía del oído.

### 2.3.1 El Oído Externo

La única parte visible del oído es el pabellón auditivo que, debido a su especial forma helicoidal, es la primera parte del oído en reaccionar ante el sonido.

El pabellón auditivo funciona como una especie de embudo que ayuda a dirigir el sonido hacia el interior del oído. Sin la presencia de este embudo las ondas sonoras tomarían una ruta directa hacia el conducto auditivo. Esto haría que el proceso de audición fuera difícil e ineficaz ya que gran parte del sonido se perdería y sería más difícil escuchar y comprender los sonidos.



*Figura 2.6 Oído Externo. 1) Pabellón Auditivo. 2) Conducto Auditivo Externo. 3) Membrana Timpánica*

El pabellón auditivo es imprescindible debido a la diferencia de presión que existe en el interior y exterior del oído. La resistencia del aire es mayor en el interior que en el exterior del oído porque el aire del interior se encuentra comprimido, y por ello, a mayor presión. Para que las ondas sonoras penetren en el oído de la mejor forma posible, la resistencia del aire no debe ser demasiado alta.

### **2.3.2 El Oído Medio**

El tímpano, o membrana timpánica, señala el inicio del oído medio.

Las fluctuaciones en la presión del aire que generan las ondas que analizamos con anterioridad llegan al oído, penetran por el conducto auditivo externo – de unos 2,7 cm. de largo y 0,7 cm. de diámetro – y se encuentran con la membrana timpánica. La misma comienza a vibrar, y esas vibraciones son transmitidas a un conjunto de huesos muy pequeños conformado por el martillo, el yunque y el estribo, ya en el oído medio.

Estos diminutos huesos transmiten las vibraciones a otra membrana que es unas 20 veces más pequeña que el tímpano, y que se denomina ventana oval, la que es considerada la entrada al oído interno. En este punto, el sonido se ha amplificado unas 40 veces, pues el oído medio funciona como un transformador acústico.



Figura 2.7 Oído Medio. 1) Extremo del tímpano. 2) Martillo.  
3) Yunque. 4) Estribo. 5) Trompa de Eustaquio.

A su vez, un canal inferior, denominado la trompa de Eustaquio, comunica el oído medio con la laringe, para mantener la misma presión que en el exterior e igualar así la presión a ambos lados del tímpano. Una gran diferencia de presión provocaría malestar y dolor, a la vez que reduciría ligeramente la capacidad de audición.

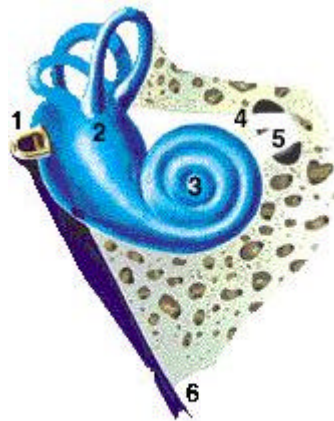


Figura 2.8 Oído Interno. 1) Estribo. 2) Vestíbulo.  
3) Cóclea. 4) Nervio Acústico. 5) Nervio Auditivo. 6) Trompa de Eustaquio.

### **CAPÍTULO III**

## **INSTRUMENTOS MUSICALES e INSTRUMENTOS MUSICALES DE CUERDA**

### 3.1 Los Instrumentos Musicales

Ya en épocas remotas, el hombre descubrió que existían muchas y muy diversas formas de producir sonidos, y es así como fue experimentando con todas ellas progresivamente. Con el correr del tiempo fue perfeccionando sus técnicas, y las acciones de golpear y soplar elementos variados le fueron revelando aquellos sonidos que le producían placer, permitiéndole sacar conclusiones que llevaron al desarrollo de los instrumentos musicales tal y como actualmente los conocemos.

Podemos llamar Instrumento Musical a cualquier sistema que permita la generación de uno o más tonos con el fin de producir música. Un instrumento puede generar los tonos de uno a la vez – como en el caso de una trompeta o una flauta dulce – o bien de manera simultánea – como lo permiten la guitarra y el piano, entre otros.

Existen en el mundo una gran variedad de instrumentos. Algunos de ellos ya han caído en desuso o han evolucionado hacia versiones más modernas. Otros, por el contrario, permanecen en su forma original para ser utilizados en ceremonias o para cumplir un propósito en particular.

Cada región del mundo, cada tribu y cada nación posee instrumentos autóctonos que identifican unívocamente la manera en que la música es concebida y apreciada en cada rincón del planeta.



Figura 3.1: Izq.: El artista argentino Valdo Delgado (recientemente fallecido) ejecutando su charango.  
Der.: Aborigen australiano tocando el Didgeridoo. <http://blogs.va.com/thedreamoftravelling/files/didgeridoo.jpg>

## 3.2 Características Generales de los Instrumentos Musicales

Un instrumento musical le permite a su intérprete ejecutar los diversos sonidos que componen un fragmento musical. Si el mismo se encuentra pautado, como en el caso de la ejecución de una pieza musical escrita, el ejecutante podrá trasladar esta notación simbólica en sonidos que representan lo que se encuentra escrito. En el caso de una improvisación o en el proceso de composición, su conocimiento del instrumento musical le permitirá crear o reproducir sonidos afines a lo que se propone realizar.

Para desempeñar su tarea, el músico cuenta con la posibilidad de manipular aquellas características del sonido – y por ende de la música – que son función del instrumento y su ejecución: la **tonal** y la **dinámica**.

En lo que al aspecto tonal se refiere, un instrumento nos permite trabajar con la **altura** y el **timbre**. Ambas son características que permiten distinguir un instrumento de otro e incluso agruparlos según su afinidad con respecto a las mismas. Así pues, un compositor puede escribir un pasaje o una pieza completa para un grupo de cuerdas, viento o percusión o, por ejemplo, realizar contrapuntos entre las secciones de instrumentos con voz grave y aguda alternativamente.

En cuanto al aspecto dinámico, éste dependerá del **rango de intensidad** del instrumento, y la maestría del músico al ejecutar una pieza.

Veamos ahora cómo se relacionan estas características del sonido con los instrumentos musicales.

### 3.2.1 Altura

En un instrumento, su altura está básicamente determinada por la frecuencia fundamental del mismo y el rango de frecuencias que abarque. Esta característica nos permite notar que hay instrumentos que producen sonidos más agudos y otros que producen sonidos más graves. Según esta característica, las voces humanas y muchos de los instrumentos musicales son clasificadas, de más aguda a más grave, como soprano, contralto, tenor y bajo.

Esta es una clasificación básica a la que suele agregársele elementos para calificar voces intermedias, cuando esto se hace necesario. Por ejemplo, las voces *soprano ligera* o *mezzo-soprano lírica* se encuentran entre las voces soprano y contralto; o para las voces masculinas podemos mencionar al barítono, cuyo registro abarca parte de las voces del tenor y parte de las del bajo. Entre los instrumentos podemos mencionar el caso de los saxofones, de los cuales encontraremos las variedades alto, soprano, tenor y barítono, y sopranino y contrabajo con menor frecuencia.



Figura 3.2: Familia de Saxofones. De Izq. a Der.: soprano, alto, tenor, barítono y bajo. Las proporciones no son las reales, tan solo se pretende mostrar las diferencias entre ellos.

Hay otros casos en que se ha preferido utilizar distintos nombres para los instrumentos pertenecientes a una misma familia, pero que difieren en su altura. Así es como violín, viola, violonchelo y contrabajo son las diferentes versiones – de más aguda a más grave – de una misma familia de instrumentos.



Figura 3.3: De izquierda a derecha: Violín, Viola, Violoncelo, Contrabajo  
[http://www.melomanos.com/academia/instrum/c\\_arco2.htm](http://www.melomanos.com/academia/instrum/c_arco2.htm)

### 3.2.2 Timbre

Ya hemos visto que el timbre es ni más ni menos que aquella característica del sonido que nos permite distinguir un instrumento de otro. Es la voz del instrumento. El timbre nos permite incluso distinguir la diferencia que existe entre dos instrumentos similares pero de distinta fabricación, o el mismo instrumento cuando es tocado por dos músicos distintos.



El timbre puede hacer más o menos valioso a un instrumento, en función de la calidad de sonidos que produce. También nos permite realizar observaciones que hacen a la manera en que un guitarrista, trompetista o violinista hace sonar su instrumento.

Pero, ¿por qué ocurre esto?. En principio, debemos comprender que el sonido emitido por cualquier instrumento no es una sinusoidal pura. El rebote de la onda sonora generará sobretonos (también llamados armónicos) que se sumarán a lo que denominamos frecuencia fundamental, que es la generada originalmente y la que dará nombre al sonido ejecutado.

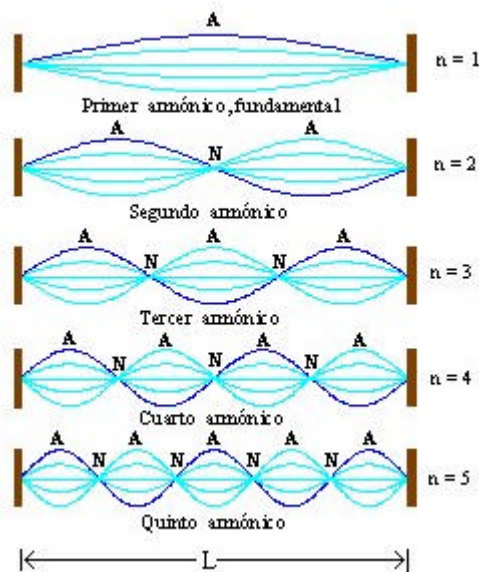


Figura 3.4: La frecuencia fundamental ( $n=1$ ), y los armónicos segundo a quinto ( $n=1$  a  $n=5$ ) generados en una cuerda sujeta en ambos extremos

La distribución de estos armónicos, y la amplitud de cada uno es lo que conforma el sonido de un instrumento determinado. En la siguiente figura se muestra cómo queda conformado un sonido que es la suma de la frecuencia original más el segundo y tercer armónico, todos con diferente amplitud.

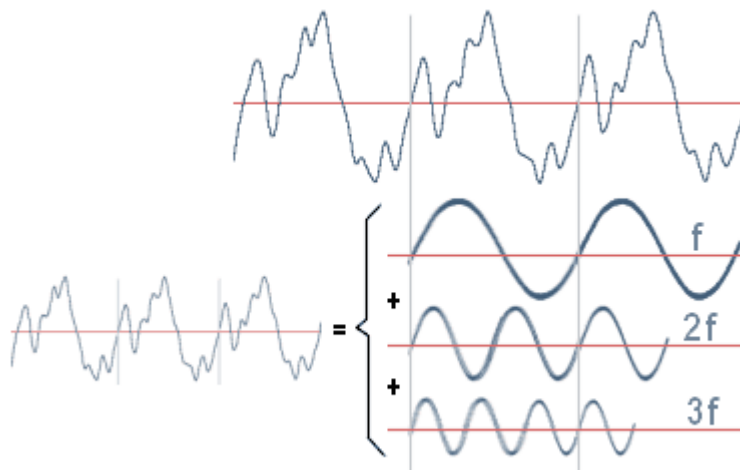


Figura 3.5: Sonido generado por la suma de los tres primeros armónicos

Una distribución bien proporcionada de tonos y sobretonos hará a la mejor calidad de un instrumento.

Para realizar esta experiencia podemos hacer algo sencillo. Primero tomamos un diapasón que emita una nota a 440 Hertzios; se trata de la nota LA, próxima al DO central del piano, denominada La3. Luego tocamos esta misma nota en una guitarra y en un piano, siempre al mismo volumen.

Por lo que ya sabemos, estaremos igualando la altura y también la intensidad de las tres notas, o sea que produciremos ***tres sonidos idénticos en frecuencia y amplitud***. Sin embargo, los sonidos son notablemente distintos en timbre. El tono más sencillo va a provenir del diapasón, puesto que al carecer de caja de resonancia o cámara de conducción en la que se producirían sucesivos rebotes de las ondas sonoras y sus consiguientes armónicos, nos va a estar brindando casi únicamente vibraciones con frecuencias de 440 Hz, con algunas modificaciones que el mismo oído genera en su interior debido a sus cualidades acústicas y las propiedades de resonancia de su membrana vibrante.

En el caso de la guitarra y el piano, la componente principal de la nota producida también tendrá una frecuencia de 440 Hz, pero en este caso, si analizamos el espectro sonoro, encontraremos otras frecuencias múltiplos de 440 Hz, que se denominan tonos secundarios. Son justamente estas frecuencias de 880 Hz, 1.320 Hz, 1.760 Hz o 2.200 Hz las que denominamos armónicos y determinan el timbre de la nota.

### 3.3 Clasificación de los Instrumentos Musicales

Existen muchísimas maneras de clasificar los instrumentos; por la manera en que se origina el sonido, por su posición en una orquesta, por familias según su origen antropológico, por su historia, por el material en que están fabricados son sólo algunas de las clasificaciones que podríamos hacer.

De hecho, la clasificación que le será útil a un antropólogo no será la misma que utilizará un director de orquesta al momento de definir la distribución de sus músicos, y tampoco se aproximará a la que utilizaría un ingeniero de sonido para aprovechar al máximo los recursos de una determinada sala de espectáculos.

Así pues, durante siglos se utilizó una clasificación muy simple y práctica, colocando a todos los instrumentos en algunos de los siguientes grupos:

***Instrumentos de Viento***  
***Instrumentos de Cuerda***  
***Instrumentos de Percusión***

Esta clasificación prácticamente no sufrió modificaciones durante mucho tiempo, puesto que resultaba muy útil para la identificación de instrumentos en una banda, orquesta de cámara y orquesta sinfónica. Sin embargo, debido a cuestiones prácticas, algunos musicólogos creían conveniente incluir un grupo para las voces y crear un grupo especial para los instrumentos de teclado, porque entendían que si bien el piano y el clave eran instrumentos de cuerda con teclado, también existían otros instrumentos que utilizaban un teclado para tocar las notas, pero en los cuales el sonido era generado por modos de percusión o con aire, como en el caso del acordeón.

Además, con el advenimiento de los sonidos generados a partir de artefactos eléctricos o electrónicos, un nuevo grupo de instrumentos se daba a conocer, que no estaba siendo considerado en ninguno de los grupos mencionados. Pioneros de estas prácticas fueron Thaddeus Cahill, quien en 1896 patentó el Telharmonium (también denominado Teleharmonium o dinamófono), o el aún más conocido Maurice Martenot, quien en 1928 presentó el instrumento que luego se conoció como Ondas Martenot.

Es así como, para mediados de la década de 1920, los musicólogos Curt Sachs y Erich Moritz von Hornbostel se proponen una reformulación de la clasificación existente, basándose en los antecedentes de Victor Mahillon y la clasificación decimal que Melville Dewey había utilizado para la clasificación de libros. La clasificación Hornbostel-Sachs se basa en qué es lo que produce la vibración en el instrumento, y de qué manera lo hace, y establece cinco grandes grupos:

- 1. Idiófonos;** en los que el sonido es generado por vibración del propio instrumento, como en el caso de una campana tubular o una marimba.
- 2. Membranófonos;** que son aquellos en los cuales el sonido es generado por la vibración de una membrana, como es el caso del timbal.
- 3. Cordófonos;** se corresponden con los instrumentos de cuerda, donde el sonido es generado por la vibración de una o más cuerdas de longitud fija o variable, como en el caso de una guitarra o un arpa.
- 4. Aerófonos;** que se corresponden con los instrumentos de viento en la codificación clásica, y donde el sonido es generado por la vibración de una columna de aire, como en el caso de una trompeta o una flauta.
- 5. Electrónicos;** en los que el sonido es generado por medios electrónicos, como en un sintetizador.

### 3.4 Los Instrumentos de Cuerda

En este tipo de instrumentos la cuerda, al vibrar, generará las ondas y el aire será el medio a través del cual se desplazarán las mismas. Este es el grupo sobre el cual analizaremos la ecuación de onda. Pero hay una muy buena cantidad de maneras de concretar las vibraciones, ya que podemos fijar

la cuerda en uno o en ambos extremos para modificar el sonido producido, y podemos frotar la cuerda, o golpearla, o incluso tomarla para luego soltarla y producir de esta manera las vibraciones que darán vida a los sonidos. Es, justamente, esta diversidad de maneras de generar un sonido a través de una cuerda en tensión, la que da origen a las distintas familias de instrumentos musicales de cuerdas (también denominados cordófonos), que son:

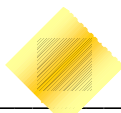
***Instrumentos de cuerda frotada;*** en los cuales la vibración es generada por fricción de las cuerdas, como en el caso del violín, la viola, el violonchelo y el contrabajo. Cabe señalar en estos instrumentos también existen técnicas como el pizzicato (pellizcado), en las cuales las cuerdas son tocadas con los dedos en lugar de ser frotadas por un arco.

***Instrumentos de cuerda punteada;*** en los cuales se hace vibrar las cuerdas mediante la pulsación de las mismas por medio de los dedos o un plectro (popularmente conocido como púa). Tal es el caso de la guitarra, el arpa, el banjo, el laúd, el sitar, etc.

***Instrumentos de cuerda percutida;*** donde la vibración se produce mediante el golpe de las cuerdas. El ejemplo más claro es el del piano, en el cual, al accionar una tecla, esta hace que un pequeño martillo de madera que está forrado de fieltro, golpee la cuerda y se separe de ella de inmediato, para no apagar las vibraciones producidas.

Pero cualquiera sea el caso, las vibraciones generadas por una cuerda tienen una limitación, que radica en el hecho de que el área proyectada por una cuerda es más bien limitada, con lo cual el movimiento del aire circundante – y por ende nuestra percepción del sonido – es más bien limitado. Para salvar este obstáculo, los instrumentos de cuerda cuentan con amplificadores del sonido.

**CAPÍTULO IV**  
**FUNCIONES PERIÓDICAS**



## 4.1 Funciones Periódicas

Si observamos a nuestro alrededor, podemos comprobar que existen numerosos fenómenos que se repiten periódicamente. Por ejemplo, los latidos del corazón, las oscilaciones de un péndulo, los movimientos de rotación y traslación de la Tierra, la corriente eléctrica alterna, el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte o las vibraciones producidas al tocar las cuerdas de una guitarra.

A fin de analizar y predecir su comportamiento, estos fenómenos pueden modelarse matemáticamente mediante las llamadas “funciones periódicas”.

En este capítulo definiremos tales funciones y veremos que, bajo ciertas hipótesis, éstas pueden representarse mediante una suma infinita de términos que contienen “senos” y “cosenos”.

Más precisamente, si  $f$  es una función real de una variable y periódica, demostraremos que en condiciones bastante generales  $f$  puede escribirse así:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Una serie de esta forma se llama “Serie de Fourier” y la representación de funciones mediante este tipo de series es una de las técnicas más utilizadas en Matemática Aplicada, en especial en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

### **Definición 4.1: Función Periódica**

Una función  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ , con  $D =$  dominio de  $f$ , es periódica si existe un número real positivo  $p$  tal que  $f(x + p) = f(x) \quad \forall x, (x + p) \in D$ .

Geométricamente significa que la gráfica de  $f$  se repite en cada intervalo de longitud  $p$ .

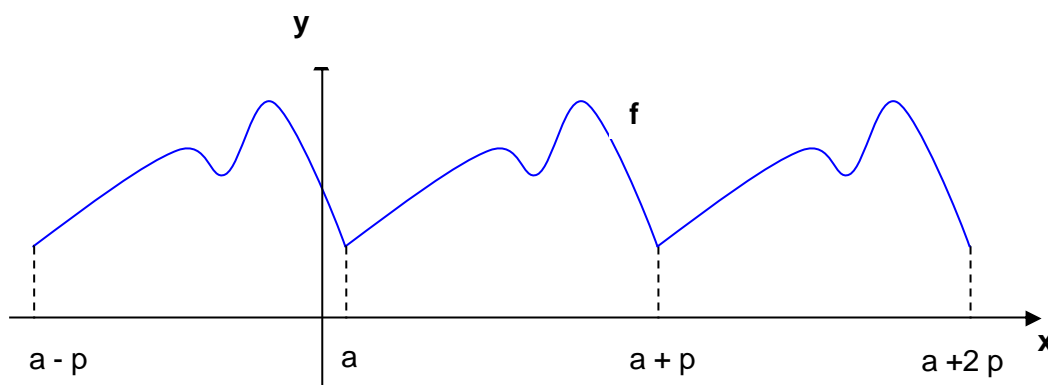


Figura 4.1: Gráfica de una función periódica.

El número  $p$  se llama **un período** de la función  $f$ . Notar que el período no es único; por ejemplo, si  $p$  es un período de  $f$ , también lo son los números  $2p$ ,  $3p$  y demás. De hecho, en una función constante cualquier número positivo es un período.

#### **Definición 4.2: Período Fundamental**

Si existe un mínimo número real positivo  $P$  tal que  $f$  sea periódica con período  $P$ , diremos entonces que  $P$  es el **período fundamental de  $f$**  (también llamado **el período de  $f$** ).

Son ejemplos de funciones periódicas:

- Las funciones trigonométricas  $f(x) = \text{sen}(x)$  y  $g(x) = \text{cos}(x)$ , y tienen período fundamental  $P = 2\pi$ . Estas son las funciones periódicas "por excelencia" y muy simples para operar con ellas, pues son infinitamente derivables.
- La función  $f(x) = \text{sen}(nwx)$ , con  $n \in \mathbf{N} \wedge w \in \mathfrak{R}_{\neq 0}$ . Calculemos su período fundamental: debemos hallar el mínimo  $P$  tal que  $f(x + P) = f(x)$ . Entonces,  $\text{sen}(n w(x + P)) = \text{sen}(n w x) \Rightarrow \text{sen}(n wx + n w P) = \text{sen}(n w x)$ . Como el período fundamental de la función seno es  $2\pi$ , resulta  $n w P = 2\pi$ . Por lo tanto, 
$$P = \frac{2\pi}{n w}.$$

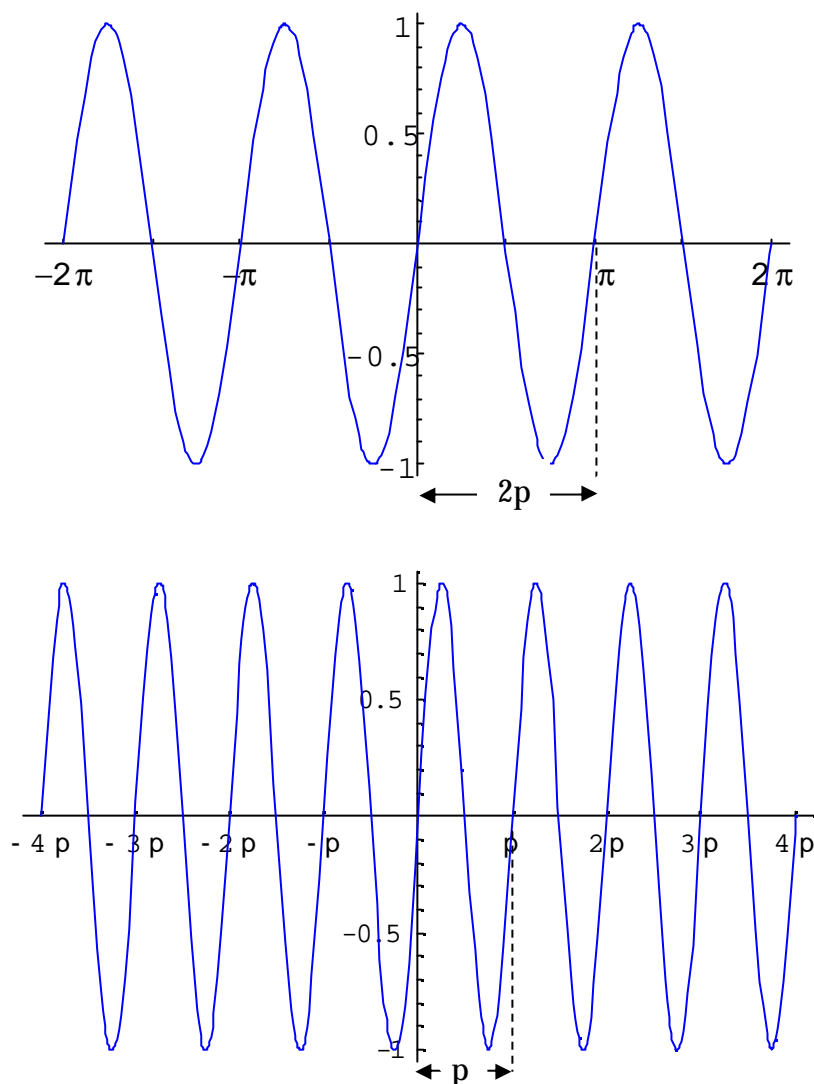
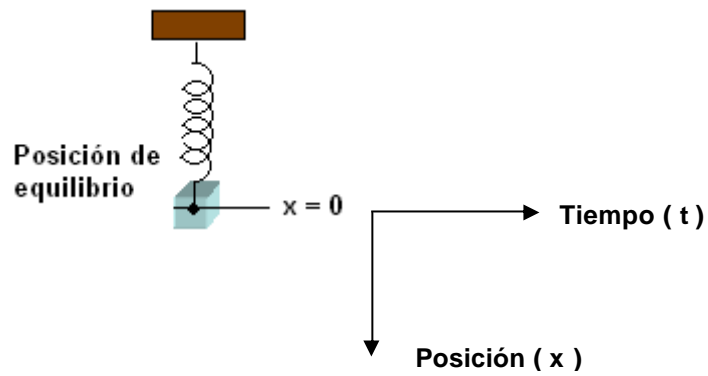


Figura 4.2: Arriba: gráfica de la función  $f(x) = \text{sen}(x)$ . Abajo: gráfica de  $f(x) = \text{sen}(2x)$ . En ambos casos se indica el período ( $2p$  y  $p$  respectivamente)

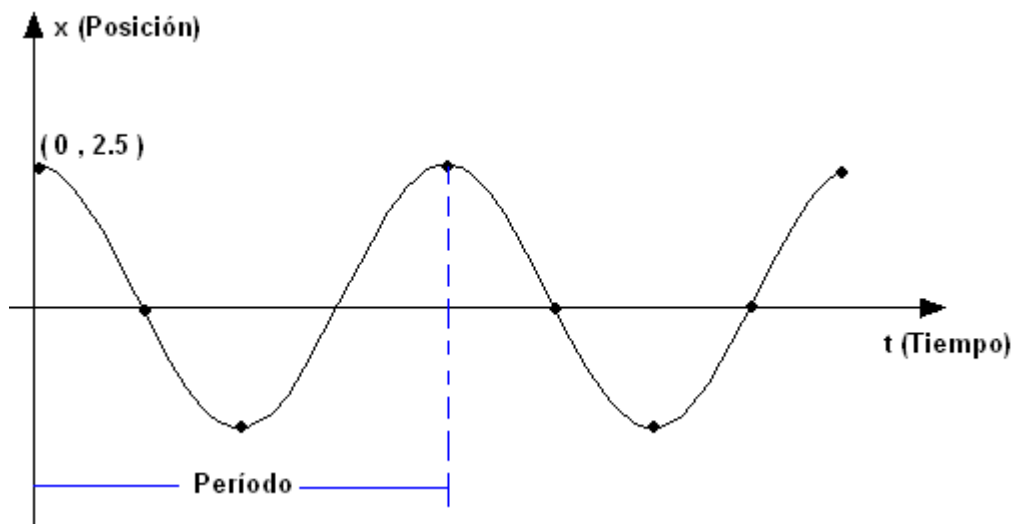
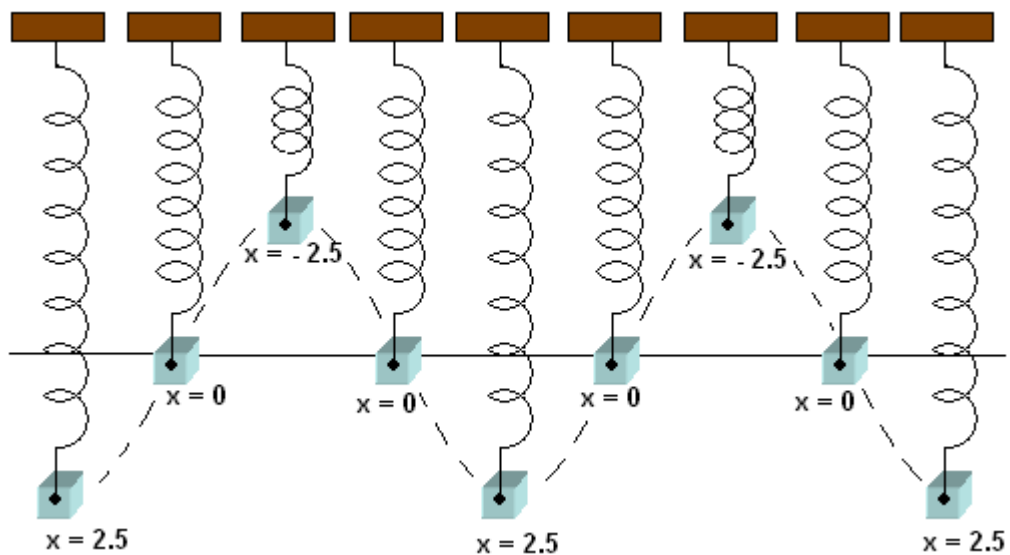
Las gráficas de las funciones periódicas suelen llamarse “**ondas**”. El siguiente ejemplo ilustra cómo una función periódica puede ser utilizada para modelar matemáticamente el movimiento de un cuerpo suspendido de un resorte.

**Ejemplo 4.1:** Un cuerpo está suspendido de un resorte flexible, el cual cuelga de un soporte rígido. Si apartamos el objeto hasta una posición  $x = 2.5$  **cm**. respecto de su posición de equilibrio y luego lo soltamos, comenzará a oscilar. En caso de no intervenir la fuerza de rozamiento del aire, vibrará indefinidamente.





Como se puede apreciar en la siguiente figura, el movimiento del cuerpo se puede describir mediante una función periódica  $x(t)$  que indica, en cada instante  $t$ , cuánto se desplazó el objeto respecto de su posición de equilibrio.



La búsqueda de una expresión analítica de la función posición  $\mathbf{x(t)}$  se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria. Por ahora nos conformamos con observar que su gráfica tiene forma de onda sinusoidal. En capítulos subsiguientes, veremos que las ondas sonoras, y en particular las generadas por la vibración de un instrumento musical, producen en cada molécula de aire un movimiento oscilatorio similar al de un cuerpo suspendido de un resorte.

Enunciaremos a continuación algunas propiedades de las funciones periódicas.

**Proposición 4.1:**

Si  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  es periódica de período  $P$ , entonces  $f(\mathbf{x} + k P) = f(\mathbf{x}) \quad \forall k \in \mathbf{Z}$

Demostración:

- Si  $k = 0$ , no hay nada que probar.
- Si  $k \in \mathbf{N}$ , probemos por inducción sobre  $k$  que  $f(\mathbf{x} + k P) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}$ 
  - a) Si  $k = 1$ ,  $f(\mathbf{x} + 1 P) = f(\mathbf{x} + P) = f(\mathbf{x})$  pues  $f$  tiene período  $P$ .
  - b) Supongamos que vale para  $k$ , es decir,  $f(\mathbf{x} + k P) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}$  (hipótesis inductiva).
  - c) Probemos ahora que vale para  $(k+1)$ , es decir, que  $f(\mathbf{x} + (k + 1) P) = f(\mathbf{x})$ . Teniendo en cuenta que  $f$  tiene período  $P$  y aplicando la hipótesis inductiva, resulta:
 
$$f(\mathbf{x} + (k+1) P) = f(\mathbf{x} + k P + P) = f(\mathbf{x} + k P) = f(\mathbf{x}).$$
- Si  $k \in \mathbf{Z}_{<0}$ , llamamos  $k = -m$ , con  $m \in \mathbf{N}$ . De manera análoga al caso anterior, se demuestra por inducción sobre  $m$  que  $f(\mathbf{x} - m P) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{D}$ .

La siguiente Proposición afirma que cualquier período de una función periódica es un múltiplo de su período fundamental.

**Proposición 4.2:**

Si  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  es periódica de período fundamental  $P$ , y  $a$  es un número real no nulo tal que  $f(\mathbf{x} + a) = f(\mathbf{x})$  entonces  $a = k P$ , para algún  $k \in \mathbf{Z}$

Demostración:

Supongamos por el absurdo que  $a \neq kP \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ . Por lo tanto,  $a - kP \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ . En particular, tomemos  $k = \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor = \text{parte entera de } \frac{a}{P}$ .

- Si  $a > 0$ , consideremos el número  $a - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P$ . Entonces dicho número verifica que  $0 < a - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P < P$ . Como  $f\left(\left(x - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P\right) + a\right) = f\left(x - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P\right)$  y por la Proposición 1 resulta:  
 $f\left(x + a - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P\right) = f\left(x - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P + a\right) = f\left(x - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P\right) = f(x)$ . Por lo tanto,  $a - \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P$  es un período de  $f$  menor que el período fundamental  $P$ , lo cual es un absurdo.

- Si  $a < 0$ , consideremos el número  $\left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P - a$ . Entonces dicho número verifica que  $0 < \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P - a < P$ . Como  $f\left(\left(x - a\right) + a\right) = f(x - a)$  y por la Proposición 1 resulta:  
 $f\left(x + \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P - a\right) = f\left(x - a + \left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P\right) = f(x - a) = f\left(\left(x - a\right) + a\right) = f(x)$ .

- Por lo tanto,  $\left\lfloor \frac{a}{P} \right\rfloor P - a$  es un período de  $f$  menor que el período fundamental  $P$ , lo cual es un absurdo.

Cabe preguntarnos si la suma de dos funciones periódicas es una función periódica. La respuesta está dada en la siguiente Proposición:

**Proposición 4.3:**

Sean  $f_1, f_2: D \subseteq \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  funciones periódicas de períodos  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente. Entonces:

$$f_1 + f_2 \text{ es periódica} \Leftrightarrow \frac{P_1}{P_2} \in \mathbb{Q}$$

Demostración:

$\Rightarrow$ ) Sea  $P$  el período de  $f_1 + f_2$ . Por lo tanto, se verifica que

$$f_1(x + P) + f_2(x + P) = f_1(x) + f_2(x) \text{ o equivalentemente,}$$

$$f_1(x + P) - f_1(x) = f_2(x) - f_2(x + P).$$

Consideremos la función  $g(x) = f_1(x + P) - f_1(x)$ .

Entonces, por ser  $f_1$  y  $f_2$  periódicas de período  $P_1$  y  $P_2$  respectivamente, resulta

$$g(x + P_1) = f_1(x + P_1 + P) - f_1(x + P_1) = f_1(x + P) - f_1(x) = g(x)$$

$$g(x + P_2) = f_1(x + P_2 + P) - f_1(x + P_2) = f_2(x + P_2) - f_2(x + P_2 + P) = f_2(x) - f_2(x + P) =$$

$$f_1(x+P) - f_1(x) = g(x).$$

Luego,

$$\begin{cases} g(x+P_1) = g(x) \\ g(x+P_2) = g(x) \end{cases} \quad (*)$$

En consecuencia,  $g$  es periódica. Llamemos  $T$  a su período fundamental. Por  $(*)$  y la Proposición 2, se tiene que

$$\begin{cases} P_1 = k_1 T \\ P_2 = k_2 T \end{cases} \quad \text{para algún } k_1, k_2 \in \mathbf{Z}. \text{ Por lo tanto, } \frac{P_1}{P_2} = \frac{k_1 T}{k_2 T} = \frac{k_1}{k_2} \in \mathbf{Z}.$$

$\Leftrightarrow$  Como  $\frac{P_1}{P_2} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{k_1}{k_2}$  con  $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ . Por lo tanto,  $P_1 k_2 = P_2 k_1$ . Por la

Proposición 1.1 y como  $f_1, f_2$  son periódicas, resulta

$$f_1(x + P_1 k_2) + f_2(x + P_1 k_2) = f_1(x + P_1 k_2) + f_2(x + P_2 k_1) = f_1(x) + f_2(x).$$

Luego,  $f_1 + f_2$  es periódica.

#### **Observación 4.1**

Sabemos que el espacio de funciones  $V = \{ f / f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathfrak{R}$ . Sin embargo, la Proposición 3 nos dice que el subconjunto  $W = \{ f / f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \wedge f \text{ es periódica} \}$  no es un subespacio vectorial de  $V$ . Pero ¿podremos definir algún subconjunto de  $W$  que sea un subespacio vectorial? La respuesta es que sí, pues si tomamos un número real positivo  $P$ , el conjunto  $W(P) = \{ f / f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \wedge f \text{ es periódica y de período } P \}$  es un subespacio no trivial de  $V$ .

Como la gráfica de una función periódica de período fundamental  $P$  se repite en cada intervalo de longitud  $P$ , resulta natural introducir la siguiente:

#### **Definición 4.3: Ciclo**

Un ciclo de una función periódica de período fundamental  $P$  es la porción de gráfica comprendida en un intervalo de longitud  $P$ .

Si  $f(t)$  es tal que la variable  $t$  representa el tiempo, podríamos preguntarnos con qué frecuencia se repiten los ciclos. O dicho de otra manera: ¿cuántos ciclos se producen en cada unidad de tiempo? La respuesta es muy simple: si  $f$  tiene período  $P$ , entonces en  $P$  unidades de tiempo hay **un ciclo**. Por lo tanto, en **una unidad** de tiempo habrá  **$1/P$  ciclos**. Surge así el concepto de

#### **Definición 4.4: Frecuencia**

La frecuencia de una función periódica de período fundamental  $P$  es  $F = \frac{1}{P}$ .

Su valor representa la cantidad de ciclos que hay en cada unidad de tiempo.

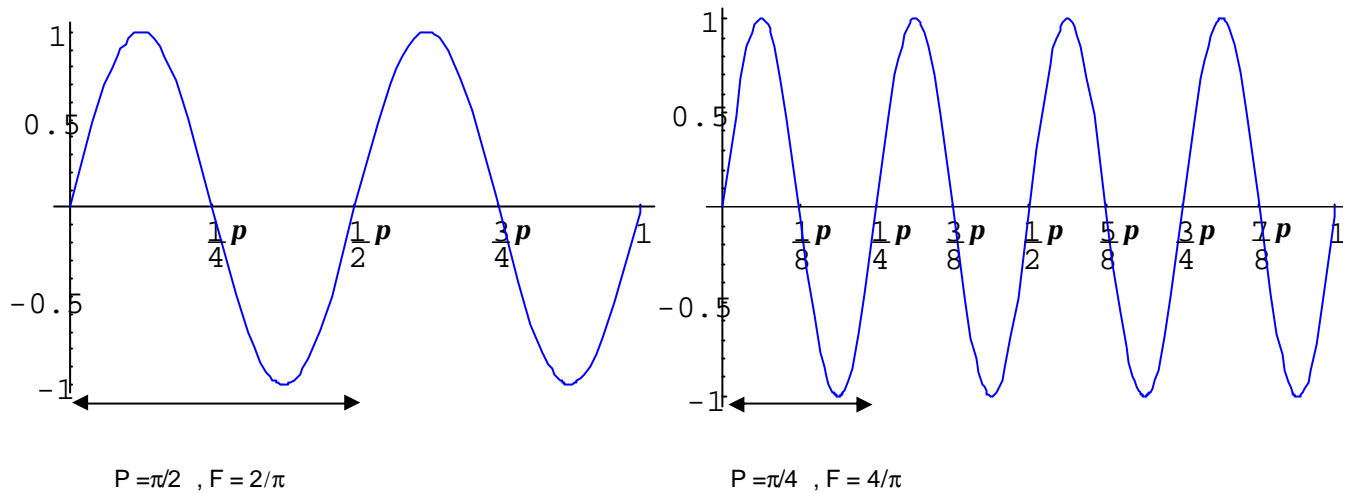


Figura 4.3: Izquierda: gráfica de la función  $f(t) = \text{sen}(4t)$ . Su período es  $P = \pi/2$  y su frecuencia  $F = 2/\pi$ . Derecha: gráfica de  $f(t) = \text{sen}(8t)$ . Su período es  $P = \pi/4$  y su frecuencia  $F = 4/\pi$ .

#### **Observación 4.2**

La unidad que se utilizará para la frecuencia es el **Hertz (Hz)** =  $\frac{1}{\text{seg.}}$

En Acústica Musical se trabajan con funciones de período muy pequeño. Por esta razón se habla más de “frecuencia” que de “período” de una onda.

En el *Capítulo V* introduciremos las series de Fourier, que constituyen la herramienta principal para representar una amplia gama de funciones periódicas.

**CAPÍTULO V**  
**SERIES DE FOURIER**



## 5.1 Series de Fourier

Una serie de Fourier es una suma infinita de constantes multiplicadas por funciones seno y/o coseno de diferentes frecuencias. Este concepto surgió a mediados del siglo XVIII en relación al estudio de la conducción del calor.

Más específicamente, se inició en 1753, cuando Daniel Bernoulli sostenía la tesis de que una amplia gama de funciones periódicas podían expresarse mediante una serie trigonométrica de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

Sin embargo, otros matemáticos de la época, como D'Alembert y Euler, afirmaban que esto no era posible. Posteriormente, en 1807, Fourier aplicó estos desarrollos de forma natural en el estudio de la conducción del calor, pero no aportaba demostraciones. Debido a la falta de rigor en sus aseveraciones, la Academia de París rechazó la publicación de su artículo.

Finalmente, en 1829, Dirichlet logró probar rigurosamente que esa serie trigonométrica converge a la función periódica en cuestión, si ésta es continua y derivable por tramos.

El trabajo de Dirichlet, junto con la obra de Fourier titulada "Theory Analytique de la Chaleur" (1822), dieron un gran impulso al esclarecimiento de la noción de serie y al desarrollo moderno del concepto de función.

Pero si retrocedemos nuevamente en el tiempo, podríamos preguntarnos: ¿qué fue lo que motivó a Bernoulli a representar una función periódica como suma de "senos" y/o "cosenos"? Quizás porque observaba que numerosos fenómenos físicos que se repetían periódicamente, podían modelarse matemáticamente mediante funciones cuyas gráficas tienen un aspecto sinusoidal. Además, porque "seno" y "coseno" son las funciones periódicas por excelencia, ya que son infinitamente diferenciables y muy simples de derivar e integrar.

Como ambas tienen período  $2\pi$ , propuso representar primeramente cualquier función  $f$  de período  $2\pi$  como combinación lineal finita de senos y cosenos. Es decir,

$$f(t) = \sum_{n=0}^k (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

O equivalentemente,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (5.1)$$

Las siguientes integrales, donde  $m$  y  $n$  designan enteros positivos, las utilizó para calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ :

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} \sin(mt) \sin(nt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mt) \sin(nt) dt = 0 \quad \forall m, n$$

Así, multiplicando miembro a miembro la ecuación (5.1) por  $\cos(mt)$  y luego integrando desde  $t = 0$  hasta  $t = 2\pi$  pudo obtener los coeficientes  $a_m$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(mt) dt &= \int_0^{2\pi} \left( a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) \cos(mt) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a_0 \cos(mt) dt + \sum_{n=1}^k \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nt) \cos(mt) + b_n \sin(nt) \cos(mt)) dt = a_m \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(mt) dt \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, k$$

Análogamente, multiplicando miembro a miembro la ecuación (5.1) por  $\sin(mt)$  y luego integrando desde  $t = 0$  hasta  $t = 2\pi$  logró calcular los coeficientes  $b_m$ :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(mt) dt \quad \text{para } m = 1, 2, \dots, k$$

Sólo le restaba hallar el coeficiente  $a_0$ . Para ello integró miembro a miembro la ecuación (5.1) desde  $t = 0$  hasta  $t = 2\pi$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(t) dt &= \int_0^{2\pi} \left( a_0 + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) dt = \int_0^{2\pi} a_0 dt + \sum_{n=1}^k \int_0^{2\pi} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) dt \\ &= 2\pi a_0. \end{aligned}$$

$$\text{En consecuencia, } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

Para que el término  $a_0$  pudiera calcularse utilizando la fórmula de los coeficientes  $a_m$ , sin más que hacer  $m = 0$ , lo redefinió por

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

y en ese caso, la ecuación (5.1) quedaba expresada así:



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (5.2)$$

Pero esta última expresión tenía un problema, y es que toda combinación lineal finita de senos y cosenos es continua, con lo cual las funciones periódicas discontinuas quedaban excluidas de la representación (5.2). Por ejemplo, la función “onda cuadrada” no podría expresarse en esa forma.

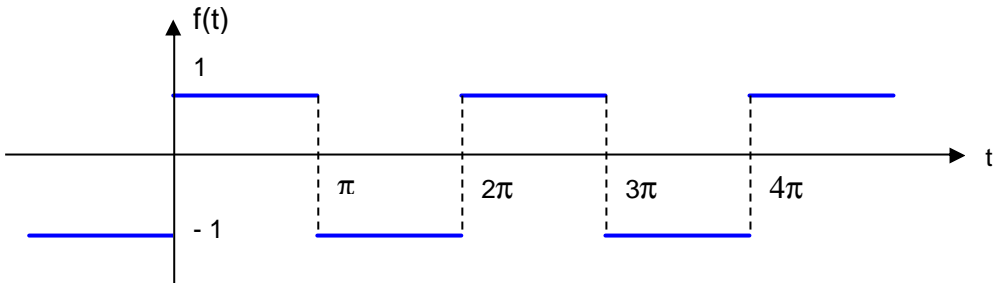


Figura 5.1: La función “onda cuadrada” es periódica y discontinua. Por lo tanto, no puede expresarse como combinación lineal finita de “senos” y “cosenos”.

Para resolver esta situación, Bernoulli propuso reemplazar la suma finita (5.2) por una suma infinita. De esta manera, las funciones periódicas de período  $2\pi$  quedarían expresadas así:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \quad (5.3)$$

Pero, yendo al caso general ¿cómo obtuvo una expresión análoga a la ecuación (5.3) para una función  $f$  de período  $L$ ? Simplemente multiplicando adecuadamente los argumentos del seno y coseno por algún factor, de manera tal que tengan período  $L$ . De esta manera, Bernoulli planteó la siguiente expresión:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) \right)$$

Donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{L}\right) dt \quad n = 1, 2, \dots$$

Esta última serie, a pesar de haber sido formulada por Bernoulli, fue llamada la serie de Fourier de la función  $f$ . Su definición la formalizaremos a continuación:

### **Definición 5.1: Serie de Fourier**

Sea  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función integrable Riemann en el intervalo  $[a, b]$ . Se llama **serie de Fourier** de  $f$  en  $[a, b]$  a la serie trigonométrica

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) \right)$$

y escribiremos

$$f(t) \approx S_f(t)$$

donde los coeficientes

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt$$

se denominan **coeficientes de Fourier** de  $f$ .

### **Observación**

- Según la Definición 5.1, las series de Fourier se aplican a funciones integrables según Riemann en el intervalo  $[a, b]$ , sean o no periódicas. Por otro lado, se sabe que una función  $f$  acotada es integrable Riemann si y sólo si es continua salvo en un conjunto de medida nula<sup>1</sup>. Por lo tanto, si una función acotada presenta una cantidad numerable de discontinuidades en  $[a, b]$ , su serie de Fourier existe (pues todo conjunto numerable es de medida nula).
- La Teoría de Lebesgue, surgida en 1901 para dar solución a ciertas operaciones de paso al límite que no permite la integral de Riemann, (como por ejemplo, la integral de una serie de funciones puede no ser igual a la serie que resulta de integrar cada uno de sus términos) logra extender el concepto de Series de Fourier a funciones integrables según Lebesgue<sup>2</sup>. Pero en este trabajo sólo consideraremos la integral de Riemann.
- En la Definición 5.1 de la serie de Fourier no podemos escribir el signo “igual” ( $=$ ) en lugar de  $\approx$ , mientras no hayamos demostrado que la serie de Fourier es convergente y que su suma sea precisamente  $f(t)$ . Esto es lo que haremos en la próxima sección.

<sup>1</sup> Rudin, Walter. *Principios de Análisis Matemático*. 2ª Ed, México: Mc Graw Hill; 1977. Pág. 260.

<sup>2</sup> Rudin, Walter. *Análisis Real y Complejo*. 1ª Ed, México: Alhambra; 1979. Pág. 80.

## 5.1 Convergencia de las Series de Fourier

Ya hemos definido las series de Fourier, pero quedan aún las siguientes cuestiones por resolver:

- ¿Qué condiciones debe cumplir la función  $f$  para que su serie de Fourier converja?
- En caso de converger, ¿lo hace a  $f$ ?, ¿de qué manera converge?

En este capítulo responderemos a estas preguntas, pero previamente introduciremos los siguientes conceptos:

### **Definición 5.3: Función continua por tramos**

Sea  $f(x)$  definida en  $[a, b]$ , excepto en un número finito de puntos. Entonces  $f$  es continua por tramos en  $[a, b]$  si

1.  $f$  es continua en  $[a, b]$ , excepto en un número finito de puntos.
2.  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  existen.
3. Si  $x_0 \in (a, b)$  y  $f$  no es continua en  $x_0$ , entonces existen  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

Utilizaremos siguiente la notación para los límites por izquierda y por derecha de una función en un punto:

$$f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ y } f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

### **Ejemplo 5.1**

$$\text{Dada } f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2x^2 & 0 < x < 1 \\ -4x + 5 & 1 < x < 2 \\ 2 & x > 2 \end{cases}$$

- a) Graficar  $f$  en  $[-1, 3]$
- b) Verificar que  $f$  es continua por tramos en  $[0, 2]$

### **Resolución**

a) Para obtener la gráfica, ejecutamos los siguientes comandos de Mathematica:

```
f[ x_ ] = Which [ x < 0 , 0 , 0 < x < 1 , 2 x^2 , 1 < x < 2 , - 4 x + 5 , True, 2 ]
```

Plot [ f [ x ], { x, { -1 , 3 } } ]

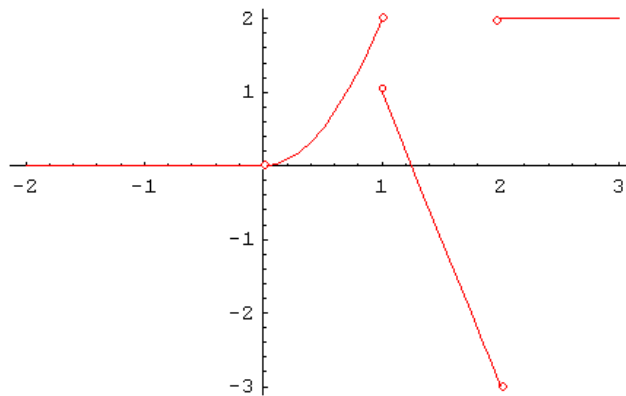


Figura: Gráfica de f en [-1, 3]

b) f verifica las siguientes condiciones:

1. f es continua en [0, 2] excepto en  $x = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 2$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

Por lo tanto, f es continua por tramos en [0, 2]. ■

### Ejemplo 5.2

Verificar que  $f(x) = \frac{1}{x}$  no es continua por tramos en [ -1 , 1 ]

Resolución:

1. f es continua en [ -1 , 1 ] excepto en  $x = 0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$  y  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  no existen

Se concluye que f no es continua por tramos en [ -1 , 1 ] . ■

### **Definición 5.4: Derivada derecha**

Supongamos que  $f(x)$  está definida al menos para  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  para algún  $\delta > 0$  y que  $f(x_0^+)$  existe. Entonces, la derivada derecha de f en  $x_0$  es

$$f'_D(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h}$$

si este límite existe

### **Definición 5.5: Derivada izquierda**

Supongamos que  $f(x)$  está definida al menos para  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  para algún  $\delta > 0$  y que  $f(x_0^-)$  existe. Entonces, la derivada izquierda de f en  $x_0$  es

$$f'_l(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^-)}{h}$$

si este límite existe

Las Definiciones 5.3 y 5.4 sugieren introducir el siguiente concepto:

**Definición 5.6: Función derivable por tramos**

Sea  $f(x)$  definida en  $[a, b]$ , excepto en un número finito de puntos. Entonces  $f$  es derivable por tramos en  $[a, b]$  si

4.  $f$  es derivable en  $[a, b]$ , excepto en un número finito de puntos.
5.  $f'_D(a)$  y  $f'_l(b)$  existen.
6. Si  $x_0 \in (a, b)$  y  $f$  no es derivable en  $x_0$ , entonces existen  $f'_D(x_0)$  y  $f'_l(x_0)$

**Ejemplo 5.3**

Dada la función del Ejemplo 5.1, calcular  $f'_l(1)$  y  $f'_D(1)$

Resolución

Como  $f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$  y  $f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$  se tiene

$$\begin{aligned} f'_l(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1^-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+h)^2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(1+2h+h^2) - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 + 4h + 4h^2 - 2}{h} = 4 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f'_D(1) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4(1+h) + 5 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4 - 4h + 5 - 1}{h} = -4. \blacksquare \end{aligned}$$

Las siguientes proposiciones serán utilizadas para demostrar la convergencia de las series de Fourier.

**Proposición 5.1**

Sea  $k \in \mathbb{Z}$  y  $f$  una función continua por tramos en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Entonces

- a)  $f$  es continua en  $x_0 \in [a, b]$  sii  $f$  es continua en  $x_0 \pm kT \in [a \pm kT, b \pm kT]$ .
- b)  $f$  es discontinua en  $x_0 \in [a, b]$  sii  $f$  es discontinua en  $x_0 \pm kT \in [a \pm kT, b \pm kT]$
- c)  $f((x_0 \pm kT)^+) = f(x_0^+)$  y  $f((x_0 \pm kT)^-) = f(x_0^-) \quad \forall x_0 \in [a, b]$ .

- d)  $f$  es continua por tramos en  $[a \pm kT, b \pm kT]$ .  
 e)  $f$  es continua por tramos en  $[a - k_0T, b + k_1T] \quad \forall k_0, k_1 \in \mathbb{N}$   
 f)  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ .  
 g)  $f(x_0^+)$  y  $f(x_0^-)$  existen  $\forall x_0 \in \mathfrak{X}$   
 h)  $f$  tiene derivada derecha e izquierda en  $x_0 \in [a, b]$  sii  $f$  tiene derivada derecha e izquierda en  $x_0 \pm kT \in [a \pm kT, b \pm kT]$ .  
 i) Si  $f$  es derivable por tramos en  $[a, b]$  entonces es derivable por tramos en  $[-T/2, T/2]$ .  
 j) Si  $f$  es derivable por tramos en  $[a, b]$  entonces  $f_D(x_0)$  y  $f_I(x_0)$  existen  $\forall x_0 \in \mathfrak{X}$ .

Demostración:

a) Sólo probaremos la doble implicación para  $x_0+kT$  y el intervalo  $[a+kT, b+kT]$  pues el otro caso es similar.

$\Rightarrow$ ) Sea  $x_0$  un punto de continuidad de  $f$  en  $[a, b]$ .

Entonces  $x_0 + kT \in [a + kT, b + kT]$ . Por otro lado, como  $f$  tiene período  $T$ , se tiene

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + kT} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + kT} f(x - kT) = \lim_{x - kT \rightarrow x_0} f(x - kT)$$

Sustituyendo  $u = x - kT$  se obtiene

$$\lim_{x - kT \rightarrow x_0} f(x - kT) = \lim_{u \rightarrow x_0} f(u) = f(x_0) = f(x_0 + kT). \text{ Por lo tanto,}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + kT} f(x) = f(x_0 + kT).$$

$\Leftarrow$ ) Sea  $x_0 + kT$  un punto de continuidad de  $f$  en  $[a+kT, b+kT]$ .

Entonces  $x_0 \in [a, b]$ . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x + kT) = \lim_{x + kT \rightarrow x_0 + kT} f(x + kT) = \lim_{u \rightarrow x_0 + kT} f(u) = f(x_0 + kT)$$

b) Es obvio, por el contra recíproco del inciso a).

c) Probemos primero que  $f(x_0^+)$  y  $f(x_0^-)$  existen  $\forall x_0 \in [a, b]$ .

- Si  $x_0 \in (a, b)$ ,  $f(x_0^+)$  y  $f(x_0^-)$  existen por ser  $f$  continua por tramos en  $[a, b]$ .
- Si  $x_0 = a$  entonces  $f(a^+)$  existe y, por ser  $f$  periódica, se tiene

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x + T) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x + b - a) = \lim_{x + b - a \rightarrow (b - a + a)^-} f(x + b - a) =$$

$$= \lim_{x + b - a \rightarrow b^-} f(x + b - a) = \lim_{u \rightarrow b^-} f(u) = f(b^-)$$

- Si  $x_0 = b$  entonces  $f(b^-)$  existe y de la periodicidad de  $f$  resulta

$$f(b^+) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x - T) = \lim_{x \rightarrow b^+} f(x - b + a) = \lim_{x - b + a \rightarrow (b - b + a)^+} f(x + b - a) =$$

$$= \lim_{x - b + a \rightarrow a^+} f(x + b - a) = \lim_{u \rightarrow a^+} f(u) = f(a^+)$$

En consecuencia, si  $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{x \rightarrow (x_0 \pm kT)^+} f(x) = \lim_{x \mp kT \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \mp kT \rightarrow x_0^+} f(x \mp kT) = \lim_{u \rightarrow x_0^+} f(u) = f(x_0^+)$$

De donde

$$f((x_0 \pm kT)^+) = f(x_0^+)$$

De manera análoga se prueba que

$$f((x_0 \pm kT)^-) = f(x_0^-)$$

d) Como  $f$  es continua por tramos en  $[a, b]$ ,  $f$  es continua en dicho intervalo, salvo en un número finito de puntos  $c_1, c_2, \dots, c_n \in [a, b]$ .

Sea  $w$  un punto de discontinuidad de  $f$  en  $[a \pm kT, b \pm kT]$ .

Entonces  $w = (w \mp kT) \pm kT$ ; por el inciso b),  $(w \mp kT)$  es un punto de discontinuidad de  $f$  en  $[a, b]$ . Por lo tanto,  $(w \mp kT) = c_i$ , para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . En consecuencia,  $w = c_i \pm kT$ .

De esta manera, los únicos puntos de discontinuidad de  $f$  en  $[a \pm kT, b \pm kT]$  son  $c_1 \pm kT, c_2 \pm kT, \dots, c_n \pm kT$  para los cuales, por el inciso c), los límites laterales existen.

Luego,  $f$  es continua por tramos en  $[a \pm kT, b \pm kT]$ .

e) Sean  $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ ; como  $f$  es continua por tramos en  $[a \pm kT, b \pm kT] \forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$f$  resulta continua por tramos en  $\bigcup_{k=1}^{k_0} [a - kT, b - kT]$  y en  $\bigcup_{k=1}^{k_1} [a + kT, b + kT]$ .

Utilizando la expresión  $T = b - a$  se obtiene

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} [a - kT, b - kT] = [a - k_0T, b]$$

$$\bigcup_{k=1}^{k_1} [a + kT, b + kT] = [b, b + k_1T]$$

Luego,  $f$  es también continua por tramos en  $[a - k_0T, b] \cup [b, b + k_1T] = [a - k_0T, b + k_1T]$ .

f) Por el inciso e),  $f$  es continua por tramos en  $[a - k_0T, b + k_1T] \forall k_0, k_1 \in \mathbb{N}$

En particular, tomemos  $k_0 > \frac{a}{T} + \frac{1}{2}$  y  $k_1 > -\frac{b}{T} + \frac{1}{2}$ .

En este caso, resulta  $[-T/2, T/2] \subset [a - k_0T, b + k_1T]$  y, en consecuencia,  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ .

g) Tomemos  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\frac{x_0 - b}{T} \leq k \leq \frac{x_0 - a}{T}$ . Dicho  $k$  existe, pues el intervalo

$\left[ \frac{x_0 - b}{T}, \frac{x_0 - a}{T} \right]$  tiene longitud 1. Luego,  $x_0 \in [a + kT, b + kT]$ . Por el inciso d),

$f$  es continua por tramos en este intervalo y, por lo tanto,  $f(x_0^+)$  y  $f(x_0^-)$  existen.

h) Por el inciso c),  $f((x_0 \pm kT)^+) = f(x_0^+)$  y  $f((x_0 \pm kT)^-) = f(x_0^-)$ . Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 \pm kT + h) - f((x_0 \pm kT)^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0^+)}{h} = f_D(x_0).$$

Luego,

$$f_D(x_0 \pm kT) = f_D(x_0)$$

De manera similar se prueba que

$$f_I(x_0 \pm kT) = f_I(x_0)$$

Las dos últimas ecuaciones prueban la doble implicación de este inciso.

i) La demostración es análoga a la efectuada en el inciso f).

j) Sea  $x_0 \in \mathfrak{R}$ ; entonces  $x_0 \in [a + kT, b + kT]$  para algún  $k \in \mathbb{Z}$ .

Luego,  $x_0 - kT \in [a, b]$ . Como  $f$  es derivable por tramos en  $[a, b]$ ,  $f$  tiene derivada derecha e izquierda en  $x_0 - kT$ . Por el inciso h),  $f$  tiene derivada derecha e izquierda en  $(x_0 - kT) + kT = x_0$ . Por lo tanto,  $f_D(x_0)$  y  $f_I(x_0)$  existen. ■

**Proposición 5.2**

Sea  $f$  una función continua por tramos en  $[a, b]$ . Entonces  $f$  es de cuadrado integrable en  $[a, b]$ , es decir,  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$

**Demostración:**

La continuidad por tramos de  $f$  implica que  $f$  es continua salvo en un número finito de puntos  $c_1, c_2, \dots, c_n$  con  $a \leq c_1 < c_2 < \dots < c_n \leq b$ . Entonces,  $f$  es continua en los subintervalos  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_n, b)$  y, por lo tanto, también lo es  $|f|^2$ . Luego, como toda función continua en un intervalo es integrable en dicho intervalo, resulta

$$\int_a^{c_1} |f(x)|^2 dx < \infty, \int_{c_n}^b |f(x)|^2 dx < \infty \text{ y } \int_{c_{k-1}}^{c_k} |f(x)|^2 dx < \infty, k = 2, \dots, n$$

De donde se obtiene

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_a^{c_1} |f(x)|^2 dx + \sum_{k=2}^n \int_{c_{k-1}}^{c_k} |f(x)|^2 dx + \int_{c_n}^b |f(x)|^2 dx < \infty \quad \blacksquare$$

**Proposición 5.3**

Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas por tramos en  $[a, b]$ . Entonces

- a)  $f \cdot g$  es de cuadrado integrable en  $[a, b]$ .
- b)  $f + g$  es de cuadrado integrable en  $[a, b]$ .
- c)  $\frac{f}{g}$  es de cuadrado integrable en  $[a, b]$ , si  $g \neq 0$  en  $[a, b]$ .

**Demostración**

a) Sean  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  y  $\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$  los conjuntos de puntos de  $[a, b]$  donde  $f$  y  $g$  son discontinuas respectivamente.

Consideremos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}\}$  un reordenamiento de  $\{c_1, c_2, \dots, c_n, d_1, d_2, \dots, d_m\}$  tal que  $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+m} \leq b$ .

Entonces,  $f \cdot g$  es continua en los subintervalos  $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n+m}, b)$  y, por lo tanto, también lo es  $|f \cdot g|^2$ . En consecuencia,

$$\int_a^{x_1} |f(x)g(x)|^2 dx < \infty, \int_{x_{n+m}}^b |f(x)g(x)|^2 dx < \infty \text{ y } \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)g(x)|^2 dx < \infty,$$

para  $k = 2, \dots, n + m$ .

De donde resulta



$$\int_a^b |f(x)g(x)|^2 dx = \int_a^{x_1} |f(x)g(x)|^2 dx + \sum_{k=2}^{n+m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)g(x)|^2 dx + \int_{x_{n+m}}^b |f(x)g(x)|^2 dx < \infty$$

$$b) \int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx + \int_a^b |g(x)|^2 dx .$$

Por la Proposición 5.2, se tiene  $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$  y  $\int_a^b |g(x)|^2 dx < \infty$ , mientras

que  $\int_a^b f(x)g(x) dx < \infty$  pues  $f \cdot g$  es continua por tramos.

Por lo tanto,  $\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx < \infty$

d) Es inmediato de a), pues  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$  y  $\frac{1}{g}$  es continua por tramos en  $[a, b]$ . ■

### **Observación**

En la Teoría de Lebesgue, las funciones de cuadrado integrable juegan un rol importante, razón por la cual se define el espacio de funciones  $L^2[a, b]$  por

$$L^2[a, b] = \{ f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} / f \text{ es medible Lebesgue y } \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \}.$$

Se puede demostrar que  $L^2[a, b]$  es un espacio vectorial normado, sobre el cual se deducen numerosos resultados del Análisis Real<sup>3</sup>.

### **Proposición 5.4**

Sea  $f$  integrable y periódica, de período  $T$ . Entonces

$$a) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt$$

$$b) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha-T}^{\beta-T} f(t) dt$$

### **Demostración**

Si hacemos la sustitución  $u = t + T$  y teniendo en cuenta que  $f$  tiene período  $T$ , resulta

<sup>3</sup> Norberto Fava, Felipe Zo. *Medida e Integral de Lebesgue*. 1ª Ed, Buenos Aires: Red Olímpica; 1996. Pág. 206

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(u-T) du = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f((u-T)+T) du = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(u) du$$

Puesto que cualquier símbolo puede representar la variable de integración, se tiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t) dt.$$

b) Si definimos  $u = t - T$  se obtiene

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha-T}^{\beta-T} f(u+T) du = \int_{\alpha-T}^{\beta-T} f(u) du \blacksquare$$

### **Proposición 5.5**

Si  $f$  es integrable y periódica, de período  $T$  y  $\alpha \in \mathfrak{R}$  entonces

$$\int_{\alpha-\frac{T}{2}}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

### **Demostración**

■ Si  $-T \leq \alpha \leq 0$  entonces

$$\int_{\alpha-\frac{T}{2}}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\alpha-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t) dt$$

Aplicando la Proposición 5.4 a) a la primera integral del segundo miembro de la ecuación anterior se tiene

$$\int_{\alpha-\frac{T}{2}}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\alpha+\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \int_{-\frac{T}{2}}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt.$$

■ Si  $\alpha > 0$ , tomemos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $-T \leq \alpha - kT \leq 0$ .

Luego, por la Proposición 5.4 b) y el resultado anterior se obtiene

$$\int_{\alpha-\frac{T}{2}}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\alpha+\frac{T}{2}-kT}^{\alpha+\frac{T}{2}-kT+T} f(t) dt = \int_{(\alpha-kT)-\frac{T}{2}}^{(\alpha-kT)+\frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

■ Si  $\alpha < -T$ , elegimos  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha + kT > 0$ .

Por la Proposición 5.4 a) y el resultado anterior se obtiene

$$\int_{\alpha - \frac{T}{2}}^{\alpha + \frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{\alpha - \frac{T}{2} + kT}^{\alpha + \frac{T}{2} + kT} f(t) dt = \int_{(\alpha + kT) - \frac{T}{2}}^{(\alpha + kT) + \frac{T}{2}} f(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

La siguiente Proposición permitirá escribir el intervalo de integración de los coeficientes de Fourier en términos de un intervalo simétrico centrado en el origen. ■

### **Proposición 5.6**

Sea  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función integrable en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Si  $a_n, n \geq 0$  y  $b_n, n \geq 1$  son los coeficientes de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$  entonces

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

### **Demostración**

Como  $f$  es periódica, de período  $T$ , la función  $f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  tiene también período  $T$ . Luego, si aplicamos la Proposición 5.5, con  $\alpha = \frac{a+b}{2}$  resulta

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2} + \frac{a+b}{2}}^{\frac{T}{2} + \frac{a+b}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}}^{\frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = a_n \cdot \blacksquare \end{aligned}$$

La demostración de la expresión de  $b_n$  es similar a la anterior. ■

### **Observación**

De la Proposición 5.6 se concluye que si  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función integrable en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ , la serie de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$  coincide con la serie de Fourier de  $f$  en  $[-T/2, T/2]$ . Es decir,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

Estas últimas expresiones serán útiles para el análisis de la convergencia de las series de Fourier. ■

**Proposición 5.7**

Sean m, n números enteros. Si  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  entonces

$$a) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) dt = 0, \text{ para } n \neq 0 \quad b) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) dt = 0$$

$$c) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$d) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ T/2 & m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$e) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{para todo valor de m y n.}$$

**Demostración:**

Las relaciones enunciadas se obtienen mediante cálculos elementales. ■

**Proposición 5.8**

Sea  $S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$  la suma de los  $(2k+1)$  primeros términos de la serie de Fourier de f en el intervalo  $[-T/2, T/2]$ , donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Si f es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$  entonces

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_k(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

**Demostración**

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_k(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (|f(t)|^2 - 2f(t)S_k(t) + |S_k(t)|^2) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt - \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) S_k(t) dt + \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S_k(t)|^2 dt \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) S_k(t) dt &= \frac{2}{T} \frac{a_0}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k a_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(nw_0 t) dt + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^k b_n \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(nw_0 t) dt \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k a_n^2 + \sum_{n=1}^k b_n^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) S_k(t) dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \quad (2)$$

Utilizando la Proposición 5.7 resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |S_k(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)) \right]^2 dt = \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \quad (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_k(t)|^2 dt &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) + \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### **Proposición 5.9**

Si  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$  y si  $a_n, n \geq 0$  y  $b_n, n \geq 1$  son los coeficientes de Fourier de  $f$  en dicho intervalo entonces

a)

$$\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \geq \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

b) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  es convergente.

c)  $\frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \geq \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ . Esta desigualdad se conoce como la

“Desigualdad de Bessel”.

### Demostración

a)

Pomo  $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_k(t)|^2 dt \geq 0$ , de la proposición 5.8 resulta

$$0 \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_k(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$$

Luego,

$$0 \leq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt - \frac{a_0^2}{4} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \text{ De esta desigualdad se obtiene}$$

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \geq \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2). \text{ Multiplicando miembro a miembro por 2}$$

$$\text{se tiene } \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \geq \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2).$$

b) Por el inciso a) sabemos que  $\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt$ . De aquí

resulta que la sucesión de sumas parciales  $\sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$  es monótona creciente y acotada superiormente y, por lo tanto, es convergente. Esto significa que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2)$  es convergente.

c) Se deduce inmediatamente de tomar  $\lim_{k \rightarrow \infty}$  en cada miembro de la desigualdad del inciso a). ■

### **Proposición 5.10**

Si  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones no negativas tales que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n^2 + d_n^2) = 0$

entonces

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2 = 0$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$$

### **Demostración**

a) Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n^2 + d_n^2) = 0$ ,  $\exists n_0 / \forall n \geq n_0$  se verifica  $|c_n^2 + d_n^2| < \varepsilon$

Por lo tanto,  $\forall n \geq n_0$  se tiene

$$|c_n^2| = c_n^2 \leq c_n^2 + d_n^2 = |c_n^2 + d_n^2| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |d_n^2| = d_n^2 \leq d_n^2 + c_n^2 = |d_n^2 + c_n^2| < \varepsilon$$

En consecuencia,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2 = 0$

b) Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = 0$ , dado  $\varepsilon_1 > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad |c_n^2| < \varepsilon_1$ .

En particular, tomemos  $\varepsilon_1 = \sqrt{\varepsilon}$ . Por lo tanto,  $\forall n \geq n_0$  resulta

$$|c_n| = \sqrt{|c_n^2|} < \sqrt{\varepsilon_1} = \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon. \text{ De donde resulta que } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

De manera similar se prueba que  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ . ■

### **Proposición 5.11**

Si  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$  y si  $a_n, n \geq 0$  y  $b_n, n \geq 1$  son los coeficientes de Fourier de  $f$  en dicho intervalo entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

### **Demostración:**

Por la Proposición 5.9 b) se sabe que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$  es convergente.

Luego, su término general tiende a cero. Es decir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0,$$

lo cual implica, por la Proposición 5.10 b) que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ . ■

### **Proposición 5.12**

Si  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$  y  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$  entonces

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n w_0 t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \operatorname{sen}(n w_0 t) dt = 0$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(nw_0 t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(nw_0 t) dt = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \cos(nw_0 t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^0 f(t) \sin(nw_0 t) dt = 0$$

Demostración:

a) Por la Proposición 5.11 y la definición de los coeficientes de Fourier en  $[-T/2, T/2]$  se tiene

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} a_n \\ b_n \end{cases} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \begin{cases} \cos(nw_0 t) \\ \sin(nw_0 t) \end{cases} dt$$

De donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \begin{cases} \cos(nw_0 t) \\ \sin(nw_0 t) \end{cases} dt = 0$$

b) Consideremos la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & 0 < t \leq T/2 \\ 0 & -T/2 < t \leq 0 \end{cases}$$

Entonces, como  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ ,  $f_E$  también lo es. Por el inciso a) se tiene

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_E(t) \cos(nw_0 t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 f_E(t) \cos(nw_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f_E(t) \cos(nw_0 t) dt \right] =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^0 0 \cos(nw_0 t) dt + \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(nw_0 t) dt \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(nw_0 t) dt$$

Las demás igualdades se prueban de manera similar. ■

La expresión de las sumas parciales de una serie de Fourier puede simplificarse notablemente si se formulan en términos del “núcleo de Dirichlet”, cuya definición es la siguiente:

**Definición 5.7: El núcleo de Dirichlet**

Si  $k \in \mathbb{N}$ , el “núcleo de Dirichlet” es la función definida por

$$D_k(x) = \frac{\sin \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) x \right]}{2 \sin \left( \frac{1}{2} x \right)}$$



Otra forma de expresar el núcleo de Dirichlet se indica en la siguiente Proposición:

**Proposición 5.13**

Si  $D_k(x)$  es el núcleo de Dirichlet entonces

a)

$$D_k(x) = \frac{\text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos[nx]$$

b) Si  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$  entonces

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)w_0x\right]}{2 \text{sen}\left(\frac{1}{2}w_0x\right)} dx = 1$$

**Demostración:**

Consideremos la función

$$F_k(x) = \frac{1}{2} + \cos[x] + \cos[2x] + \dots + \cos[kx]$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$2 \cos(A) \text{sen}(B) = \text{sen}(A + B) - \text{sen}(A - B)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) F_k(x) &= \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos[x] + 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos[2x] + \dots + 2 \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \cos[kx] \\ &= \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{3}{2}x\right) - \text{sen}\left(\frac{3}{2}x\right) + \text{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) - \dots - \text{sen}\left[\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right] + \text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right] = \\ &= \text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right] \end{aligned}$$

Luego,  $F_k(x) = \frac{\text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)}$  y por lo tanto,

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos[nx] = \frac{\text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)} = D_k(x)$$

b) Por el inciso a) y la Proposición 5.7 a) se tiene

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)w_0x\right]}{2 \text{sen}\left(\frac{1}{2}w_0x\right)} dx = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos[nw_0x] dx =$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{2} dx + \sum_{n=1}^k \int_{-T/2}^{T/2} \cos[nw_0x] dx = \frac{T}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)w_0x\right]}{2 \text{sen}\left(\frac{1}{2}w_0x\right)} dx = 1. \blacksquare$$

### **Proposición 5.14**

Sea  $S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nw_0t) + b_n \text{sen}(nw_0t))$  la suma de los  $(2k+1)$  primeros términos de la serie de Fourier de  $f$  en el intervalo  $[-T/2, T/2]$ , donde  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Entonces

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) D_k[w_0(x-t)] dx$$

### **Demostración**

De la definición de los coeficientes de Fourier se tiene

$$a_n \cos(nw_0t) + b_n \text{sen}(nw_0t) = \left[ \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(nw_0x) dx \right] \cos(nw_0t) + \left[ \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \text{sen}(nw_0x) dx \right] \text{sen}(nw_0t)$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) [\cos(nw_0x) \cos(nw_0t) + \text{sen}(nw_0x) \text{sen}(nw_0t)] dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) [\cos(nw_0(x-t))] dx$$

De esta manera,

$$S_k(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos(nw_0t) + b_n \text{sen}(nw_0t)) =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx + \sum_{n=1}^k \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos[nw_0(x-t)] dx =$$

$$= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \left\{ \frac{1}{2} + \cos[w_0(x-t)] + \cos[2w_0(x-t)] + \dots + \cos[kw_0(x-t)] \right\} dx$$

Si aplicamos la Proposición 5.13 a) se tiene

$$D_k(w_0(x-t)) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos [n w_0(x-t)] = \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0(x-t) \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0(x-t) \right]}$$

Por lo tanto,

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0(x-t) \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0(x-t) \right]} dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) D_k[w_0(x-t)] dx \quad \blacksquare$$

### **Proposición 5.15**

Sea  $f$  una función periódica, de período  $T$  y  $S_k(t)$  la suma de los  $(2k+1)$  primeros términos de la serie de Fourier de  $f$  en el intervalo  $[-T/2, T/2]$ . Entonces

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]} d\lambda$$

Donde  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

### **Demostración**

De la Proposición 5.14, sabemos que

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0(x-t) \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0(x-t) \right]} dx$$

Haciendo el cambio de variables  $\lambda = x - t$ , se obtiene

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}-t}^{\frac{T}{2}-t} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]} d\lambda \quad (1)$$

Ahora bien,

$$\frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]}$$

es una función periódica en la variable  $\lambda$ , con período  $T$ . Puesto que  $f(t + \lambda)$  es también periódica en la variable  $\lambda$ , con período  $T$ , el integrando de (1) es periódico en la variable  $\lambda$ , con período  $T$ . Entonces, por la Proposición 5.5 se puede expresar (1) como

$$S_k(t) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \operatorname{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]} d\lambda \quad \blacksquare$$

### Proposición 5.16

Sean  $t, k \in \mathfrak{R}$  ( $k \neq 0$ ) y  $f$  una función derivable por tramos en  $[-T/2, T/2]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Si  $g$  es la función definida por

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)} & 0 < \lambda \leq T/2 \\ \frac{f(t+\lambda) - f(t^-)}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)} & -T/2 \leq \lambda < 0 \end{cases}$$

Entonces

a) La función  $h(\lambda) = f(t + \lambda)$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ .

b)  $g$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$

### Demostración

a) Puesto que  $f$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ , de la Proposición 5.1 e) se deduce que  $f$  es también continua por tramos en  $[T/2 - k_0 T, T/2 + k_1 T]$   $\forall k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ . En particular, tomemos

$$k_0 \geq -\frac{t}{T}, \quad k_1 \geq \frac{t}{T}$$

En este caso,

$$[-T/2 + t, T/2 + t] \subset [-T/2 - k_0 T, T/2 + k_1 T]$$

Como  $\lambda + t \in [-T/2 + t, T/2 + t]$  si  $\lambda \in [-T/2, T/2]$ , resulta  $f(\lambda+t)$  continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ .

b) Del inciso a) se deduce que  $g$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2] - \{0\}$ . Sólo resta probar que existe  $g(0^+)$  y  $g(0^-)$ .

$$g(0^+) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} g(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{\lambda} \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)}$$

Puesto que, por la Proposición 5.1 j),  $f$  tiene derivada derecha en  $t$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{\lambda} = f_D(t)$$

Además, si aplicamos la Regla de L'Hospital,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{2k \cos(k \lambda)} = \frac{1}{2k}$$

De esta manera,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{\lambda} \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{\lambda} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen}(k \lambda)} = f_D(t) \frac{1}{2k}$$

Por lo tanto,

$$g(0^+) = f_D(t) \frac{1}{2k}$$

Análogamente se verifica que

$$g(0^-) = f_I(t) \frac{1}{2k}$$

Luego,  $g$  es continua por tramos en  $[-T/2, T/2]$ . ■

Ahora sí estamos en condiciones de probar el Teorema de convergencia de las series de Fourier. Fue demostrado por Dirichlet, en 1829. A partir de esa fecha, las series de Fourier se convirtieron en un paradigma en la resolución de numerosos problemas derivados de la Física. Si bien Dirichlet probó la convergencia para una función periódica, de período  $T$  y derivable por tramos en  $[-T/2, T/2]$ , en este trabajo extenderemos el Teorema al caso general de una función derivable por tramos en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ .

**Teorema 5.17: Teorema de Fourier o de Dirichlet**

Sea  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función derivable por tramos en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Sea  $S_f$  la serie de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$  definida por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) \right)$$

Donde  $a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt$  y  $b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt$

Si  $t \in \mathfrak{R}$  entonces

$$S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Demostración :

Tomemos  $t \in \mathfrak{R}$ . Como  $f$  es continua por tramos en  $[a, b]$ ,  $f$  resulta integrable en dicho intervalo y, por la Proposición 5.6, la serie de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$  coincide con la serie de Fourier de  $f$  en  $[-T/2, T/2]$ . Es decir,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(w_0 n t) + b_n \operatorname{sen}(w_0 n t))$$

Donde  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_0 n t) dt \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}(w_0 n t) dt$$

Por la Proposición 5.15 se tiene

$$\begin{aligned} S_f(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)w_0 \lambda\right]}{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}w_0 \lambda\right]} d\lambda = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)w_0 \lambda\right]}{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}w_0 \lambda\right]} d\lambda + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right)w_0 \lambda\right]}{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}w_0 \lambda\right]} d\lambda \quad (1) \end{aligned}$$

De la Proposición 5.13 b) se obtiene

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} w_0 \lambda \right)} d\lambda = 1 \quad (2)$$

Puesto que el integrando en (2) es par, resulta

$$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} w_0 \lambda \right)} d\lambda = \frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} w_0 \lambda \right)} d\lambda = \frac{1}{2} \quad (4)$$

De la Proposición 5.1 g) se deduce que  $f(t^+)$  y  $f(t^-)$  existen. Luego, si multiplicamos miembro a miembro (4) por  $f(t^+)$ , se tiene

$$\frac{1}{2} f(t^+) = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t^+) \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} w_0 \lambda \right)} d\lambda$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \text{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]} d\lambda - \frac{1}{2} f(t^+) &= \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(t+\lambda) - f(t^+)] \frac{\text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right]}{2 \text{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]} d\lambda &= \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \frac{[f(t+\lambda) - f(t^+)]}{2 \text{sen} \left[ \frac{1}{2} w_0 \lambda \right]} \text{sen} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) w_0 \lambda \right] d\lambda & \quad (5) \end{aligned}$$

Consideremos ahora la función

$$g(\lambda) = \begin{cases} \frac{f(t+\lambda) - f(t^+)}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} w_0 \lambda \right)} & 0 < \lambda \leq T/2 \\ \frac{f(t+\lambda) - f(t^-)}{2 \text{sen} \left( \frac{1}{2} w_0 \lambda \right)} & -T/2 \leq \lambda < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5) resulta

$$\begin{aligned}
 & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) w_0 \lambda\right]}{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right]} d\lambda - \frac{1}{2} f(t^+) = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) w_0 \lambda\right] d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) w_0 \lambda\right] d\lambda = \\
 & \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}\left[k w_0 \lambda + \frac{1}{2} w_0 \lambda\right] d\lambda = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \left[ \operatorname{sen}[k w_0 \lambda] \cos\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] + \cos[k w_0 \lambda] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] \right] d\lambda = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}[k w_0 \lambda] \cos\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] + g(\lambda) \cos[k w_0 \lambda] \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] d\lambda = \\
 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \cos\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] \operatorname{sen}[k w_0 \lambda] d\lambda + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] \cos[k w_0 \lambda] d\lambda
 \end{aligned}$$

Puesto que, por la Proposición 5.16 b),  $g(\lambda)$  es continua por tramos en el intervalo  $[-T/2, T/2]$ , las funciones

$$g(\lambda) \cos\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] \quad \text{y} \quad g(\lambda) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right]$$

también lo son  $[-T/2, T/2]$ . Luego, de la Proposición 5.12 b) resulta

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] \cos[k w_0 \lambda] d\lambda &= 0 \\
 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} g(\lambda) \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right] \cos[k w_0 \lambda] d\lambda &= 0
 \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) w_0 \lambda\right]}{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right]} d\lambda = \frac{1}{2} f(t^+) \quad (7)$$

Análogamente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 f(t+\lambda) \frac{\operatorname{sen}\left[\left(k + \frac{1}{2}\right) w_0 \lambda\right]}{2 \operatorname{sen}\left[\frac{1}{2} w_0 \lambda\right]} d\lambda = \frac{1}{2} f(t^-) \quad (8)$$

Luego, reemplazando (7) y (8) en (1) se obtiene

$$S_f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \frac{1}{2} [f(t^+) + f(t^-)] \quad \blacksquare$$

 **Observación**

El Teorema de Fourier afirma que, si una función  $f$  es derivable por tramos y periódica, su serie de Fourier converge puntualmente sobre  $\mathfrak{X}$  al promedio de los límites laterales de  $f$ . Pero, ¿en qué casos convergerá a  $f$ ? La respuesta se enuncia en el siguiente Corolario.

**Corolario 5.18:**

Sea  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  una función continua  $\forall t \in \mathfrak{X}$ , derivable por tramos en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Sea  $S_f$  es la serie de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$ .  
Si  $t \in \mathfrak{X}$  entonces

$$S_f(t) = f(t).$$

**Demostración:**

Como  $f$  es continua en  $t$ ,  $f(t^+) = f(t^-) = f(t)$ . Luego, por el Teorema 5.17 se deduce que  $S_f(t) = f(t)$ . ■

Podemos elaborar la siguiente conclusión:

Si  $f$  es una función derivable por tramos en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . entonces

- Si  $f$  es continua en  $t_0$ , su serie de Fourier coincide con  $f$  en  $t_0$ , es decir,

$$S_f(t_0) = f(t_0).$$

- Si  $f$  no es continua en  $t_0$ , su serie de Fourier es igual al promedio de los límites laterales de  $f$  en  $t_0$ . Es decir,

$$S_f(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

**Ejemplo 5.4**

Dada la función periódica  $f(x) = \begin{cases} -(-x-2)^2 & -3 < x < 0 \\ (x-2)^2 & 0 \leq x < 3 \end{cases}$ ,  $f(x+6) = f(x)$

- Graficar  $f$  en el intervalo  $[-9, 9]$
- Hallar los coeficientes de la Serie de Fourier asociada a  $f$ .
- Representar gráficamente la quinta y vigésima suma parcial de la Serie de Fourier.

**Resolución**

a) En este caso, la función tiene período  $T = 6$  y es continua por tramos en  $[a, b]$ , donde  $a = -3$  y  $b = 3$ . Graficaremos la función utilizando el Mathematica. Escribimos entonces los siguientes comandos:

**T = 6;**

**a = -3;**

**b = 3;**

**f[x\_] = Which[-3 < x < 0, -(-x-2)^2, 0 ≤ x < 3, (x-2)^2];**

**k[x\_] = Which[ $\frac{x-b}{T} \leq 0$ , IntegerPart[ $\frac{x-b}{T}$ ], True, IntegerPart[ $\frac{x-a}{T}$ ]];**

**Plot[f[x - T k[x]], {x, -9, 9}];**



Al ejecutarlos, se obtiene la siguiente gráfica:

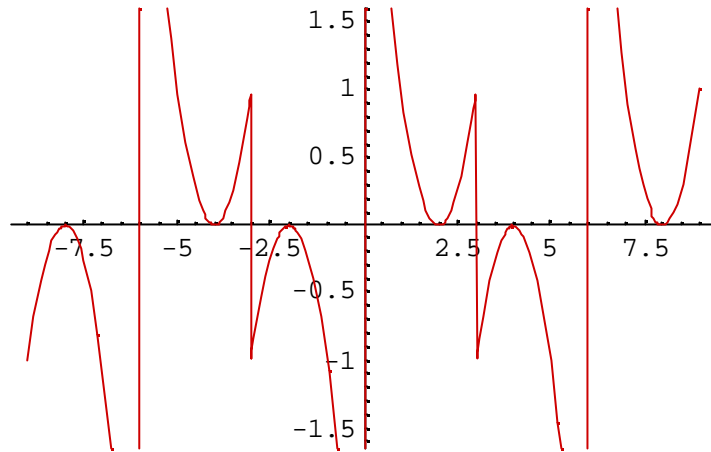


Figura : Gráfica de  $f$  en el intervalo  $[-9, 9]$ .

b) La serie de Fourier asociada a  $f$  es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \right]$$

Donde

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin\left(\frac{2n\pi x}{b-a}\right) dx$$

Para calcular los coeficientes de Fourier, se ejecutan los comandos:

$$A[n_] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^0 (-x-2)^2 \cos\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] dx + \int_0^b (x-2)^2 \cos\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] dx \right);$$

$$B[n_] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^0 (-x-2)^2 \sin\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] dx + \int_0^b (x-2)^2 \sin\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] dx \right);$$

c) Definimos las funciones  $g$  y  $h$  considerando, respectivamente, la quinta y vigésima suma parcial de la Serie de Fourier. Luego se escriben los comandos para graficar ambas funciones:

$$g[x_] = \sum_{n=1}^5 A[n] \cos\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] + B[n] \sin\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right];$$

$$h[x_] = \sum_{n=1}^{20} A[n] \cos\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] + B[n] \sin\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right];$$

`Plot[{g[x], h[x]}, {x, -9, 9}]`

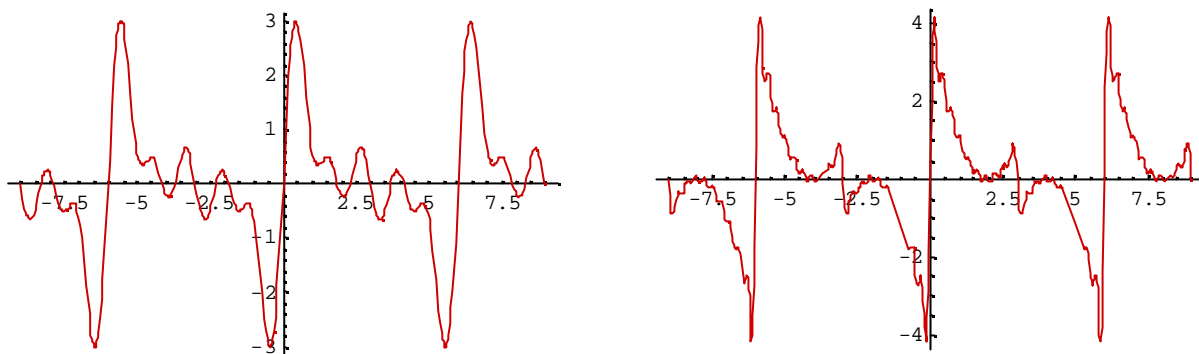


Figura : Izquierda: gráfica de g. Derecha: gráfica de h.

En la figura anterior se observa que, a medida que se agregan más términos a la suma parcial de la serie, su gráfica se parece cada vez más a la gráfica de f. Este resultado corrobora la convergencia de la serie de Fourier a la función f. ■

Las series de Fourier se utilizan también para hallar el valor de ciertas series numéricas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

### **Ejemplo 5.5**

Dada la función periódica:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}, \quad f(x+2) = f(x)$$

- Calcular la Serie de Fourier asociada a f.
- Graficar f en el intervalo (-2, 4)?
- Graficar la Serie de Fourier en el intervalo (-2, 4)
- Evaluando la Serie de Fourier en x = 0 calcule el valor de la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

**Resolución:**

a) Primeramente calcularemos los coeficientes de Fourier. En este caso, a = 0, b = 2 y T = 2. Ejecutamos los comandos:

**Clear [ f, a, b, T, k, A, B ]**

**T = 2 ;**

**a = 0 ;**

**b = 2 ;**

$$A[0] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^1 (1+x) dx + \int_1^b 4 dx \right);$$

$$A[n_] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^1 (1+x) \cos \left[ \frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx + \int_1^b 4 \cos \left[ \frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx \right);$$

$$B[n_] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^1 (1+x) \sin \left[ \frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx + \int_1^b 4 \sin \left[ \frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx \right);$$

Se obtienen los siguientes resultados:

$$a_0 = \frac{11}{2}, \quad a_n = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}, \quad b_n = \frac{-3 + 2(-1)^n}{n \pi}$$

Por lo tanto,

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] + b_n \sin\left[\frac{2n\pi x}{b-a}\right] \right] =$$

$$= \frac{11}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cos[n\pi x] + \frac{-3 + 2(-1)^n}{n \pi} \sin[n\pi x] \right]$$

En consecuencia,

$$\boxed{S_f(x) = \frac{11}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \cos[n\pi x] + \frac{-3 + 2(-1)^n}{n \pi} \sin[n\pi x] \right]} \quad (1)$$

b) Escribimos las siguientes instrucciones:

`f [ x_ ] = Which [ 0 < x < 1 , 1 + x , 1 ≤ x < 2 , 4 ] ;`

`k[x_] = Which [  $\frac{x-b}{T} \leq 0$  , IntegerPart [  $\frac{x-b}{T}$  ] , True , IntegerPart [  $\frac{x-a}{T}$  ] ] ;`

`Plot [ f [ x - T k [ x ] ] , { x , - 2 , 4 } ] ;`

Se obtiene la siguiente gráfica:

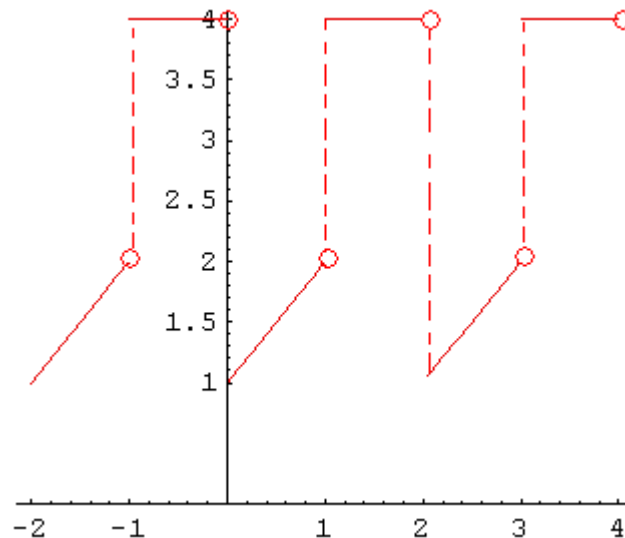


Figura : Gráfica de f en (-2, 4).

c) Por el Teorema de Fourier, resulta

$$S_f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Los puntos de discontinuidad de f en (-2, 4) son  $x = -1, 0, 1, 2, 3$ .

Calculemos los límites laterales en dichos puntos:

$$\begin{array}{ll} f_l(-1^-) = 2 & f_D(-1^+) = 4 \\ f_l(0^-) = 4 & f_D(0^+) = 1 \\ f_l(1^-) = 2 & f_D(1^+) = 4 \\ f_l(2^-) = 4 & f_D(2^+) = 1 \\ f_l(3^-) = 2 & f_D(3^+) = 4 \end{array}$$

Por lo tanto, en el intervalo (-2, 4) se verifica

$$S_f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3 \\ 2.5 & \text{si } x = 0 \vee x = 2 \\ f(x) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2)$$

La gráfica de la serie de Fourier es entonces la siguiente:

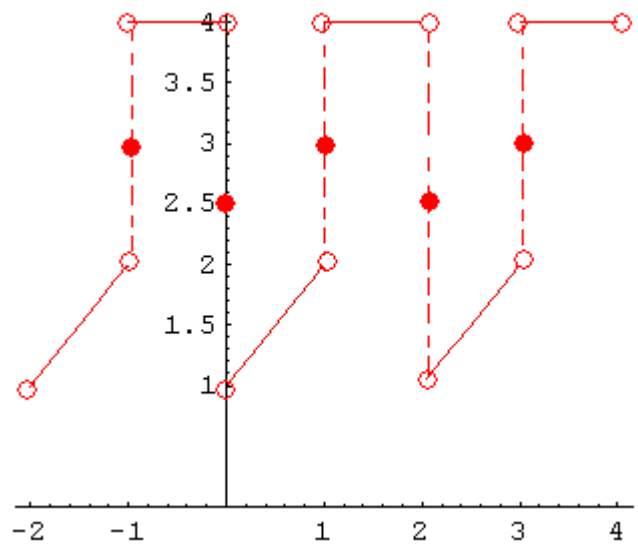


Figura : Gráfica de la serie de Fourier de f en (-2, 4)

d) De la expresión (2) se obtiene

$$S_f(0) = 2.5$$

Reemplazando la expresión (2) en esta ecuación resulta

$$\frac{11}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} = 2.5$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} = 2.5 - \frac{11}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{4} \blacksquare$$

El Teorema de convergencia de Fourier nos asegura que, bajo ciertas hipótesis, la serie de Fourier converge puntualmente a f. Pero ¿en qué casos converge uniformemente? La respuesta está formulada en el siguiente Teorema:

**Teorema 5.19: Convergencia uniforme de la serie de Fourier.**  
 Sea  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua  $\forall t \in \mathfrak{R}$  y periódica, de período  $T = b - a$ , con  $f'$  derivable por tramos en  $[a, b]$ . Entonces la serie de Fourier de f en  $[a, b]$  converge uniformemente a f sobre  $\mathfrak{R}$

Demostración:

Representaremos los coeficientes de Fourier de  $f$  con letras minúsculas y los de  $f'$  con letras mayúsculas. Entonces, teniendo en cuenta que  $f$  es periódica,

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) dt = \frac{2}{T} (f(T/2) - f(-T/2)) = \frac{2}{T} (f(T/2) - f(-T/2 + T)) = 0$$

Si integramos por partes, obtenemos la siguiente expresión de  $A_n$ , para  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left( f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2n\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \right) \\ &= \frac{2}{T} \left( f(T/2) \cos(n\pi) - f(-T/2) \cos(-n\pi) + \frac{2n\pi}{T} b_n \right) = \frac{2}{T} \left( 0 + \frac{2n\pi}{T} b_n \right) = \frac{4n\pi}{T^2} b_n \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A_n = \frac{4n\pi}{T^2} b_n, \quad n \geq 1 \quad (1)$$

De manera similar se demuestra

$$B_n = \frac{4n\pi}{T^2} a_n, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

Por otro lado,

$$0 \leq \left( |A_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = A_n^2 - \frac{2}{n} |A_n| + \frac{1}{n^2}$$

De donde

$$\frac{1}{n} |A_n| \leq \frac{1}{2} A_n^2 + \frac{1}{2n^2} \quad (3)$$

Análogamente se prueba que

$$\frac{1}{n} |B_n| \leq \frac{1}{2} B_n^2 + \frac{1}{2n^2} \quad (4)$$

Sumando miembro a miembro (3) y (4) resulta

$$\frac{1}{n} |A_n| + \frac{1}{n} |B_n| \leq \frac{1}{2} (A_n^2 + B_n^2) + \frac{1}{n^2}$$

Reemplazando (1) y (2) en esta última desigualdad se tiene

$$\frac{4\pi}{T^2} |a_n| + \frac{4\pi}{T^2} |b_n| \leq \frac{1}{2} (A_n^2 + B_n^2) + \frac{1}{n^2}$$

Luego,

$$|a_n| + |b_n| \leq \frac{T^2}{8\pi} (A_n^2 + B_n^2) + \frac{T^2}{4\pi} \frac{1}{n^2}$$

Ahora, la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge, y también  $\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2)$  converge, debido a la aplicación de la Proposición 5.9 b) a los coeficientes de Fourier de  $f'$ . Por el Criterio de Comparación de series numéricas, resulta que  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  también converge.

Pero,  $\forall t \in \mathfrak{R}$  se verifica

$$\left| a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right| \leq |a_n| + |b_n|$$

Aplicando el Teorema de Weierstrass<sup>4</sup> para series de funciones, resulta que la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente en  $\mathfrak{X}$ . Finalmente, por el Teorema 5.17, la serie de Fourier converge a  $f$ , lo que completa la demostración.

## 5.2 El fenómeno de Gibbs

A comienzos del siglo pasado el físico Michelson Morley probó un aparato mecánico que había inventado para calcular los coeficientes de Fourier y construir las sumas parciales de una serie de Fourier.

En una prueba usó 80 coeficientes de Fourier para la siguiente función periódica:

$$f(x) = x \quad \text{para } -\pi < x \leq \pi, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

La máquina respondió con una gráfica que tenía saltos inesperados en los extremos  $\pi$ ,  $-\pi$  y sus correspondientes múltiplos impares. Lo que Michelson observó lo comprobaremos con el Mathematica, ejecutando los siguientes comandos:

Primeramente graficamos  $f$  en el intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$ :

$T = 2\pi$ ;

$a = -\pi$ ;

$b = \pi$ ;

$f[x_] = x$ ;

$k[x_] = \text{Which} \left[ \frac{x-b}{T} \leq 0, \text{IntegerPart} \left[ \frac{x-b}{T} \right], \text{True}, \text{IntegerPart} \left[ \frac{x-a}{T} \right] \right]$ ;

$\text{Plot} [f[x - T k[x]], \{x, -3\pi, 3\pi\}]$ ;

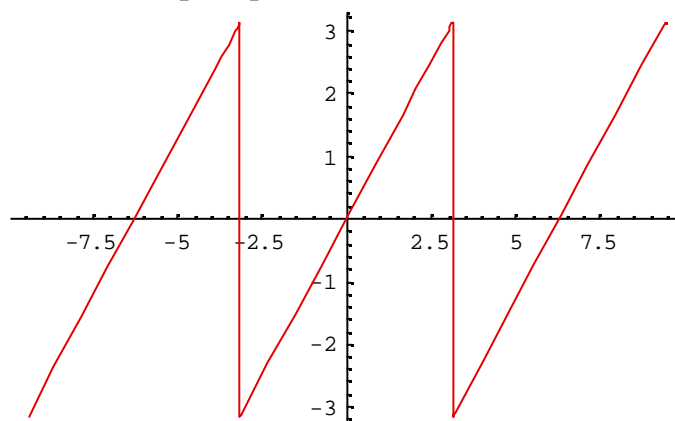


Figura: Gráfica de  $f$  en  $[-3\pi, 3\pi]$ . Es conocida como "la onda diente de sierra".

<sup>4</sup> Teorema de Weierstrass: Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones definidas sobre un conjunto  $A$  y  $\{M_n\}$  una sucesión de números tales que  $|f_n(x)| \leq M_n$  para todo  $x$  de  $A$ . Supóngase, además, que  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  que converja. Entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge uniformemente sobre  $A$ .

A continuación calculamos los coeficientes de Fourier:

$$A[0] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^b f[x] dx \right);$$

$$A[n] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^b f[x] \cos \left[ \frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx \right);$$

$$B[n] = \frac{2}{b-a} \left( \int_a^b f[x] \sin \left[ \frac{2n\pi x}{b-a} \right] dx \right);$$

Finalmente hallamos y graficamos en el intervalo  $[-3\pi, 3\pi]$  las funciones  $S_{10}$ ,  $S_{20}$  y  $S_{80}$  que representan, respectivamente, las 10, 20 y 80 sumas parciales de la serie de Fourier:

$$S_{10}[x] = \frac{A[0]}{2} + \sum_{n=1}^{10} \left( A[n] \cos \left[ \frac{2\pi n x}{b-a} \right] + B[n] \sin \left[ \frac{2\pi n x}{b-a} \right] \right)$$

Plot [  $S_{10}[x]$  , {  $x$ ,  $-3\pi$  ,  $3\pi$  } ];

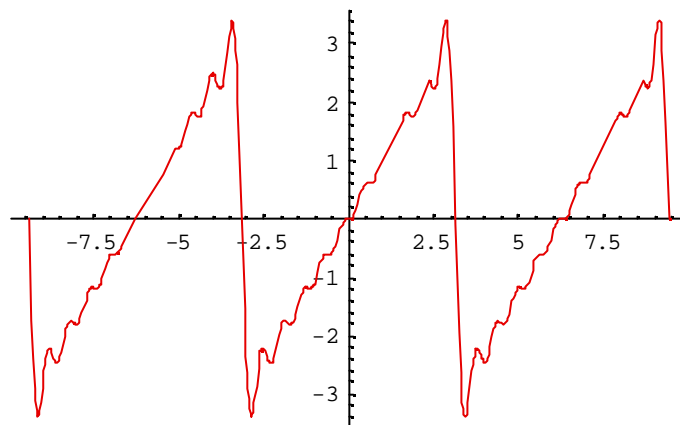


Figura: Gráfica de la décima suma parcial de la serie de Fourier de f en  $(-3\pi, 3\pi)$

$$S_{20}[x] = \frac{A[0]}{2} + \sum_{n=1}^{20} \left( A[n] \cos \left[ \frac{2\pi n x}{b-a} \right] + B[n] \sin \left[ \frac{2\pi n x}{b-a} \right] \right)$$

Plot [  $S_{20}[x]$  , {  $x$ ,  $-3\pi$  ,  $3\pi$  } ];

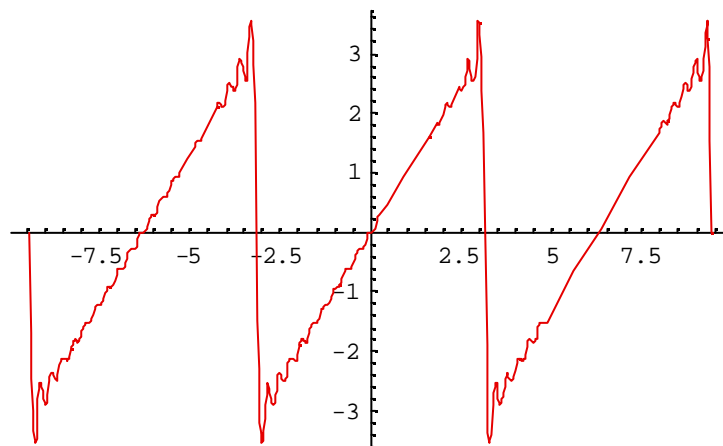


Figura: Gráfica de la vigésima suma parcial de la serie de Fourier de f en  $[-3\pi, 3\pi]$

$$S_{80}[x] = \frac{A[0]}{2} + \sum_{n=1}^{80} \left( A[n] \cos\left[\frac{2\pi n x}{b-a}\right] + B[n] \sin\left[\frac{2\pi n x}{b-a}\right] \right)$$

Plot [ S80[ x ] , { x , - 3 p , 3 p } ] ;

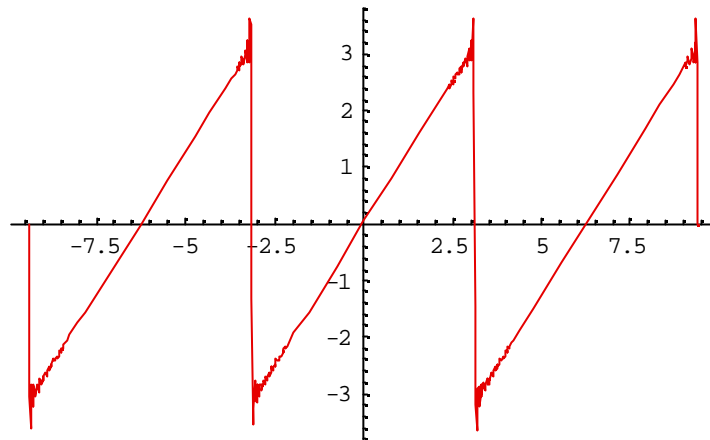


Figura: Gráfica de la octogésima suma parcial de la serie de Fourier de  $f$  en  $[-3p, 3p]$

Gráficamente verificamos que  $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x) = f(x)$  pero, en las cercanías de los puntos de discontinuidad de  $f$ , las sumas parciales de la serie de Fourier presentan oscilaciones que no desaparecen a pesar de incrementar los términos de las sumas parciales.

Al principio Michelson supuso que había algún problema con su máquina. Sin embargo, con el tiempo, se encontró que este comportamiento es característico de la serie de Fourier en los puntos donde la función tiene una discontinuidad no evitable.

Este hecho se conoce como “el Fenómeno de Gibbs” debido al matemático Willard Gibbs (1839-1903), quien fue el primero que lo definió y explicó satisfactoriamente.

Intuitivamente, como la suma parcial  $S_k(x)$  se acerca a  $f(x)$  conforme  $k \rightarrow \infty$ , podemos esperar que estas oscilaciones se achaten y se hagan pequeñas conforme  $k$  crece. Sin embargo no es así. En cambio, éstas mantienen la misma amplitud, pero se producen más cerca de los puntos de discontinuidad a medida que  $k$  crece. Las sumas parciales sí tienen como límite a la función, pero no exactamente como los matemáticos esperaban.



## 5.3 Series de Fourier para funciones no periódicas

Hasta ahora hemos analizado la convergencia de la serie de Fourier para una función periódica pero ¿qué ocurre si la función no es periódica? ¿Podrá aplicarse el Teorema de Fourier para estos casos? Afortunadamente la respuesta es afirmativa, gracias a que es posible extender el Teorema a funciones cuyo dominio está contenido en un intervalo de extremos finitos. Veamos cómo hacerlo:

Consideremos una función  $f: D \subset [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  derivable por tramos en  $[a, b]$ . Primeramente definiremos la función  $k(t)$  que asigna, a cada  $t \in \mathfrak{R}$ , un entero comprendido en el intervalo  $\left[ \frac{t-b}{T}, \frac{t-a}{T} \right]$ , con  $T = b - a$ . Más específicamente,

$$k(t) = \begin{cases} \text{int} \left[ \frac{t-b}{T} \right] & \text{si } t \leq b \\ \text{int} \left[ \frac{t-a}{T} \right] & \text{si } t > b \end{cases}$$

Donde  $\text{int} [x]$  es la parte entera del número  $x$ . Las siguientes propiedades de la función "parte entera" serán utilizadas en esta sección:

- $[-x] = -[x]$
- Si  $x > 0$ ,  $[1 + x] = 1 + [x]$
- Si  $x < -1$ ,  $[1 + x] = 1 + [x]$

Ahora disfrazaremos la función  $f$  de periódica, extendiéndola a la recta real, como se indica a continuación:

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in (a, b) \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin (a, b) \wedge t - k(t)T \in \text{Dom}(f) - \{a, b\} \end{cases}$$

Así, la función  $k(t)$  obligará a que  $t - k(t)T$  caiga en el intervalo  $(a, b)$ . Las siguientes figuras ilustran gráficamente cómo extender la función  $f$ :

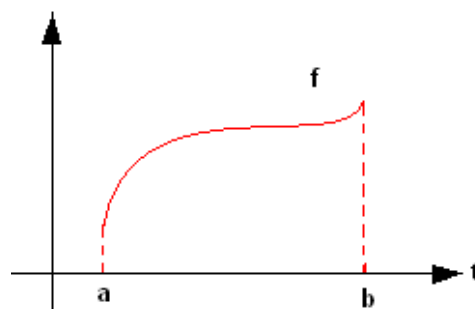
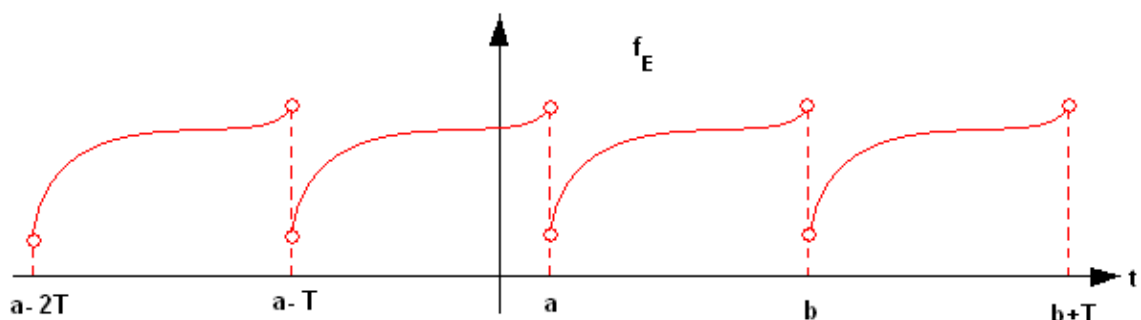


Figura: Gráfica de  $f$  en  $[a, b]$

9



En la siguiente Proposición demostraremos que  $f_E$  es periódica.

**Proposición 5.20**

Sea  $f: D \subset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función con dominio  $D$ . Entonces la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in (a, b) \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin (a, b) \wedge t - k(t)T \in \text{Dom}(f) - \{a, b\} \end{cases}$$

es periódica, de período  $T = b - a$ .

**Demostración**

Sea  $t \in \text{Dom}(f_E)$ ; consideraremos los casos en que  $a < t < b$ ,  $t < a$  y  $t > b$ .

- Si  $a < t < b$ , entonces  $t + T > b$ ; luego

$$f_E(t + T) = f\left(t + T - \left[\frac{t + T - a}{T}\right]T\right) = f\left(t + T - \left[1 + \frac{t - a}{T}\right]T\right)$$

Como  $0 < \frac{t - a}{T} < 1$  resulta  $\left[1 + \frac{t - a}{T}\right] = 1 + \left[\frac{t - a}{T}\right] = 1 + 0 = 1$ . Por lo tanto,

$$f_E(t + T) = f(t + T - T) = f(t) = f_E(t).$$

- Si  $t < a$ , entonces  $t + T < b$ . En este caso se presentan dos situaciones:

- 1) Si  $a < t + T$  se tiene  $f_E(t + T) = f(t + T)$

Por otro lado,  $f_E(t) = f\left(t - \left[\frac{t - b}{T}\right]T\right)$

Como  $-2 < \frac{t - b}{T} < -1$  resulta  $\left[\frac{t - b}{T}\right] = -1$ . En consecuencia,

$$f_E(t) = f(t - (-1)T) = f(t + T). \text{ Luego, } f_E(t + T) = f_E(t)$$

- 2) Si  $t + T < a$  se tiene

$$f_E(t + T) = f\left(t + T - \left[\frac{t + T - b}{T}\right]T\right) = f\left(t + T - \left[1 + \frac{t - b}{T}\right]T\right)$$

Como  $\frac{t - b}{T} < -1$  resulta  $\left[1 + \frac{t - b}{T}\right] = 1 + \left[\frac{t - b}{T}\right]$ . Por lo tanto,

$$f_E(t + T) = f\left(t + T - \left(1 + \left[\frac{t - b}{T}\right]\right)T\right) = f\left(t + T - T - \left[\frac{t - b}{T}\right]T\right) = f\left(t - \left[\frac{t - b}{T}\right]T\right) = f_E(t)$$

- Si  $t > b$  entonces  $t + T > b$ ; en este caso,

$$f_E(t + T) = f\left(t + T - \left[\frac{t + T - a}{T}\right]T\right) = f\left(t + T - \left[1 + \frac{t - a}{T}\right]T\right)$$

Como  $\frac{t - a}{T} > 1$  resulta  $\left[1 + \frac{t - a}{T}\right] = 1 + \left[\frac{t - a}{T}\right]$ . Por lo tanto,

$$f_E(t + T) = f\left(t + T - \left[1 + \frac{t - a}{T}\right]T\right) = f\left(t + T - T - \left[\frac{t - a}{T}\right]T\right) = f\left(t - \left[\frac{t - a}{T}\right]T\right) = f_E(t) \blacksquare$$

Ahora estamos en condiciones de formular el Teorema de Fourier para funciones no periódicas.

**Teorema 5.21: Teorema de Fourier para funciones no periódicas**

Sea  $f: D \subset [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  una función derivable por tramos en  $[a, b]$ , con  $a, b \in \mathfrak{R}$ .  
 Sea  $S_f$  la serie de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$ . Si  $t \in (a, b)$  entonces

$$S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

Demostración:

Definimos  $T = b - a$  y consideramos la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in (a, b) \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin (a, b) \wedge t - k(t)T \in \text{Dom}(f) - \{a, b\} \end{cases}$$

Por la Proposición 5.20,  $f_E$  es periódica, de período  $T = b - a$ . Además, es derivable por tramos en  $[a, b]$  pues  $f$  lo es. Si aplicamos el Teorema 5.17 a  $f_E$  resulta, si  $t \in \mathfrak{R}$ ,

$$S_{f_E}(t) = \frac{f_E(t^+) + f_E(t^-)}{2}$$

Como  $S_{f_E}(t) = S_f(t)$  y  $\forall t \in (a, b)$   $f_E(t) = f(t)$  se obtiene  $S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$  para  $t \in (a, b)$ . ■

Nos planteamos ahora si una función  $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  que es continua y derivable por tramos podrá ser expresada como serie de Fourier. Pues bien, si extendemos la función  $f$  a la recta real como sigue:

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}$$

Obtendríamos una función periódica que debería ser continua, a fin de aplicar el Corolario 5.18 a esta nueva función. Por esta razón necesitaríamos la hipótesis adicional de que  $f(a) = f(b)$ . Las siguientes figuras ilustran esta situación:

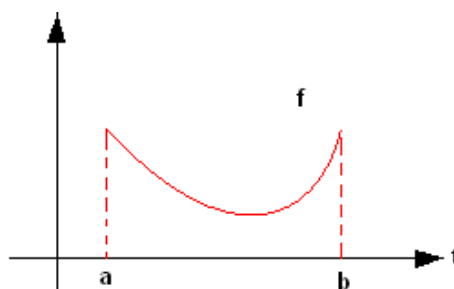


Figura: Gráfica de una función  $f$  continua en  $[a, b]$  con  $f(a) = f(b)$ .

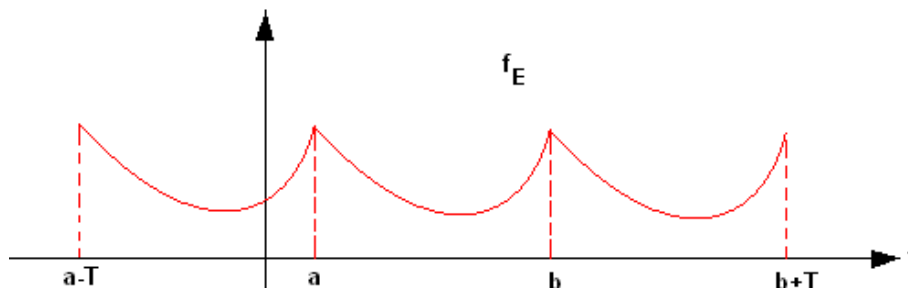


Figura: Gráfica de  $f_E$  en  $\mathfrak{R}$

En la siguiente Proposición probaremos que, bajo estas condiciones, la función extendida  $f_E$  resulta periódica y continua.

**Proposición 5.22**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y tal que  $f(a) = f(b)$ . Consideremos la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}$$

Entonces

- a)  $f_E$  es periódica, de período  $T = b - a$ .
- b)  $f_E$  es continua  $\forall t \in \mathfrak{R}$ .

**Demostración:**

a) Sólo verificaremos la periodicidad para los puntos de la forma  $t = a + mT$  y  $t = b + mT$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , pues la comprobación para los demás valores de  $t$  es similar a la demostrada en la Proposición 5.20.

- Si  $m = 1$   
 $f_E(a + mT) = f_E(a + b - a) = f_E(b) = f(b) = f(a) = f_E(a)$ .
- Si  $m > 1$

$$f_E(a + mT) = f\left(a + mT - \left[\frac{a + mT - a}{T}\right]T\right) = f(a + mT - mT) = f(a) = f_E(a)$$

- Si  $m < 0$

$$\begin{aligned} f_E(a + mT) &= f\left(a + mT - \left[\frac{a + mT - b}{T}\right]T\right) = f\left(a + mT - \left[\frac{mT - T}{T}\right]T\right) = \\ &= f(a + mT - (m - 1)T) = f(a + T) = f(a + b - a) = f(b) = f(a) = f_E(a) \end{aligned}$$

La demostración para los puntos  $t = b + mT$  con  $m \in \mathbb{Z}$  es análoga a la anterior.

- b) ■ Si  $t_0 \in (a, b)$  entonces, como  $f$  es continua en  $(a, b)$ , se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_E(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0) = f_E(t_0)$$

- Si  $t_0 \notin (a, b) \wedge t_0 \neq a + mT \wedge t_0 \neq b + mT$  con  $m \in \mathbb{Z}$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_E(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t - k(t)T).$$

Como la función  $k(x)$  es continua  $\forall x \notin \mathbb{Z}$  se tiene que  $k(t)$  es continua en  $t_0$ . Además,  $t - k(t)T \in (a, b)$  y, por ser  $f$  continua en  $(a, b)$  resulta

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t - k(t)T) = f(t_0 - k(t_0)T) = f_E(t_0). \text{ Por lo tanto, } \lim_{t \rightarrow t_0} f_E(t) = f_E(t_0)$$

- Si  $t_0 = a + mT$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , calcularemos los límites laterales y verificaremos que sean iguales. Teniendo en cuenta que  $f$  y  $f_E$  son periódicas resulta

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^-} f_E(t) &= \lim_{t \rightarrow (a+mT)^-} f_E(t) = \lim_{t-mT \rightarrow a^-} f_E(t) = \lim_{t-mT \rightarrow a^-} f_E(t-mT) = \lim_{u \rightarrow a^-} f_E(u) = \\ &= \lim_{u \rightarrow a^-} f_E(u+T) = \lim_{u \rightarrow a^-} f_E(u+b-a) = \lim_{u+b-a \rightarrow b^-} f_E(u+b-a) = \lim_{w \rightarrow b^-} f_E(w) = \\ &= \lim_{w \rightarrow b^-} f(w) = f(b) = f(a) = f_E(a) = f_E(a+mT) = f_E(t_0) \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} f_E(t) &= \lim_{t \rightarrow (a+mT)^+} f_E(t) = \lim_{t-mT \rightarrow a^+} f_E(t) = \lim_{t-mT \rightarrow a^+} f_E(t-mT) = \lim_{u \rightarrow a^+} f_E(u) = \\ &= \lim_{u \rightarrow a^+} f(u) = f(a) = f_E(a) = f_E(a+mT) = f_E(t_0) \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} f_E(t) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f_E(t) = f_E(t_0)$$

- Si  $t_0 = b + mT$  con  $m \in \mathbb{Z}$ , la demostración es análoga al caso anterior. ■

A continuación enunciaremos el siguiente Corolario, el equivalente al Corolario 5.18 para funciones no periódicas:

**Corolario 5.23:**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua, derivable por tramos en  $[a, b]$  y tal que  $f(a) = f(b)$ . Sea  $S_f$  es la serie de Fourier de  $f$  en  $[a, b]$ . Si  $t \in [a, b]$  entonces

$$S_f(t) = f(t).$$

Demostración:

Definimos  $T = b - a$  y la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases}$$

Por la Proposición 5.22  $f_E$  es una función periódica, de período  $T = b - a$  y continua  $\forall t \in \mathfrak{R}$ . Además, es derivable por tramos en  $[a, b]$  pues  $f$  lo es. Luego, si aplicamos el Corolario 5.18 a  $f_E$  se tiene  $S_{f_E}(t) = f_E(t)$  para  $t \in \mathfrak{R}$ .

Como  $S_{f_E}(t) = S_f(t)$  y  $\forall t \in [a, b]$   $f_E(t) = f(t)$  resulta  $S_f(t) = f(t)$  para  $t \in [a, b]$ . ■

## 5.4 Integración y diferenciación de Series de Fourier

Es sabido que las sumas infinitas no siempre se comportan como sumas finitas. Por ejemplo, la propiedad aditiva de la derivada y de la integral son válidas para una suma finita de funciones, pero ¿podremos derivar e integrar término a término una suma infinita de funciones? En algunas situaciones esto es factible, como es el caso de las series de potencias. Más específicamente, si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{con } a_n, x_0 \in \mathfrak{R}$$

entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n (x - x_0)^n \\ \int f(x) dx &= \int \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n dx \end{aligned}$$

Pero ¿se podrán derivar e integrar término a término las series de Fourier, tal como ocurre con las series de potencias? Estas propiedades son sumamente importantes pues, en caso de verificarse, las series de Fourier se podrían utilizar en la resolución de ecuaciones diferenciales. Desafortunadamente esto no siempre es posible y generalmente la diferenciación término a término de series de Fourier puede conducir a resultados absurdos aun para funciones que tengan un comportamiento extremadamente bueno, como veremos en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 5.6**

- a) Demostrar que si  $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} c_n = 0$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ .
- b) Si  $x_0 \in (0, 1)$ , probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n x_0) \neq 0$
- c) Dada la función periódica  $f(x) = x$  para  $-\pi < x < \pi$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Probar que, si  $x \in (0, 1)$ , la serie de Fourier de  $f$  no puede derivarse término a término.

**Resolución:**

- a) Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} c_n = 0$ , dado  $\varepsilon > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0$  se verifica

$$|(-1)^{n+1} c_n| < \varepsilon$$

Por lo tanto,  $\forall n \geq n_0$  se tiene

$$|c_n| = |(-1)^{n+1} c_n| < \varepsilon. \text{ En consecuencia, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$$

- b) Supongamos por el absurdo que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n x_0) = 0$ . Entonces,

Dado  $\varepsilon > 0 \exists n_0 / \forall n \geq n_0$  se verifica  $|\cos(n x_0)| < \varepsilon$

En particular, tomemos  $\varepsilon = 1/4$  y un número natural  $k$  tal que

$$n_0 < \frac{2k\pi}{x_0}$$

Por otro lado, como  $0 < x_0 < 1$ , el intervalo  $\left[ \frac{2k\pi}{x_0}, \frac{2k\pi}{x_0} + \frac{\pi}{3x_0} \right]$  tiene longitud mayor que 1. Luego, existe un número natural  $n_1$  tal que

$$\frac{2k\pi}{x_0} \leq n_1 \leq \frac{2k\pi}{x_0} + \frac{\pi}{3x_0}$$

Como  $n_1 > n_0$  resulta  $|\cos(n_1 x_0)| < \varepsilon = 1/4$ . Es decir,

$$-1/4 < \cos(n_1 x_0) < 1/4 \quad (1)$$

Pero en el intervalo  $\left[ 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right]$  la función coseno es decreciente y,

debido a que  $n_1 x_0 \in \left[ 2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{3} \right]$  resulta

$$\cos(n_1 x_0) \geq \cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad (2)$$

De (1) y (2) se obtiene

$$\frac{1}{4} > \cos(n_1 x_0) \geq \frac{1}{2}$$

Lo cual es una contradicción.

c) La serie de Fourier de  $f$  es  $S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(n x)$  que converge a  $f(x)$  para  $x \in (0, 1)$ , por el Teorema 5.17. Es decir,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(n x) \quad \text{si } x \in (0, 1)$$

Si derivamos miembro a miembro esta expresión se obtiene

$$\frac{d}{dx} x = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(n x)$$

entonces,

$$1 = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(n x)$$

Si suponemos que esta serie se puede derivar término a término, resulta

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \left[ \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(n x) \right]$$

o sea,

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2 (-1)^{n+1} \cos(n x)$$

Esto indica que, para cada  $x \in (0, 1)$ , la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 2 (-1)^{n+1} \cos(n x)$  converge.

En consecuencia, su término general tiende a 0. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 (-1)^{n+1} \cos(n x) = 0.$$

Del inciso a) resulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n x) = 0$$

lo cual es un absurdo, por el inciso b). ■

Afortunadamente, si se agregan ciertas hipótesis, las series de Fourier se podrán derivar término a término, como veremos a continuación. Previamente probaremos que la derivada de una función periódica es también periódica.

### Proposición 5.24

Sea  $f: D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función derivable y periódica, de período  $T$ . Entonces  $f'$  es también periódica, de período  $T$ .

#### Demostración:

Por ser  $f$  periódica se tiene

$$f'(t+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+T+h) - f(t+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((t+h)+T) - f(t+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = f'(t)$$

■

Esta Proposición será utilizada en la demostración del siguiente Teorema:

### **Teorema 5.25: Diferenciación término a término de series de Fourier**

Sea  $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua  $\forall t \in \mathfrak{R}$  y periódica, de período  $T = b - a$ , con  $f'$  derivable por tramos en  $[a, b]$ . Entonces la serie de Fourier de  $f$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

puede derivarse término a término para obtener, si  $f'$  es continua en  $t$ ,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

o equivalentemente,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2n\pi}{b-a} a_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + \frac{2n\pi}{b-a} b_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

#### Demostración:

Por la Proposición 5.24  $f'$  es periódica, de período  $T$ . Luego, si aplicamos el Teorema 5.17 a  $f'$  resulta, si  $f'$  es continua en  $t$ ,

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + \beta_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right] \quad (1)$$

Calculemos los coeficientes  $\alpha_n$  y  $\beta_n$ :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f'(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) dt = \frac{2}{T} [f(T/2) - f(-T/2)] = \frac{2}{T} [f(T/2) - f(-T/2 + T)] = \\ &= \frac{2}{T} [f(T/2) - f(T/2)] = 0 \end{aligned}$$

Para calcular  $\alpha_n$  para  $n \geq 1$ , integramos por partes:

$$\alpha_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f'(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f'(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt =$$



$$= \frac{2}{T} \left[ f(t) \operatorname{Cos} \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) \right]_{-T/2}^{T/2} + \frac{2n\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{Sen} \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) dt =$$

$$= 0 + \frac{2n\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{Sen} \left( \frac{2n\pi t}{T} \right) dt = \frac{2n\pi}{T} b_n$$

Por lo tanto,

$$\alpha_n = \frac{2n\pi}{T} b_n \text{ para } n \geq 1 \quad (2)$$

Análogamente se prueba que

$$\beta_n = -\frac{2n\pi}{T} a_n \text{ para } n \geq 1 \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) se obtiene

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2n\pi}{b-a} b_n \operatorname{Cos} \left( \frac{2n\pi t}{b-a} \right) - \frac{2n\pi}{b-a} a_n \operatorname{Sen} \left( \frac{2n\pi t}{b-a} \right) \right] \cdot \blacksquare$$

Es importante observar que la conclusión del Teorema anterior generalmente falla cuando  $f$  es discontinua, como sucede en el Ejemplo 5.6. Sin embargo, en el siguiente ejemplo veremos que la derivación término a término de la serie de Fourier es válida.

### **Ejemplo 5.7**

Consideremos la función “onda triangular” definida por  $f(t) = |t|$  para  $-1 \leq t \leq 1$  tal que  $f(t+2) = f(t)$ .

a) Graficar  $f$  en el intervalo  $[-3, 3]$

b) Expresar  $f$  en serie de Fourier.

b) Indicar si es posible derivar término a término la serie de Fourier.

### **Resolución:**

a) La función  $f$  tiene período  $T = 2$  y en este caso  $a = -1$  y  $b = 1$ . Graficamos  $f$  ejecutando los siguientes comandos:

**a = - 1 ;**

**b = 1 ;**

**f [ t\_ ] = Abs [ t ] ;**

**k[t\_] = Which [  $\frac{t-b}{T} \in \mathbb{Z}$ , IntegerPart  $\frac{t-b}{T}$ , True, IntegerPart  $\frac{t-a}{T}$  ] ;**

**Plot [ f [ t - T k [ t ] ], { t, - 3 , 3 } ] ;**

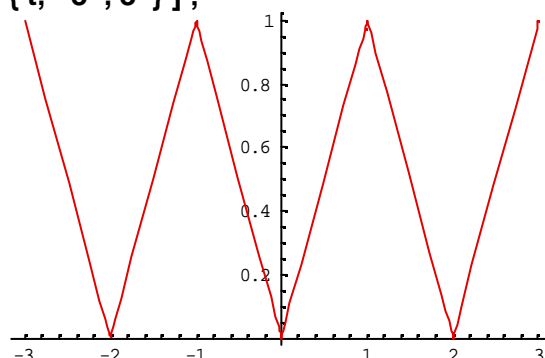


Figura: Gráfica de  $f$  en  $[-3, 3]$

b) Primeramente calculamos la serie de Fourier:

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

Donde

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt, \quad b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt$$

Al calcular los coeficientes de Fourier se obtiene:

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 |t| dt = \int_{-1}^0 |t| dt + \int_0^1 |t| dt = \int_{-1}^0 -t dt + \int_0^1 t dt = 1$$

Si  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt = \int_{-1}^0 |t| \cos(n\pi t) dt + \int_0^1 |t| \cos(n\pi t) dt = \\ &= \int_{-1}^0 -t \cos(n\pi t) dt + \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt = \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2 \pi^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt = \int_{-1}^0 |t| \sin(n\pi t) dt + \int_0^1 |t| \sin(n\pi t) dt = \\ &= \int_{-1}^0 -t \sin(n\pi t) dt + \int_0^1 t \sin(n\pi t) dt = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2 \pi^2} \cos(n\pi t)$$

Por otro lado,  $f$  es continua  $\forall t \in \mathfrak{R}$ . Veamos que es derivable por tramos en el intervalo  $[-1, 1]$ :

$$f'(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Además,

$$f'_I(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0^-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - |0|}{h} = -1$$

$$f'_D(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$f'_I(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1^-)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|1+h| - |1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1+h-1}{h} = 1$$

$$f'_D(-1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1^+)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|-1+h| - |-1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-h-1}{h} = -1$$

Luego, por el Corolario 5.18 resulta

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2 \pi^2} \text{Cos}(n\pi t)$$

c) Verificaremos si la función  $f$  satisface las hipótesis del Teorema 5.25:  $f$  es continua  $\forall t \in \mathfrak{R}$  y periódica; sólo falta verificar si  $f'$  derivable por tramos en  $[-1, 1]$ .

$$f''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$$

Además,

$$f''_I(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(0+h) - f'_I(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(h) - f'_I(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-1 - (-1)}{h} = 0$$

$$f''_D(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(0+h) - f'_D(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(h) - f'_D(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f''_I(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f'(1+h) - f'_I(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1-1}{h} = 0$$

$$f''_D(-1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f'(-1+h) - f'_D(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-1 - (-1)}{h} = 0$$

Por lo tanto, de acuerdo al Teorema 5.25, la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1+(-1)^n)}{n^2 \pi^2} \text{Cos}(n\pi t)$$

Puede derivarse término a término. El resultado es

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{2(-1+(-1)^n)}{n\pi} \text{Sen}(n\pi t)$$

para  $t \in \{t \in \mathfrak{R} / t \neq 0+2k \wedge t \neq -1+2k \wedge t \neq 1+2k, \text{ con } k \in \mathbb{Z}\}$  ■

La derivación término a término de una serie de Fourier puede aplicarse también a funciones no periódicas, si se extiende el Teorema 5.25 como sigue:

**Teorema 5.26: Diferenciación término a término de series de Fourier para funciones no periódicas.**

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua, con  $f'$  derivable por tramos en  $[a, b]$  y tal que  $f(a) = f(b)$ . Entonces la serie de Fourier de  $f$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

puede derivarse término a término para obtener, si  $f'$  es continua en  $t$ ,

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2n\pi}{b-a} a_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + \frac{2n\pi}{b-a} b_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

Demostración:

Surge de inmediato si definimos  $T = b - a$  y se aplica el Teorema 5.25 a la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t \notin [a, b] \end{cases} \quad \text{donde } k(t) = \begin{cases} \operatorname{int}\left[\frac{t-b}{T}\right] & \text{si } t \leq b \\ \operatorname{int}\left[\frac{t-a}{T}\right] & \text{si } t > b \end{cases} \quad \blacksquare$$

A diferencia de lo que ocurre con la operación de derivación, la integral de una función periódica puede no resultar periódica. Sin embargo, agregando un término adicional a la integral se logra obtener una función periódica, como veremos en la siguiente Proposición.

**Proposición 5.27**

Sea  $f: D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua por tramos y periódica, de período  $T$ . Entonces la función

$$F(t) = \int_0^t f(u) du - \frac{1}{2} a_0 t \quad \text{donde } a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(u) du$$

es también periódica, de período  $T$ .

Demostración:

$$F(t+T) = \int_0^{t+T} f(u) du - \frac{1}{2} a_0 (t+T) = \int_0^T f(u) du + \int_T^{t+T} f(u) du - \frac{1}{2} a_0 t - \frac{1}{2} a_0 T$$

Por la Proposición 5.4 b) se tiene

$$\int_0^T f(u) du = \int_{-T/2}^{T/2} f(u) du = \frac{1}{2} a_0 T \quad \int_T^{t+T} f(u) du = \int_0^t f(u) du$$

Por consiguiente,

$$F(t+T) = \frac{1}{2} a_0 T + \int_0^t f(u) du - \frac{1}{2} a_0 t - \frac{1}{2} a_0 T = \int_0^t f(u) du - \frac{1}{2} a_0 t = F(t). \blacksquare$$

La integración de una serie de Fourier tiene mejores expectativas pues, sorprendentemente, la serie de Fourier de una función continua por tramos siempre puede integrarse término a término, ya sea que converja o no. El siguiente Teorema corrobora nuestra afirmación.

**Teorema 5.28: Integración término a término de series de Fourier para funciones no periódicas.**

Sea  $f: D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua por tramos en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Entonces la serie de Fourier de  $f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

puede integrarse término a término para obtener

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} \left[ a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right] dt$$

o equivalentemente,

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{2n\pi} \left[ \left( a_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t_2}{b-a}\right) - b_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t_2}{b-a}\right) \right) - \left( a_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t_1}{b-a}\right) - b_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t_1}{b-a}\right) \right) \right]$$

Demostración:

Puesto que la función  $f$  es continua por tramos y, por la Proposición 5.27, la función  $F$  definida por

$$F(t) = \int_0^t f(u) du - \frac{1}{2} a_0 t$$

Es continua y periódica, con período  $T$ . Como

$$F'(t) = f(t) - \frac{1}{2} a_0$$

Se deduce que  $F'$  es también continua y en consecuencia, por el Corolario 5.18, puede expresarse en serie de Fourier

$$F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \operatorname{Cos}(n w_0 t) + \beta_n \operatorname{Sen}(n w_0 t)] \quad (1)$$

Donde  $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

Entonces, para  $n \geq 1$  e integrando por partes resulta,

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos(w_0 n t) dt = \\
&= \frac{2}{n w_0 T} F(t) \operatorname{sen}(n w_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} - \frac{2}{n w_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} F'(t) \operatorname{sen}(w_0 n t) dt = \\
&= -\frac{2}{n w_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \frac{1}{2} a_0 \right] \operatorname{sen}(w_0 n t) dt = -\frac{1}{n w_0} b_n \quad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \operatorname{sen}(w_0 n t) dt = \\
&= \frac{2}{n w_0 T} F(t) \cos(n w_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2}{n w_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} F'(t) \cos(w_0 n t) dt = \\
&= \frac{2}{n w_0 T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ f(t) - \frac{1}{2} a_0 \right] \cos(w_0 n t) dt = \frac{1}{n w_0} a_n \quad (3)
\end{aligned}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) se obtiene

$$F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n w_0} [-b_n \operatorname{Cos}(n w_0 t) + a_n \operatorname{Sen}(n w_0 t)] \quad (4)$$

Por otro lado,

$$F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(u) du - \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1)$$

De donde

$$\int_{t_1}^{t_2} f(u) du = F(t_2) - F(t_1) + \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) \quad (5)$$

Al reemplazar la expresión (4) en (5) se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} f(u) du &= \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n w_0} [-b_n (\operatorname{Cos}(n w_0 t_2) - \operatorname{Cos}(n w_0 t_1)) + a_n (\operatorname{Sen}(n w_0 t_2) - \operatorname{Sen}(n w_0 t_1))]
\end{aligned}$$

Esta última expresión es precisamente la integración término a término de la serie de Fourier.

El Teorema anterior afirma que la integral de una función continua por tramos puede calcularse integrando término a término su serie de Fourier, aunque ésta no converja a la función.

### **Ejemplo 5.8**

Consideremos la función periódica  $f(x) = x$  para  $-\pi < x < \pi$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Esta función es continua en  $[-\pi, \pi]$  y, de acuerdo con el Ejemplo 5.6, su serie de Fourier es

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \text{sen}(nx)$$

Hemos visto que si diferenciamos esta serie término a término, obtenemos algo sin sentido. Sin embargo, podemos integrarla término a término y obtener, para cualquier  $x$  en  $[-\pi, \pi]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^x f(t) dt &= \int_{-\pi}^x t dt = \frac{1}{2} (x^2 - \pi^2) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \int_{-\pi}^x \text{sen}(nt) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n} \cos(n\pi) \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} (-1)^n \left[ \cos(nx) - (-1)^n \right]. \end{aligned}$$

La integración término a término de una serie de Fourier puede aplicarse también a funciones no periódicas, extendiendo el Teorema 5.28 de la siguiente manera:

#### ***Teorema 5.29: Integración término a término de series de Fourier***

Sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$  una función continua por tramos en  $[a, b]$ . Entonces la serie de Fourier de  $f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \text{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \text{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \right]$$

puede integrarse término a término para obtener

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{2n\pi} \left[ \left( a_n \text{Sen}\left(\frac{2n\pi t_2}{b-a}\right) - b_n \text{Cos}\left(\frac{2n\pi t_2}{b-a}\right) \right) - \left( a_n \text{Sen}\left(\frac{2n\pi t_1}{b-a}\right) - b_n \text{Cos}\left(\frac{2n\pi t_1}{b-a}\right) \right) \right]$$

#### **Demostración:**

Surge de inmediato si definimos  $T = b - a$  y se aplica el Teorema 5.28 a la función

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in (a, b) \\ f(t - k(t)T) & \text{si } t < a \vee t > b \end{cases} \quad \text{donde } k(t) = \begin{cases} \text{int} \left[ \frac{t-b}{T} \right] & \text{si } t \leq b \\ \text{int} \left[ \frac{t-a}{T} \right] & \text{si } t > b \end{cases}$$

## 5.5 Series de Fourier de funciones periódicas pares o impares

Ciertas propiedades de las funciones se reflejan en sus series de Fourier. Así por ejemplo, una función  $f$  es par si

$$f(-t) = f(t)$$

Mientras que  $f$  es impar si

$$f(-t) = -f(t)$$

La primera condición significa, geoméricamente, que la gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al eje  $y$ , en tanto que la segunda condición implica que la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen.

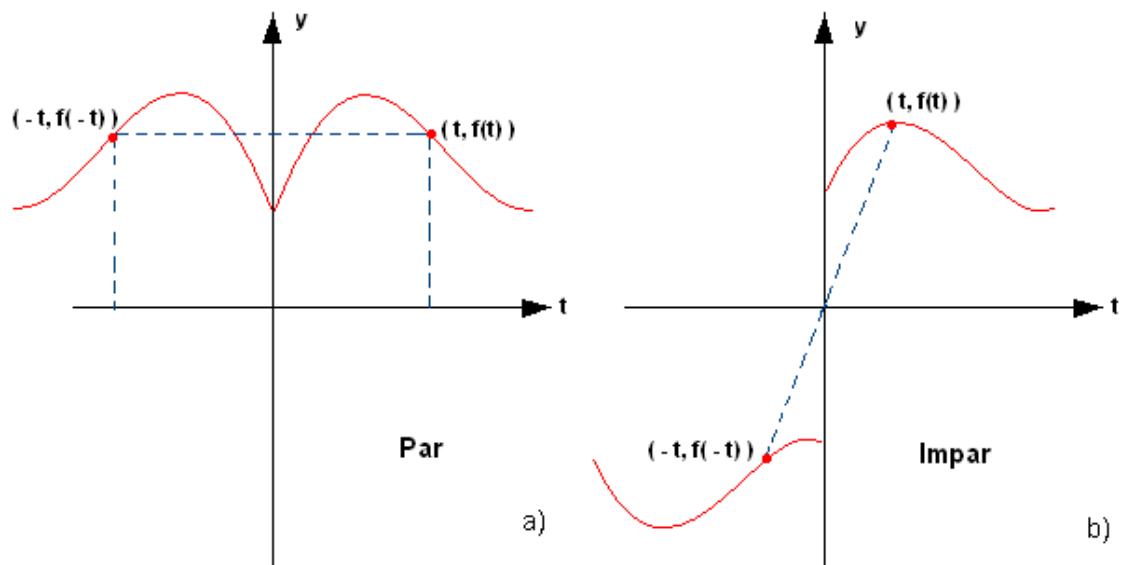


Figura: a) Función par. b) Función impar

Veremos que la serie de Fourier de una función periódica par sólo tiene términos con cosenos, mientras que la serie de Fourier de una función periódica impar sólo tiene términos con senos. Previamente enunciaremos la siguiente proposición:

### Proposición 5.30

Sean  $f, g: D \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  funciones integrables. Entonces

a) Si  $f$  es par, 
$$\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

b) Si  $f$  es impar, 
$$\int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

c) Si  $f$  es par y  $g$  impar entonces  $f \cdot g$  es impar y, por lo tanto, 
$$\int_{-a}^a f(t) g(t) dt = 0$$

Demostración:

a) 
$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \quad (1)$$



Si sustituimos  $u = -t$  en la primera integral y, teniendo en cuenta que  $f$  es par, resulta:

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du = \int_0^a f(u) du$$

Puesto que cualquier símbolo puede representar la variable de integración, se tiene

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

$$b) \int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt$$

Nuevamente, sustituyendo  $u = -t$  en la primera integral y aplicando el hecho de que  $f$  es impar, resulta:

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_a^0 f(-u) du = \int_0^a f(-u) du = - \int_0^a f(u) du = - \int_0^a f(t) dt$$

En consecuencia,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0$$

$$c) (f \cdot g)(-t) = f(-t) \cdot g(-t) = f(t) \cdot (-g(t)) = -f(t) g(t) = -(f \cdot g)(t)$$

En consecuencia,  $f \cdot g$  es impar. Del inciso b) se deduce que  $\int_{-a}^a f(t) g(t) dt = 0$ . ■

### ***Teorema 5.31: Series de Fourier de funciones pares o impares.***

Sea  $f: D \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  una función integrable en  $[a, b]$  y periódica, de período  $T = b - a$ . Entonces

a) Si  $f$  es par, la serie de Fourier de  $f$  contiene sólo cosenos, lo que se conoce como “una serie de Fourier en cosenos”. Es decir,

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \text{ siendo } a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt$$

b) Si  $f$  es impar, la serie de Fourier de  $f$  contiene sólo senos, lo que se conoce como “una serie de Fourier en senos”. Es decir,

$$S_f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) \text{ siendo } b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \text{sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) dt$$

Demostración:

a) Como  $f$  es par y la función seno es impar, de la Proposición 5.30 c) se deduce que la función  $f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  es impar. En consecuencia, aplicando la Proposición 5.6 y 5.30 b) se obtiene

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = 0$$

b) Como  $f$  es impar y la función coseno es par, de la Proposición 5.30 c) se concluye que la función  $f(t) \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$  es impar. En consecuencia, aplicando nuevamente la Proposición 5.6 y 5.30 b) resulta

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{cos}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt = 0.$$

## 5.6 Series de Fourier en senos y cosenos

En la práctica, suele suceder que se tenga una función  $f: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R}$  continua y derivable por tramos y que se necesite expresarla como una serie de Fourier que contenga sólo “senos” o sólo “cosenos”. Es decir, que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right)$$

o bien

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right)$$

para ciertas constantes  $a, b$  con  $a < b$ . Estas representaciones son también conocidas como “Desarrollos de medio rango de las series de Fourier” y son muy utilizadas en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, como la ecuación del calor y de la onda.

Para lograr estas expresiones trataremos de aplicar el Teorema de Fourier (Teorema 5.17), pero para ello se necesita que la función  $f$  sea periódica. Además, a fin de expresarla como serie de Fourier de sólo senos,  $f$  debería ser impar y, si quisiéramos representarla como serie de Fourier de sólo cosenos,  $f$  debería ser par. ¿Cómo podremos lograrlo si  $f$  no cumple estas condiciones? En esta sección veremos cómo hacerlo.

### **Cómo expresar una función como serie de Fourier en cosenos**

Dada una función  $f: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R}$  continua y derivable por tramos, para representarla como serie de Fourier en cosenos, trataremos de extenderla de forma periódica y par de la siguiente manera:

Primeramente construimos la figura simétrica de la gráfica de  $f$  con respecto al eje de ordenadas a fin de obtener una función par en el intervalo  $[-L, L]$ , para

luego extenderla periódicamente, con período  $2L$ , a lo largo del eje real. Esta función, a la que llamaremos  $f_E$ , es la extensión periódica par de  $f$  y queda definida como sigue:

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, L] \\ f(-t) & \text{si } t \in [-L, 0] \end{cases}, f_E(t + 2L) = f_E(t)$$

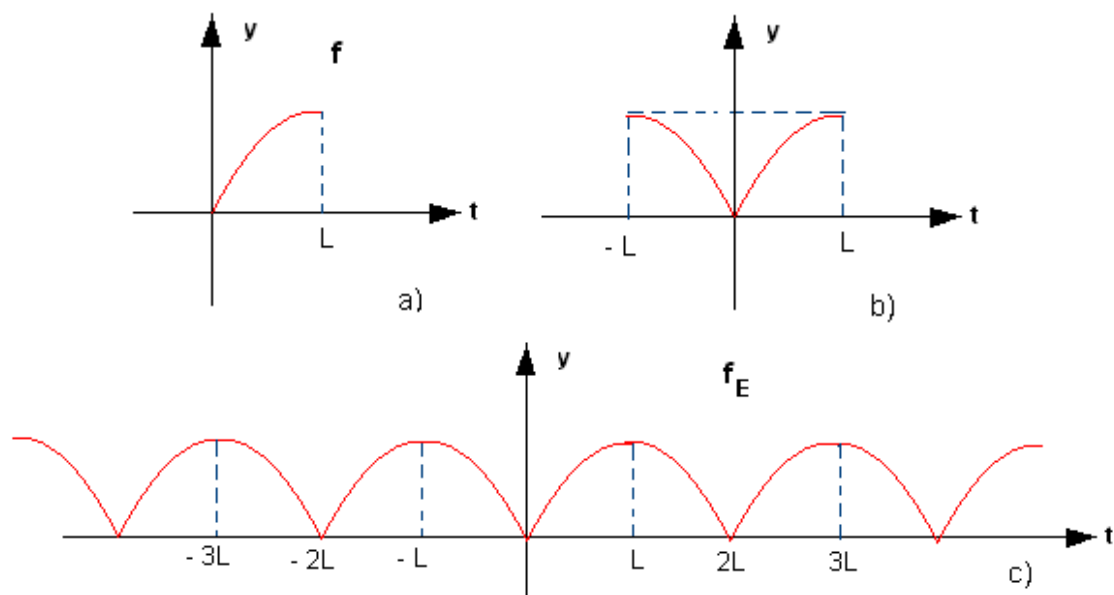


Figura: a) Función  $f$ . b) Extensión par de  $f$  en  $[-L, L]$  c) Función extendida  $f_E$ .

Calculemos la serie de Fourier de  $f_E$  en  $[-L, L]$ :

$$S_{f_E}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right)$$

En este caso,  $a = -L$  y  $b = L$ . En consecuencia,

$$S_{f_E}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{2L}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{2L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Por otro lado, al ser  $f_E$  par, de la Proposición 5.30 c) resulta  $b_n = 0 \forall n$ . Además, como  $f_E(t) = f(t)$  para  $t \in [0, L]$  de la Proposición 5.30 a) se obtiene

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f_E(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f_E(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{2L}\right) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f_E(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de  $f_E$  es

$$S_{f_E}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \text{ con } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt$$

Si aplicamos el Teorema de Fourier a  $f_E$  resulta

$$\frac{f_E(x^+) + f_E(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

$f_E(t) = f(t)$  para  $t \in [0, L]$  y  $f$  es continua en  $[0, L]$  se tiene

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \text{ para } t \in [0, L]$$

Basándonos en estas conclusiones podemos elaborar el siguiente Teorema:

**Teorema 5.32: Convergencia de la serie de Fourier en cosenos.**

Si  $f: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R}$  es continua y derivable por tramos entonces

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad \forall t \in [0, L]$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt$$

**Cómo expresar una función como serie de Fourier en senos**

Si la función  $f: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R}$  es continua y derivable por tramos, para expresarla como serie de Fourier en senos, procedemos así:

Construimos la figura simétrica de la gráfica de  $f$  con respecto al origen a fin de obtener una función impar en el intervalo  $[-L, L]$ , y luego la extendemos periódicamente, con período  $2L$ , a lo largo del eje real. Esta función, a la que llamaremos  $f_E$ , es la extensión periódica impar de  $f$  y queda definida como sigue:

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, L] \\ -f(-t) & \text{si } t \in (-L, 0) \end{cases}, \quad f_E(t + 2L) = f_E(t)$$

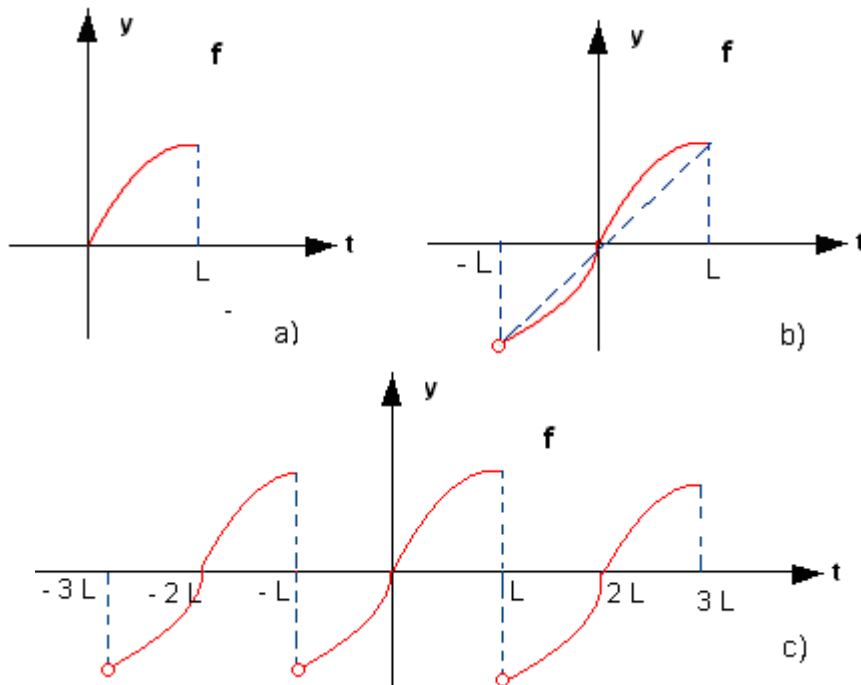


Figura: a) Función  $f$ . b) Extensión impar de  $f$  en  $[-L, L]$  c) Función extendida  $f_E$ .

Calculemos la serie de Fourier de  $f_E$  en  $[-L, L]$ :

$$S_{f_E}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \operatorname{Sen}\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right)$$

En este caso, nuevamente  $a = -L$  y  $b = L$ . Por lo tanto,

$$S_{f_E}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$$

Por otro lado, al ser  $f_E$  impar, de la Proposición 5.30 c) resulta  $a_n = 0 \quad \forall n$ . Además, como  $f_E(t) = f(t)$  para  $t \in [0, L]$  de la Proposición 5.30 a) se obtiene

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f_E(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{2L} \int_{-L}^L f_E(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{2L}\right) dt = \frac{2}{L} \int_0^L f_E(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt = \\ &= \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de  $f_E$  es

$$S_{f_E}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad \text{con} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt$$

Si aplicamos el Teorema de Fourier a  $f_E$  resulta

$$\frac{f_E(x^+) + f_E(x^-)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$f_E(t) = f(t)$  para  $t \in [0, L]$  y  $f_E$  es continua en  $(0, L)$  se tiene

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad \text{para } t \in (0, L)$$

Basándonos en estas conclusiones podemos elaborar el siguiente Teorema:

**Teorema 5.33: Convergencia de la serie de Fourier en senos.**

Si  $f: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R}$  es continua y derivable por tramos entonces

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad \forall t \in (0, L)$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt$$

 **Observación**

Si  $f_E$  es la extensión periódica impar de  $f$ , calculemos los límites laterales de  $f_E$  en  $t = 0$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_E(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f_E(t) = - \lim_{t \rightarrow 0^-} f_E(-t).$$

Efectuando el cambio de variable  $u = -t$ , y teniendo en cuenta que  $-t > 0$  si  $t < 0$ , se tiene

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} f_E(t) = - \lim_{u \rightarrow 0^+} f_E(u) = - \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = -f(0)$$

De aquí resulta que  $f_E$  es continua en  $t = 0$  si  $f(0) = 0$ .

En consecuencia, si  $f(0) = 0$ , la serie de Fourier en senos converge a  $f$  en  $t = 0$ .

De manera similar calcularemos los límites laterales de  $f_E$  en  $t = L$ :

$$\lim_{t \rightarrow L^-} f_E(t) = \lim_{t \rightarrow L^-} f(t) = f(L)$$

$$\lim_{t \rightarrow L^+} f_E(t) = - \lim_{t \rightarrow L^+} f_E(-t) = - \lim_{t \rightarrow L^+} f_E(-t + 2L)$$

Efectuando el cambio de variable  $u = -t + 2L$ , y teniendo en cuenta que  $-t + 2L < L$ , se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow L^+} f_E(t) = - \lim_{u \rightarrow L^-} f_E(u) = - \lim_{u \rightarrow L^-} f(u) = -f(L)$$

Por lo tanto,  $f_E$  es continua en  $t = L$  si  $f(L) = 0$ .

En consecuencia, si  $f(L) = 0$ , la serie de Fourier en senos converge a  $f$  en  $t = L$ .

De las observaciones anteriores se deduce que si  $f(0) = f(L) = 0$  entonces

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \quad \forall t \in [0, L]$$

### **Ejemplo 5.9**

Sea  $f(t) = t$  para  $t \in [0, 1]$

- Hallar la serie de Fourier en cosenos de  $f$ .
- Representar gráficamente las 2, 5 y 10 sumas parciales de la serie de Fourier en cosenos en  $[0, 1]$ .
- Hallar la serie de Fourier en senos de  $f$ .
- Representar gráficamente las 2, 10 y 30 sumas parciales de la serie de Fourier en senos en  $[0, 1]$ .

### **Resolución:**

a) En este caso,  $L = 1$ . Luego, la serie de Fourier de cosenos es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}\left(\frac{n\pi t}{L}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{Cos}(n\pi t)$$

donde

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt = 2 \int_0^1 t dt = 2 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = 1$$

Si  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = 2 \int_0^1 t \cos(n\pi t) dt = 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de cosenos es

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi^2} \operatorname{Cos}(n\pi t)$$

b) Utilizaremos el Mathematica para graficar en el intervalo  $[0, 1]$  las funciones  $S_2$ ,  $S_5$  y  $S_{10}$  que representan, respectivamente, las 2, 5 y 10 sumas parciales de la serie de Fourier:

$$S_2[t] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^2 \frac{((-1)^n - 1)}{n^2 p^2} \text{Cos}[p n t]$$

Plot [ S2[ t ] , { x, 0, 1 } ] ;

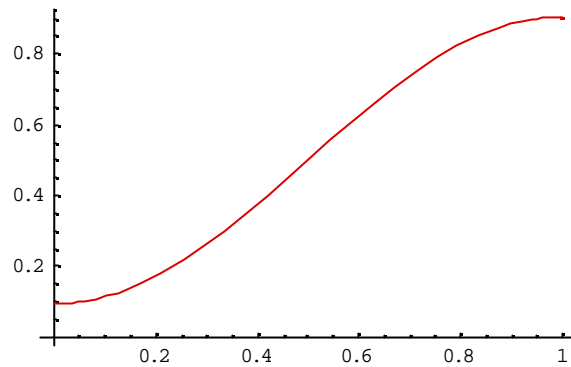


Figura: Gráfica de la segunda suma parcial de la serie de Fourier en cosenos de  $f$  en  $[0, 1]$

$$S_5[t] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^5 \frac{((-1)^n - 1)}{n^2 p^2} \text{Cos}[p n t]$$

Plot [ S5[ t ] , { x, 0, 1 } ] ;

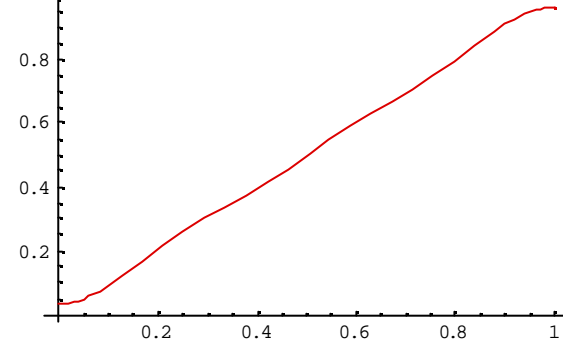


Figura: Gráfica de la quinta suma parcial de la serie de Fourier en cosenos de  $f$  en  $[0, 1]$

$$S_{10}[t] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{10} \frac{((-1)^n - 1)}{n^2 p^2} \text{Cos}[p n t]$$

Plot [ S10[ t ] , { x, 0, 1 } ] ;

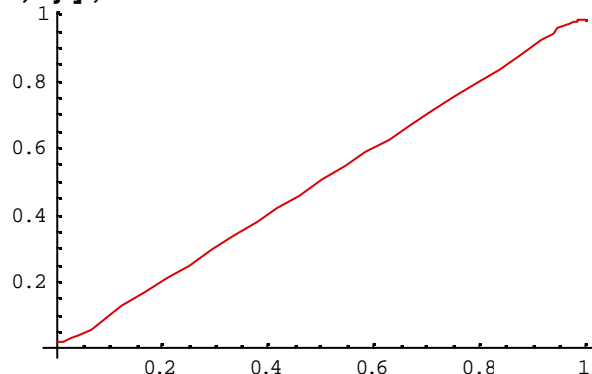


Figura: Gráfica de la décima suma parcial de la serie de Fourier en cosenos de  $f$  en  $[0, 1]$

Se observa que las gráficas de las  $n$ -ésimas sumas parciales de las series de Fourier se asemejan cada vez más a la gráfica de  $f$  conforme  $n$  aumenta. Esto se debe a que, según el Teorema 5.32, la serie de Fourier en cosenos converge, en el intervalo  $[0, 1]$ , a la función  $f$ .

c) La serie de Fourier en senos es

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n \pi t)$$

Donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n t}{L}\right) dt = 2 \int_0^1 t \operatorname{sen}(\pi n t) dt = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n \pi}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier en senos resulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n \pi} \operatorname{sen}(n \pi t)$$

d) Nuevamente nos valemos del Mathematica para graficar las sumas parciales de las series de Fourier:

$$S2[t_] = \sum_{n=1}^2 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n \pi} \operatorname{Sin}[n \pi t]$$

Plot [ S2[ t ] , { x, 0, 1 } ] ;

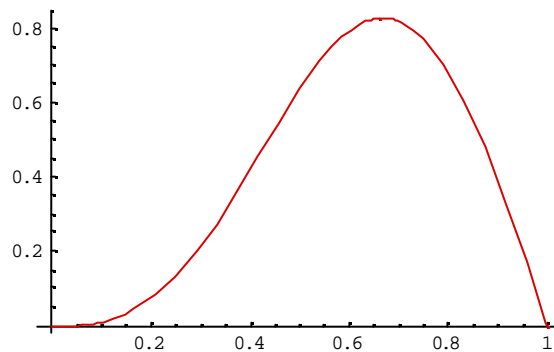


Figura: Gráfica de la segunda suma parcial de la serie de Fourier en senos de f en [ 0, 1]

$$S10[t_] = \sum_{n=1}^{10} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n \pi} \operatorname{Sin}[n \pi t]$$

Plot [ S10[ t ] , { x, 0, 1 } ] ;

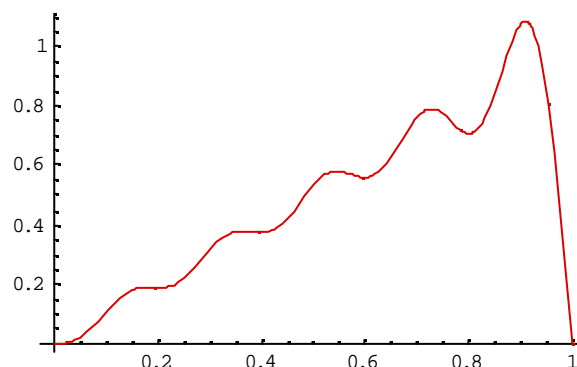


Figura: Gráfica de la décima suma parcial de la serie de Fourier en senos de f en [ 0, 1]

$$S30[t_] = \sum_{n=1}^{30} 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n \pi} \operatorname{Sin}[n \pi t]$$

Plot [ S30[ t ] , { x, 0, 1 } ] ;



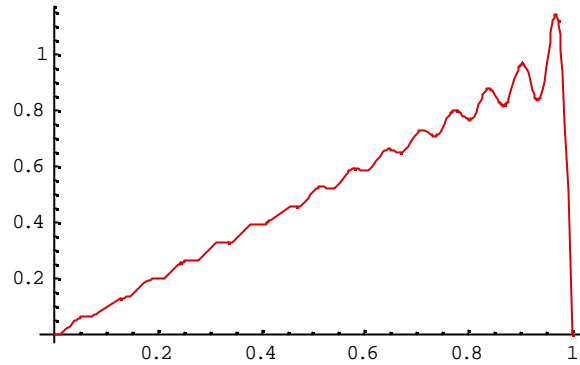


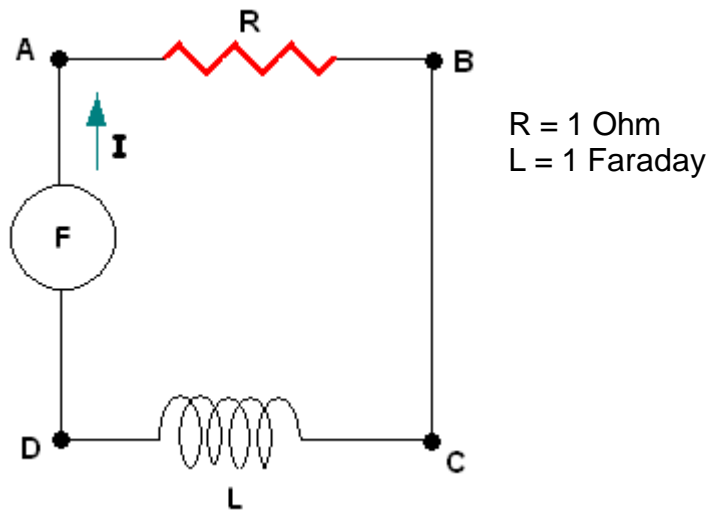
Figura: Gráfica de la trigésima suma parcial de la serie de Fourier en senos de  $f$  en  $[0, 1]$

Observando las gráficas, y debido a que  $f(0)=0$  pero  $f(1) \neq 0$ , se puede comprobar que la serie de Fourier en senos converge a  $f$  en el intervalo  $[0, 1)$ . Sin embargo, lo hace más lentamente que la serie de Fourier en cosenos. ■

Finalizaremos este capítulo mostrando un ejemplo de aplicación de las series de Fourier a ecuaciones diferenciales. El Método que ilustraremos a continuación es muy útil y sumamente conveniente en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales, cuando la parte no homogénea de la ecuación es una función periódica.

### Ejemplo 5.10

Considere el siguiente circuito, cuya batería proporciona un voltaje  $F$  definido mediante la función periódica  $F(t) = \pi^2 - t^2$  si  $-\pi \leq t \leq \pi$  con  $F(t + 2\pi) = F(t)$ .



Sea  $i(t)$  la intensidad de corriente que circula por el circuito en el instante  $t$  (medido en segundos). Se sabe que en el instante  $t = 0$  la intensidad de corriente es de 10 Amperes.

a) Aplique la Segunda Ley de Kirchoff para demostrar que  $i(t)$  satisface la ecuación diferencial

$$F(t) = i(t) + i'(t)$$

Con condición inicial

$$i(0) = 10$$

b) Utilice series de Fourier para hallar la solución  $i(t)$  de la ecuación diferencial.

c) Represente gráficamente la solución  $i(t)$  para  $t$  en el intervalo  $[0, 100]$

Resolución:

a) Previamente recordaremos las siguientes leyes que se aplican en el estudio de un circuito eléctrico:

- **Ley de Ohm:** La diferencia de potencial o voltaje entre los extremos o nodos de una resistencia es

$$V_{AB} = R i(t)$$



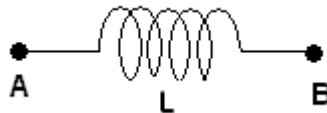
Donde

$R$  = resistencia del dispositivo (valor constante).

$i(t)$  = intensidad de corriente que circula por el circuito en el instante  $t$ .

- **Ley de Faraday:** La diferencia de potencial o voltaje entre los extremos o nodos de un inductor es

$$V_{AB} = L i'(t)$$



Donde

$L$  = inductancia del inductor (valor constante).

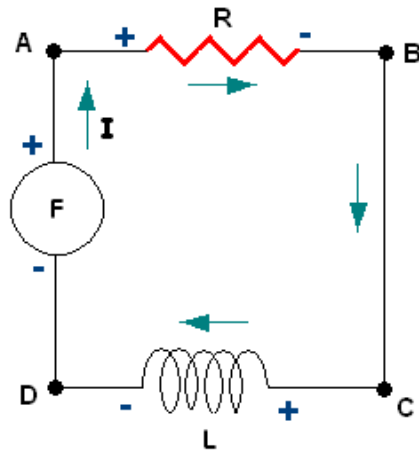
$i'(t)$  = derivada de la intensidad de corriente que circula por el circuito en el instante  $t$ .

- **Segunda Ley de Kirchoff:** La suma algebraica de los voltajes en un circuito cerrado es cero.

Cabe destacar que:

- 1) Cuando la corriente entra por cualquier dispositivo del circuito que no sea una batería, pasa de mayor voltaje (+) a menor voltaje (-).
- 2) En la suma algebraica que indica la Segunda Ley de Kirchoff, una elevación de voltaje (pasaje de “-“ a “+”) se considera positiva, mientras que una caída de voltaje (pasaje de “+” a “-“) se considera negativa.
- 3) Si entre dos nodos de un circuito no hay dispositivos, el voltaje entre ambos nodos se considera nulo.

Retomando ahora nuestro ejemplo, aplicaremos la Segunda Ley de Kirchoff al circuito A B C D A. Entonces, teniendo en cuenta los signos de los voltajes, resulta:



$$-V_{AB} - V_{BC} - V_{CD} + V_{DA} = 0 \quad (1)$$

Donde

$V_{AB}$  = voltaje entre los nodos A y B de la resistencia =  $R i(t)$

$V_{BC} = 0$  pues entre los nodos B y C no existen dispositivos.

$V_{CD}$  = voltaje entre los nodos C y D del inductor =  $L i'(t)$

$V_{DA}$  = voltaje proporcionado por la batería =  $F(t)$

Reemplazando estas expresiones en (1) se obtiene

$$-R i(t) - 0 - L i'(t) + F(t) = 0$$

Es decir,

$$F(t) = R i(t) + L i'(t)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que  $R = 1$  Ohmio,  $L = 1$  Faraday, y que en el instante inicial la intensidad de corriente es de 10 Amperes, queda planteada la siguiente ecuación diferencial con condición inicial:

$$\begin{aligned} F(t) &= i(t) + i'(t) & (1) \\ i(0) &= 10 \end{aligned}$$

b) La ecuación diferencial a resolver es lineal, de orden 1 y no homogénea. En consecuencia, la solución general de la ecuación es de la forma:

$$i(t) = ih(t) + ip(t)$$

Donde

$ih(t)$  = solución de la ecuación homogénea asociada.

$ip(t)$  = solución particular de la ecuación.

### ■ Cálculo de $ih(t)$

Resolvemos la ecuación homogénea

$$0 = i(t) + i'(t)$$

Para ello planteamos la ecuación característica

$$0 = 1 + \lambda$$

Cuya solución es obviamente  $\lambda = -1$ . Por lo tanto, la solución es

$$ih(t) = C e^{-t} \quad \text{con } C = \text{constante}$$

### ■ Cálculo de $i_p(t)$

Como  $F(t)$  es periódica, de período  $T = b - a = 2\pi$  con  $a = -\pi$  y  $b = \pi$ , propondremos que  $i_p(t)$  sea también periódica, de período  $2\pi$ . Además, desde el punto de vista físico, la intensidad de corriente es una función continua y derivable por tramos. Por lo tanto, por el Corolario 5.18, podemos expresarla como serie de Fourier, es decir,

$$i_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{b-a}\right)$$

Como suponemos que  $a = -\pi$  y  $b = \pi$  resulta

$$i_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \quad (2)$$

Intentaremos determinar los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ . Para ello reemplazaremos la expresión (2) en la ecuación diferencial (1):

$$F(t) = i_p(t) + i_p'(t)$$

Entonces,

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right]$$

Ahora bien, físicamente es aceptable suponer que  $i_p'(t)$  sea derivable por tramos, con lo cual podemos aplicar el Teorema 5.25 a fin de derivar término a término la serie de Fourier. De esta manera,

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \frac{d}{dt} \left[ \frac{a_0}{2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

Es decir,

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} [-n a_n \sin(nt) + n b_n \cos(nt)]$$

Agrupando los términos que tienen senos y cosenos resulta

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + n b_n] \cos(nt) + [b_n - n a_n] \sin(nt) \quad (3)$$

Por otro lado, si desarrollamos en serie de Fourier la función  $F$  y llamamos  $A_n$  y  $B_n$  a sus coeficientes de Fourier entonces

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) \quad (4)$$

Al reemplazar (4) en (3) se obtiene

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n + n b_n] \cos(nt) + [b_n - n a_n] \sin(nt)$$

Si igualamos los coeficientes de los términos semejantes se tiene

$$A_0 = a_0$$

Para  $n \geq 1$

$$\begin{cases} A_n = a_n + n b_n \\ B_n = b_n - n a_n \end{cases} \quad (5)$$

Pero, por definición,

$$A_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b F(t) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) dt = \frac{4}{3} \pi^2 \quad (6)$$

Además, si  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \cos(nt) dt = \\ &= \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{b-a}\right) dt = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{2\pi}\right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2) \sin(nt) dt = \\ &= 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Reemplazando (6), (7) y (8) en el sistema (5) resulta

$$a_0 = \frac{4}{3} \pi^2 \quad (9)$$

Si  $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n + n b_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \\ b_n - n a_n = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Al resolver el sistema (10) se obtiene

Para  $n \geq 1$

$$\begin{cases} a_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \\ b_n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)} \end{cases} \quad (11)$$

Sustituyendo (9) y (11) en (2) se obtiene la siguiente solución particular de la ecuación diferencial:

$$i_p(t) = \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \cos(nt) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)} \sin(nt) \right]$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$i(t) = C e^{-t} + \frac{2}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \cos(nt) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)} \sin(nt) \right] \quad (12)$$

Sólo resta hallar el valor de la constante C.

### ■ Cálculo de C

Como  $i(0) = 10$ , al sustituir esta ecuación en (12) resulta

$$10 = C + \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)}$$

De donde

$$C = 10 - \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)}$$

Luego, la solución de la ecuación diferencial con condiciones iniciales es

$$i(t) = \left[ 10 - \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \right] e^{-t} + \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \cos(nt) + \frac{4(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)} \operatorname{Sen}(nt) \right]$$

c) Graficaremos aproximadamente  $i(t)$  utilizando los 100 primeros términos de la serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)}$  y la suma parcial de orden 100 de su serie de

Fourier:

$$\text{Plot} \left[ \left[ 10 - \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{100} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \right] e^{-t} + \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{100} \left( \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2(1+n^2)} \cos[nt] + \frac{4(-1)^{n+1}}{n(1+n^2)} \operatorname{Sen}[nt] \right), \{t, 0, \cdot\} \right]$$

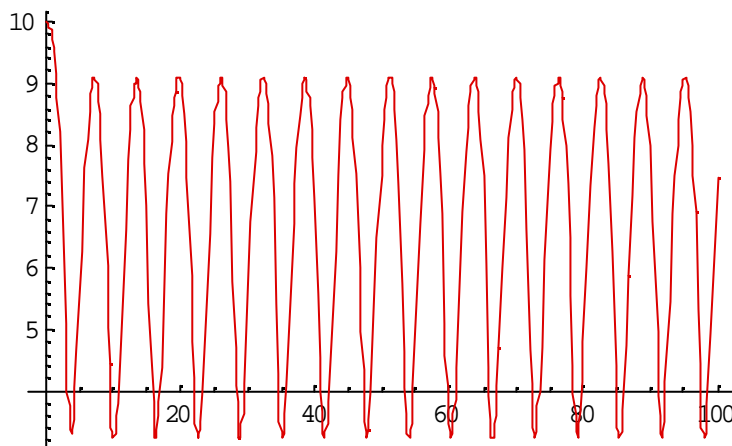


Figura: Gráfica aproximada de la intensidad de corriente en el intervalo  $[0, 100]$



**CAPÍTULO VI**  
**ECUACION DE LA CUERDA VIBRANTE**



## 6.1 Conceptos Previos

En este capítulo modelaremos matemáticamente las vibraciones producidas por una cuerda tal como ocurre, por ejemplo, al estirar la cuerda de un instrumento musical con el fin de producir sonido.

Como veremos, el proceso de modelado conducirá al planteo de una ecuación en derivadas parciales, llamada “la ecuación de onda”. Para resolver esta ecuación estudiaremos el Método de Separación de Variables, que brinda una solución en términos de series. Este método lo utilizó por primera vez en forma decisiva Joseph Fourier a comienzos de 1800 para resolver, aunque sin rigor matemático, un problema de conducción del calor.

Previamente recordaremos los siguientes conceptos:

### SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA LINEAL, DE ORDEN 2, HOMOGÉNEA Y A COEFICIENTES CONSTANTES.

Dada la siguiente ecuación diferencial:

$$a_0y + a_1y' + a_2y'' = 0$$

Para hallar la función incógnita  $y$ , se procede de la siguiente manera:

- Primer paso: Se resuelve la ecuación característica

$$a_0 + a_1r + a_2r^2 = 0$$

Y se hallan las raíces  $b_1$ ,  $b_2$

- Segundo paso:

- Si  $b_1 \wedge b_2$  son reales y  $b_1 \neq b_2$  entonces  $y(x) = c_1e^{b_1x} + c_2e^{b_2x}$
- Si  $b_1 \wedge b_2$  son reales y  $b_1 = b_2$  entonces  $y(x) = c_1e^{b_1x} + c_2e^{b_1x}$
- Si  $b_1 \wedge b_2$  son complejos, es decir,  $b_1 = a + bi$ ,  $b_2 = a - bi$  entonces  $y(x) = e^{ax}(c_1 \cos(bx) + c_2 \operatorname{sen}(bx))$

### ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

**Definición:** Una Ecuación diferencial en Derivadas Parciales es una ecuación donde intervienen una o más derivadas de una función  $u : D \subset \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  que será nuestra incógnita.

**Nota:** Sólo nos limitaremos a estudiar ecuaciones en derivadas parciales, cuando la función incógnita “ $u$ ” es de dos variables, es decir,  $u : D \subset \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$

**Definición: Orden de una ecuación diferencial**

Es la derivada de mayor orden que figura en ella.



**Ejemplo 6.1:**

1)  $2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5xy\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} = 0$  Orden 3

2)  $\sin(x)u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(xy)$  Orden 1

3)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  Orden 2

De las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, las que despiertan gran interés son las lineales debido a sus múltiples aplicaciones en la Física y otras ciencias. Por esta razón haremos hincapié en ellas introduciendo su definición.

**Definición:** Una ecuación diferencial en derivadas parciales y de orden 2 es lineal si es de la forma:

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y)u = G(x, y)$$

Es decir, en cada término de la ecuación "u" o algunas de sus derivadas aparecen sólo una vez.

**Definición:** Una ecuación diferencial en derivadas parciales de Orden 2 y lineal es homogénea si  $G(x, y) = 0$

**Ejemplos 6.2:**

1)  $3\frac{u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$  Homogénea

2)  $x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 + y^2)$  No Homogénea

***Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales***

Una ecuación diferencial en derivadas parciales lineal de orden 2 a coeficientes constantes y homogénea de la forma

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

con  $A, B, C, D, E, F$  constantes reales, se dice que es

|             |    |                 |
|-------------|----|-----------------|
| Hiperbólica | si | $B^2 - 4AC > 0$ |
| Parabólica  | si | $B^2 - 4AC = 0$ |
| Elíptica    | si | $B^2 - 4AC < 0$ |

La explicación del porqué se esta clasificación se debe a que, para poder resolverlas, se necesitan condiciones adecuadas (llamadas condiciones iniciales y de frontera) según sea el signo de  $B^2 - 4AC$

Nuestro objetivo no será mostrar métodos que permitan encontrar la solución general de una ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden, ya que esto es muy difícil de obtener y por lo general tampoco es útil en las aplicaciones.

Por lo tanto, nos concentraremos en determinar soluciones particulares. Uno de los métodos más utilizados es el “Método de Separación de Variables”, que veremos a continuación.

## MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Este método fue sistematizado por Fourier y se aplica para resolver ecuaciones en derivadas parciales lineales y homogéneas. Consta de los siguientes pasos:

### ■ Primer Paso

Se expresa la función incógnita  $u(x, y)$  como producto de una función de “ $x$ ” por una función de “ $y$ ”. Es decir,

$$u(x, y) = v(x) \cdot w(y)$$

En ese caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= v'(x)w(y) & ; & & \frac{\partial u}{\partial y} &= v(x) \cdot w'(y) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= v''(x)w(y) & ; & & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= v(x) \cdot w''(y) & \quad (1) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= v'(x) \cdot w'(y) \end{aligned}$$

### ■ Segundo Paso

En la Ecuación Diferencial, se reemplazan las derivadas parciales por algunas de las expresiones obtenidas en (1). De esta manera, la Ecuación Diferencial queda escrita en términos de las funciones “ $v$ ” y “ $w$ ” y algunas de sus derivadas.

### ■ Tercer Paso

En la Ecuación Diferencial, se separa la función “ $v$ ” y sus derivadas por un lado, y “ $w$ ” y sus derivadas por el otro. Quedarán así dos ecuaciones diferenciales ordinarias en las incógnitas “ $v$ ” y “ $w$ ” respectivamente.

Para hallar “ $v$ ” y “ $w$ ”, se aplican algunos de los métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Ejemplo 6.3:** Resolver la ecuación  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

Solución

Primer Paso: Expresamos la función incógnita como  $u(x,y) = v(x).w(y)$ , con  $v(x)$ ,  $w(y)$  a determinar. Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v'(x).w(y) ; \frac{\partial u}{\partial y} = v(x).w'(y)$$

Segundo Paso: Reemplazamos las igualdades obtenidas en el paso anterior en la expresión de la ecuación diferencial

$$v'(x).w(y) = v(x).w'(y)$$

Tercer Paso: Separamos “v” y su derivada por un lado, y “w” y su derivada por el otro.

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{w'(y)}{w(y)}$$

Ahora, observemos que  $\frac{v'(x)}{v(x)}$  es solo función de “x”, es decir  $\frac{v'(x)}{v(x)} = g(x)$ .

Por otro lado  $\frac{w'(y)}{w(y)}$  es solo función de “y”, es decir  $\frac{w'(y)}{w(y)} = h(y)$ . Por lo

tanto,  $g(x) = h(y)$ . Si derivamos esta última igualdad respecto de “x”, resulta que  $g(x) = 0 \Rightarrow g(x) = \text{cte} = \mathbf{a}$ . Entonces,

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{w'(y)}{w(y)} = \mathbf{a}$$

Luego,

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \mathbf{a} ; \frac{w'(y)}{w(y)} = \mathbf{a}$$

Resolvemos separadamente cada una de estas ecuaciones:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \mathbf{a} \Rightarrow v'(x) = \mathbf{a}.v(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \mathbf{a}.v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \mathbf{a}.dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \mathbf{a}.dx \Rightarrow \ln|v| = \mathbf{a}.x + c \Rightarrow |v| = e^{\mathbf{a}.x+c}$$

$$\Rightarrow v = \pm e^{\mathbf{a}.x+c} \Rightarrow v = \pm e^{\mathbf{a}.x} \cdot e^c$$

Si llamamos  $c_1 = \pm e^c$  resulta

$$v(x) = c_1 e^{ax}$$

Análogamente, si resolvemos  $\frac{w'(y)}{w(y)} = a$  se obtiene

$$w(y) = c_2 e^{ay}$$

Por lo tanto,

$$u(x, y) = c_1 e^{ax} c_2 e^{ay} = \underbrace{c_1 c_2}_k e^{a(x+y)} = k \cdot e^{a(x+y)}$$

$$u(x, y) = k \cdot e^{a(x+y)} \quad \blacksquare$$

### **Observación**

En el ejemplo anterior hemos hallado, por el método de Separación de variables, “una” solución de la Ecuación Diferencial, pero eso no significa que sea la “única” solución. Por ejemplo,  $u(x, y) = k \cdot (x + y)$ ,  $k \in \mathfrak{R}$  es también solución.

## **PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE SOLUCIONES**

La estrategia global para resolver una ecuación en derivadas parciales lineal y homogénea, consiste en hallar soluciones más generales aprovechando la propiedad de linealidad del operador derivada. Es así que surge el siguiente teorema:

**TEOREMA 6.1:** Si  $u_1, u_2, \dots, u_n$  son soluciones de una ecuación en Derivadas Parciales lineal y homogénea, entonces la combinación lineal

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n$$

Donde las  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  son constantes, también es una solución.

### Demostración

Surge de inmediato debido a la propiedad de linealidad de la derivada parcial. ■

### **Observación**

Siempre que se tenga una sucesión  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  de soluciones de una ecuación lineal homogénea, se intentará obtener una solución más general, formada por la suma infinita de estas soluciones, es decir,

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y)$$

con  $c_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  constantes.

Pero se debe verificar efectivamente que  $u(x, y)$  es solución de la ecuación diferencial, pues no siempre la derivada de una serie es la serie que resulta de derivar cada término.

## 6.2 Ecuación de la Cuerda Vibrante (o Ecuación de Onda)

En esta sección nos detendremos a construir un modelo que describa el movimiento de una cuerda de longitud  $L$  que está fija en sus extremos, como ocurre con la cuerda de una guitarra. Situaremos estos extremos sobre el eje "x", digamos  $x = 0$  y  $x = L$ .

Supondremos que cuando la cuerda vibra en torno a su posición de equilibrio, ésta lo hace en un plano fijo, digamos el plano "x y". Pero sólo nos ocuparemos del movimiento transversal de la cuerda, es decir, en la dirección del eje "y". Su movimiento longitudinal o en la dirección del eje "x" será ignorado aquí pues es irrelevante para nuestro análisis.

De este modo el movimiento de la cuerda quedará completamente descrito si designamos como  $y(x, t)$  a la función posición o altura del punto  $x$  de la cuerda, en el instante  $t$ .

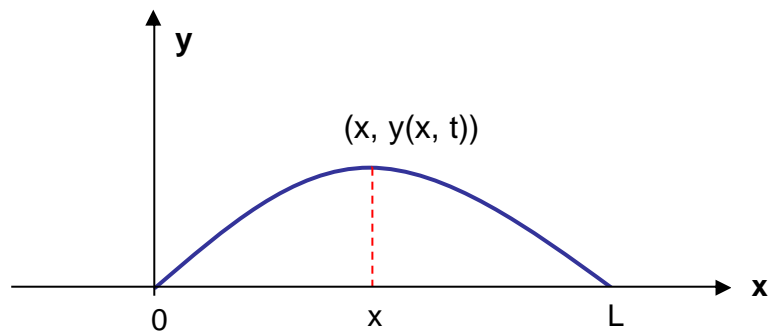


Figura: Posición de un punto  $x$  de la cuerda en el instante  $t$ .

Así,  $y(x, t)$  tendrá por dominio a la región  $D$  definida por

$$D = \{ (x, t) / 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \}$$

Además, la intuición física nos permitirá suponer que  $y(x, t)$  admite derivadas parciales continuas hasta orden 2.

Nuestro objetivo consistirá entonces en hallar la función posición  $y(x, t)$ .

Obviamente,  $y(0, t) = y(L, t) = 0$  para todo  $t$ .

Como siempre, para crear un modelo matemático debemos simplificar el problema a fin de realizar un análisis más adecuado. Por lo tanto admitiremos que:

- La cuerda es flexible, es decir, el vector de tensión  $T$  (expresado en Newtons) en cualquier punto de la cuerda siempre actúa tangencialmente a ella.
- La cuerda es homogénea, es decir, que su densidad lineal es constante, a la que llamaremos  $\rho = \frac{\text{masa (kg)}}{\text{longitud (m)}}$ .

- Los desplazamientos son pequeños comparados con la longitud de la cuerda. Es decir, que la deflexión  $\theta$  en cada punto  $x$  de la cuerda es tan pequeña que resulta bastante exacta la aproximación
 
$$\text{sen}(\theta(x)) \approx \text{tg}(\theta(x))$$
- La tensión  $\mathbf{T}$  es tal que su magnitud  $|\mathbf{T}|$  es la misma en todos los puntos de la cuerda y mucho mayor que el peso de la misma (por lo tanto, podemos despreciar esta última fuerza).
- No hay fuerzas externas actuando sobre la cuerda.

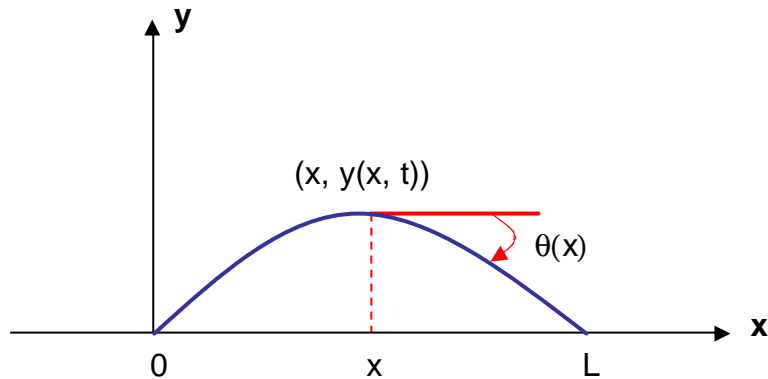


Figura: Ángulo de deflexión  $\theta(x)$  de un punto  $x$  de la cuerda, en el instante  $t$

Para hallar la función posición  $y(x, t)$  aplicaremos la Segunda Ley de Newton al trozo de cuerda comprendido en el intervalo  $[x, x + \Delta x]$ . Analicemos entonces las fuerzas que actúan sobre este tramo de cuerda:

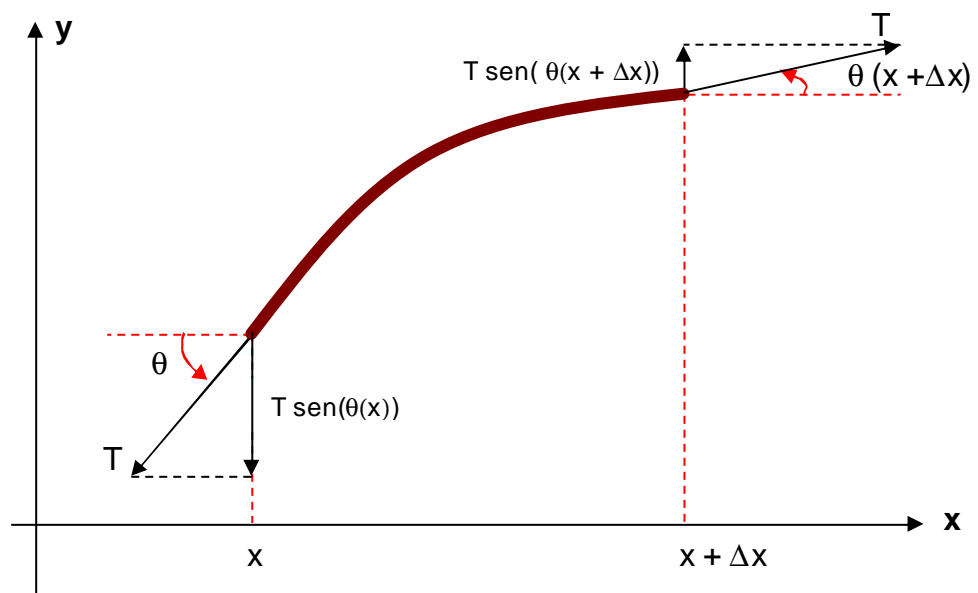


Figura: Diagrama de fuerzas que actúan en un pequeño tramo de cuerda, entre  $x$  y  $x + \Delta x$ .

Por hipótesis, la fuerza peso de la cuerda puede ser despreciada. En consecuencia, la única fuerza que actúa es la tensión  $T$  ejercida desde los extremos fijos de la cuerda. Por la Segunda Ley de Newton, se tiene

$$\sum_i \mathbf{F}_i(t) = m \mathbf{a}(t) = m (a_x(t), a_y(t)) \quad (1)$$

Donde

$F_i(t)$  = fuerza que actúa sobre el trozo de cuerda en el instante  $t$ , con  $i \in \mathbb{N}$ .

$m$  = masa del trozo de cuerda comprendido en el intervalo  $[x, x + \Delta x]$ .

$a(t)$  = aceleración que adquiere la cuerda en el instante  $t$ .

$a_x(t)$  = aceleración de la cuerda en la dirección del Eje  $x$  (aceleración horizontal)

$a_y(t)$  = aceleración de la cuerda en la dirección del Eje  $y$  (aceleración vertical)

Al suponer que la cuerda sólo se desplaza verticalmente, nos bastará analizar las fuerzas que actúan en la dirección del eje "y".

Entonces, igualando las segundas componentes de la ecuación (1) se tiene

$$|T| \operatorname{sen}(\theta(x + \Delta x)) - |T| \operatorname{sen}(\theta(x)) = m a_y(t) \quad (2)$$

Como el trozo de cuerda es pequeño, podemos suponer que la aceleración en cada punto de ella comprendida en ese intervalo es la misma, y es igual a la aceleración en el punto  $x$ , es decir,  $y_{tt}(x, t)$

Por lo tanto,

$$a_y(t) = y_{tt}(x, t) \quad (2)$$

Por otro lado, como

$$\rho = \frac{m}{\text{longitud trozo cuerda}} \approx \frac{m}{\Delta x}$$

resulta

$$m \approx \rho \Delta x \quad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) se tiene

$$|T| (\operatorname{sen}(\theta(x + \Delta x)) - \operatorname{sen}(\theta(x))) \approx \rho \Delta x y_{tt}(x, t) \quad (4)$$

Como por hipótesis  $\theta(x)$  es lo suficientemente pequeño,  $\operatorname{sen}(\theta(x))$  y  $\operatorname{tg}(\theta(x))$  son aproximadamente iguales. Luego,

$$\rho \Delta x y_{tt}(x, t) \approx |T| (\operatorname{tg}(\theta(x + \Delta x)) - \operatorname{tg}(\theta(x))) \quad (5)$$

Ahora bien, para cada  $t$ , la cuerda describe una curva que es precisamente la gráfica de la función  $f(x) = y(x, t)$ . Como  $\theta$  es el ángulo entre la cuerda (es decir, la gráfica de  $f(x)$ ) y la horizontal, resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta(x)) &= f'(x) = y_x(x, t) \\ \operatorname{tg}(\theta(x + \Delta x)) &= f'(x + \Delta x) = y_x(x + \Delta x, t) \end{aligned} \quad (6)$$

Reemplazando (6) en (5) se obtiene

$$|T| (y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)) \approx \rho \Delta x y_{tt}(x, t) \quad (7)$$

Si dividimos (7) por  $\Delta x$  resulta

$$\rho y_{tt}(x, t) \approx |T| \frac{y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)}{\Delta x} \quad (8)$$

En (8) tomamos el límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\rho y_{tt}(x, t) \approx |T| y_{xx}(x, t)$$

Luego,

$$\frac{\rho}{|T|} y_{tt}(x, t) \approx y_{xx}(x, t) \quad (9)$$

Si llamamos  $C = \sqrt{\frac{|T|}{\rho}}$  la expresión (9) se transforma en

$$y_{tt}(x, t) = C^2 y_{xx}(x, t) \quad (10)$$

Esta ecuación, que describe la vibración de una cuerda, recibe el nombre de "Ecuación de Onda unidimensional".

Se trata de una ecuación en derivadas parciales lineal, de segundo orden, homogénea e hiperbólica. Tiene muchas soluciones, como lo ilustra el siguiente ejemplo:

#### **Ejemplo 6.4:**

Si  $F$  es una función de una variable con derivada segunda continua, probar que  $y(x, t) = F(x - Ct)$  es una solución de la ecuación de onda (10).

#### **Resolución**

Aplicaremos en forma sucesiva la Regla de la Cadena para calcular las derivadas parciales:

$$y_x = F'(x - Ct) \cdot 1$$

$$y_{xx} = F''(x - Ct) \cdot 1$$

De manera similar,

$$y_t = F'(x - Ct) \cdot (-C)$$

$$y_{tt} = F''(x - Ct) \cdot (-C) \cdot (-C) = F''(x - Ct) \cdot C^2$$

Por lo tanto, resulta  $y_{tt}(x, t) = C^2 y_{xx}(x, t)$ .

Nuestra intuición relacionada con las condiciones físicas de la situación nos sugiere que el movimiento de la cuerda, es decir, la solución de la ecuación de onda, quedará unívocamente determinado si fijamos las condiciones de borde y las condiciones iniciales. Veamos cómo hacerlo:

Como la cuerda está fija en los extremos, tenemos

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0$$

Por otro lado, si fijamos su función posición inicial:

$$y(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < L)$$

y su función velocidad inicial

$$y_t(x, 0) = g(x)$$

Nos quedará planteada la siguiente "Ecuación de Onda"

$$\begin{array}{l} C^2 y_{xx}(x, t) = y_{tt}(x, t) \\ \text{CONDICIONES DE BORDE} \end{array} \quad \begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0$$



**CONDICIONES  
INICIALES**

$$\begin{cases} y(x,0) = f(x) & (\text{posición inicial}) \\ y_t(x,0) = g(x) & (\text{velocidad inicial}) \end{cases}$$

**SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ONDA**

Para resolver la Ecuación de Onda teniendo en cuenta las condiciones iniciales y de borde, aplicaremos el Método de Separación de Variables. Escribimos entonces:

$$y(x, t) = v(x) w(t)$$

Con  $v$ ,  $w$  funciones a calcular. En la Teoría Acústica, que es la que nos interesa, la función  $v(x)$  recibe el nombre de “onda permanente” con amplitud modulada por  $w(t)$ . Como

$$C^2 y_{xx} = y_{tt} \Rightarrow C^2 v''(x) \cdot w(t) = v(x) \cdot w''(t) \Rightarrow$$

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{C^2 w(t)} = a \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \frac{v''(x)}{v(x)} = a & \wedge & \frac{w''(t)}{C^2 w(t)} = a \\ \text{(I)} & & \text{(II)} \end{matrix}$$

**Cálculo de (I)**

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = a \Rightarrow v''(x) - a v(x) = 0$$

$$\text{Como } \begin{cases} y(0,t) = 0 \\ y(L,t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0)w(t) = 0 \\ v(L)w(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} \quad \text{pues}$$

buscamos soluciones  $y(x, t)$  no nulas. Por lo tanto, debemos resolver la siguiente ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} v''(x) - a v(x) &= 0 \\ \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para resolver esta ecuación, armamos la ecuación característica:

$$r^2 - a = 0 \Rightarrow r^2 = a$$

La solución de esta ecuación dependerá del signo de  $a$ . Por esta razón analizaremos los casos para  $a > 0$ ,  $a = 0$ ,  $a < 0$ .

- **Caso  $a > 0$**

La ecuación característica tiene por raíces  $r = \pm\sqrt{a}$

Entonces,  $v(x) = c_1 e^{\sqrt{a}x} + c_2 e^{-\sqrt{a}x}$

$$\text{Como } \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{a}L} + c_2 e^{-\sqrt{a}L} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = -c_1 \Rightarrow$$

$$c_1 e^{\sqrt{a}L} + c_2 e^{-\sqrt{a}L} = 0 \Rightarrow c_1 \underbrace{e^{\sqrt{a}L}}_{\neq 0} \left( \underbrace{e^{2\sqrt{a}L} - 1}_{\neq 0} \right) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow$$

$$v(x) = 0 \Rightarrow y(x, t) = v(x)w(t) = 0$$

Luego, el caso  $a > 0$  no sirve pues no conduce a una solución no nula.

- **Caso  $a = 0$**

La ecuación característica tiene por raíces  $r^2 = 0$ . Luego, el "0" es raíz doble.

Entonces,  $v(x) = c_1 + c_2 x$

$$\text{Como } \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 L = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow y(x, t) = 0$$

Luego, el caso  $\alpha = 0$  tampoco sirve pues no conduce a una solución no nula.

- **Caso  $a < 0$**

Las soluciones de la ecuación característica son  $r = \pm i\sqrt{-a}$ .

Por lo tanto,  $v(x) = c_1 \cos(\sqrt{-a} x) + c_2 \sin(\sqrt{-a} x)$

$$\text{Como } \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(L) = L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos(\sqrt{-a} x) + c_2 \sin(\sqrt{-a} x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$c_2 \sin(\sqrt{-a} x) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{-a} x) = 0$$

(pues si  $c_2 = 0 \Rightarrow v(x) = 0 \Rightarrow y(x, t) = 0$  y la solución nula no nos sirve).

Entonces,

$$\sin(\sqrt{-a}L) = 0 \Rightarrow (\sqrt{-a}L) = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{-a} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow v(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Como hay infinitas soluciones  $v(x)$ , no sólo por el valor de "n" sino por la constante  $c_2$  que es arbitraria, las llamaremos:

$$v_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

### Cálculo de (II)

$$\frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = a \Rightarrow w''(t) = ac^2 w(t) \Rightarrow w''(t) - ac^2 w(t) = 0$$

Para resolver esta ecuación, armamos la ecuación característica  $r^2 - \mathbf{a}c^2 = 0$  (recordar que estamos trabajando con  $\alpha < 0$ )

$$\Rightarrow r^2 = \mathbf{a}c^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{\mathbf{a}c^2} \Rightarrow r = \pm i\sqrt{-\mathbf{a}} c \Rightarrow$$

$$r = \pm i\sqrt{\left(\frac{np}{L}\right)^2} c \Rightarrow r = \pm i\frac{np}{L} c \Rightarrow$$

$$w(t) = c_1 \cos\left(\frac{np}{L} t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} t\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Nuevamente, hay infinitas soluciones  $w(t)$ , a las que llamaremos

$$w_n(t) = D_n \cos\left(\frac{np}{L} t\right) + E_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} t\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Combinemos los resultados (1) y (2) para obtener la siguiente sucesión de funciones producto:

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= v_n(x) \cdot w_n(t) = C_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \left[ D_n \cos\left(\frac{np}{L} t\right) + E_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} t\right) \right] = \\ &= \underbrace{C_n D_n}_{A_n} \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \cos\left(\frac{np}{L} t\right) + \underbrace{C_n E_n}_{B_n} \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} t\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$y_n(x, t) = A_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \cos\left(\frac{np}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} t\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Ahora bien, estas  $y_n(x, t)$  verifican la ecuación diferencial y las condiciones de borde. Pero puede ocurrir que no verifiquen las condiciones iniciales. Por esta razón, motivados por el Principio de Superposición, proponemos la siguiente solución general:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \cos\left(\frac{np}{L} t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} t\right) \quad (3)$$

Los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  se calcularán en base a las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) & \text{Posición inicial} \\ y_t(x, 0) = g(x) & \text{Velocidad inicial} \end{cases}$$

#### ■ Cálculo de $A_n$

$$\text{Como } y(x, 0) = f(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{np}{L} x\right) = f(x)$$

El miembro izquierdo es la Serie de Fourier de senos de  $f(x)$  en el intervalo  $[0, L]$ . Por lo tanto, por el Teorema 5.33 se tiene

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) dx$$

### ■ Cálculo de $B_n$

Si suponemos que la serie (3) puede derivarse término a término (propiedad que demostraremos en la próxima sección) se obtiene:

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -A_n \frac{npc}{L} \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{np ct}{L} \right) + B_n \frac{npc}{L} \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) \cos \left( \frac{np ct}{L} \right) \right]$$

Por lo tanto, como  $y_t(x, 0) = g(x) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{npc}{L} \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) = g(x)$

Pero el miembro de la izquierda es la Serie de Fourier de senos de  $g(x)$  en el intervalo  $[0, L]$ . Entonces, nuevamente por el Teorema 5.33 resulta

$$B_n = \frac{2}{npc} \int_0^L g(x) \cdot \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) dx$$

$$B_n \frac{npc}{L} = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cdot \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) dx \Rightarrow$$

### **CONCLUSIÓN**

Dada la ecuación de Onda  $y_{tt}(x, t) = c^2 y_{xx}(x, t)$  con las condiciones

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{Condiciones de Borde}$$

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases} \quad \text{Condiciones Iniciales}$$

Entonces una solución es:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) \cos \left( \frac{np ct}{L} \right) + B_n \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) \text{sen} \left( \frac{np ct}{L} \right)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \text{sen} \left( \frac{np x}{L} \right) dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Sólo resta probar que la serie propuesta como solución de la ecuación de onda puede derivarse término a término respecto de ambas variables. Esto nos permitirá verificar, además, que dicha serie es efectivamente una solución de la ecuación de onda. Para tal fin enunciaremos previamente los siguientes teoremas.

**TEOREMA 6.2 :** Si  $f$  y  $g$  son funciones que satisfacen las condiciones siguientes:

- 1)  $f \in C^2[0, L] = \{ h: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R} / h, h', h'' \text{ son continuas en } [0, L] \}$
- 2)  $f'''$  es derivable por tramos en  $[0, L]$
- 3)  $f(0) = f(L) = f'(0) = f'(L) = f''(0) = f''(L) = 0$
- 4)  $g \in C^1[0, L] = \{ h: [0, L] \rightarrow \mathfrak{R} / h, h' \text{ son continuas en } [0, L] \}$
- 5)  $g''$  es derivable por tramos en  $[0, L]$
- 6)  $g(0) = g(L) = 0$

Sean

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n=1,2,\dots$$

Entonces

$$\begin{aligned} \text{a) } & \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |A_n| < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n| < \infty \\ \text{b) } & \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n |B_n| < \infty \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |B_n| < \infty \end{aligned}$$

### Demostración

a) Sea  $f_E$  la extensión periódica impar de  $f$ , de período  $T = 2L$ . Luego, por el Teorema 5.33,  $f_E$  admite representación como Serie de Fourier en senos. Es decir,

$$f_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L]$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 5.25,  $f_E'$  y  $f_E''$  pueden calcularse derivando término a término sus correspondientes series de Fourier. En consecuencia,

$$f_E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (1)$$

$$f_E''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2)$$

Calculemos ahora los coeficientes de Fourier de  $f_E''''$ ; los llamaremos  $a_n$  y  $b_n$ :

Entonces, teniendo en cuenta que  $f_E''$  es periódica, de período  $T = 2L$  se tiene

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_E''''(t) dt = \frac{2}{T} (f_E''(T/2) - f_E''(-T/2)) = \frac{2}{T} (f_E''(T/2) - f_E''(-T/2 + T)) = 0$$

Si integramos por partes, obtenemos la siguiente expresión de  $a_n$ , para  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_E'''(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \left( f_E''(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \Big|_{-T/2}^{T/2} + \frac{2n\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_E''(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \left( f_E''(T/2) \cos(n\pi) - f_E''(-T/2) \cos(-n\pi) + \frac{2n\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_E''(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \right) = \\ &= \frac{2}{T} \left( 0 + \frac{2n\pi}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_E''(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \right) = \frac{4n\pi}{(2L)^2} \int_{-L}^L f_E''(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{2L}\right) dt = \frac{2n\pi}{L^2} \int_0^L f_E''(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \end{aligned}$$

Luego,

$$a_n = \frac{2n\pi}{L^2} \int_0^L f_E''(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (3)$$

Ahora bien, de (2) se deduce que los coeficientes de Fourier de  $f_E''$  son

$$- \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \quad (4)$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{L} \int_0^L f_E''(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \quad (5)$$

Reemplazando la expresión (5) en (3) resulta

$$a_n = - \frac{n^3 \pi^3}{L^3} A_n \quad n \geq 1 \quad (6)$$

De manera similar se demuestra

$$b_n = 0 \quad , n \geq 1 \quad (7)$$

Si aplicamos la Proposición 5.9 b) a los coeficientes de Fourier de  $f_E'$ ,  $f_E''$  y  $f_E'''$  deducidos de las expresiones (1), (4), (6) y (7) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{L} A_n \right)^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} A_n \right)^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( - \frac{n^3 \pi^3}{L^3} A_n \right)^2 < \infty$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 A_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^6 A_n^2 < \infty \quad (8)$$

Si consideramos el producto interno canónico en  $\mathfrak{R}^m$  y aplicamos la Desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\sum_{n=1}^m |A_n| = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} (n^2 |A_n|^2)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m n^2 |A_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n|^2 \right)^{1/2}$$

De (8), la serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2$  es convergente, y también lo es la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Luego,  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$  converge porque sus sumas parciales forman una sucesión monótona creciente acotada superiormente.

Análogamente,  $\sum_{n=1}^{\infty} n |A_n|$  es convergente pues

$$\sum_{n=1}^m n |A_n| = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} (n^4 |A_n|^2)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m n^4 |A_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^4 |A_n|^2 \right)^{1/2}$$

De manera similar se prueba que  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n|$  es convergente ya que

$$\sum_{n=1}^m n^2 |A_n| = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} (n^6 |A_n|^2)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^m n^6 |A_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^6 |A_n|^2 \right)^{1/2}$$

b) Consideremos  $g_E$  la extensión periódica impar de  $g$ , de período  $T = 2L$ . Luego, por el Teorema 5.33,  $g_E$  puede representarse como Serie de Fourier en senos. Es decir,

$$g_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c B_n}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L] \quad (9)$$

Nuevamente, aplicando el Teorema 5.25,  $g_E'$  puede calcularse derivando término a término su serie de Fourier. En consecuencia,

$$g_E'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2 c}{L^2} B_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (10)$$

Calculamos ahora los coeficientes de Fourier de  $g_E''$ ; los llamaremos  $\bar{a}_n$  y  $\bar{b}_n$ : De manera similar al inciso a), si se integra por partes, se demuestra que

$$\bar{b}_n = \frac{2n\pi}{L^2} \int_0^L g_E'(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \quad (11)$$

Pero de (9) se deduce que los coeficientes de Fourier de  $g_E'$  son

$$\frac{n^2 \pi^2 c}{L^2} B_n \quad (12)$$

Por lo tanto,

$$\frac{2}{L} \int_0^L g_E'(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{n^2 \pi^2 c}{L^2} B_n \quad (13)$$

Reemplazando la expresión (12) en (10) resulta

$$\bar{b}_n = \frac{n^3 \pi^3 c}{L^3} B_n \quad n \geq 1 \quad (14)$$

De manera análoga se demuestra

$$\bar{a}_n = 0 \quad n \geq 0 \quad (15)$$

Si aplicamos la Proposición 5.9 b) a los coeficientes de Fourier de  $g_E$ ,  $g'_E$  y  $g''_E$  deducidos de las ecuaciones (9), (12), (14) y (15) se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi c}{L} B_n \right)^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 \pi^2 c}{L^2} B_n \right)^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^3 \pi^3 c}{L^3} B_n \right)^2 < \infty$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 B_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 B_n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^6 B_n^2 < \infty$$

El resto de la demostración sigue de aplicar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz a las expresiones  $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n |B_n|$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |B_n|$ . ■

Recordaremos a continuación el siguiente Teorema, referente a la derivación término a término de una serie de funciones.

**TEOREMA 6.3** : Supongamos que  $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$  converge uniformemente hacia  $f$  sobre  $A$ , es decir,

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \text{ para todo } x \text{ de } A$$

Si la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} h'_n(x)$  converge uniformemente sobre  $A$ , entonces

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h'_n(x) \text{ para todo } x \text{ de } A$$

*Demostración:* Ver Michael Spivak. Cálculo Infinitesimal. Tomo II. Ed. Reverté.1970.

**TEOREMA 6.4** : Sean  $f, g$  funciones que satisfacen las hipótesis del Teorema 6.2. Si

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi c t}{L} \right) + B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi c t}{L} \right)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad n=1,2,\dots$$

Entonces

a) La serie



$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

converge uniformemente hacia  $y(x, t)$ .

b) Las derivadas parciales  $y_x(x, t)$ ,  $y_{xx}(x, t)$ ,  $y_t(x, t)$  e  $y_{tt}(x, t)$  pueden calcularse derivando término a término la serie asociada a  $y(x, t)$ . Más específicamente,

$$y_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

$$y_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

$$y_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

c)  $y(x, t)$  es solución de la ecuación de onda

$$y_{tt}(x, t) = c^2 y_{xx}(x, t)$$

con las condiciones de borde

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

y las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

Demostración:

$$a) \left| A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right| \leq |A_n| + |B_n|$$

Por el Teorema 6.2 la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$  converge. En consecuencia, por el Teorema de Weierstrass, la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)$$

converge uniformemente.

b) Consideremos la serie

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \end{aligned}$$

Entonces

$$\left| A_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right| \leq \\ \leq \left| A_n \frac{n\pi}{L} \right| + \left| B_n \frac{n\pi}{L} \right| = n \frac{\pi}{L} |A_n| + n \frac{\pi}{L} |B_n|$$

Por el Teorema 6.2 la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\pi}{L} |A_n| + n \frac{\pi}{L} |B_n| = \frac{\pi}{L} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n |A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n |B_n| \right)$$

Converge. Luego, nuevamente por el Teorema de Weierstrass, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

converge uniformemente. Por lo tanto, del Teorema 6.3 resulta

$$y_x(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

De manera similar, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

converge uniformemente pues la serie numérica

$$\frac{\pi^2}{L^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |B_n| \right)$$

converge. Aplicando reiteradamente el Teorema 6.3 se obtiene

$$y_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

Análogamente se prueba que

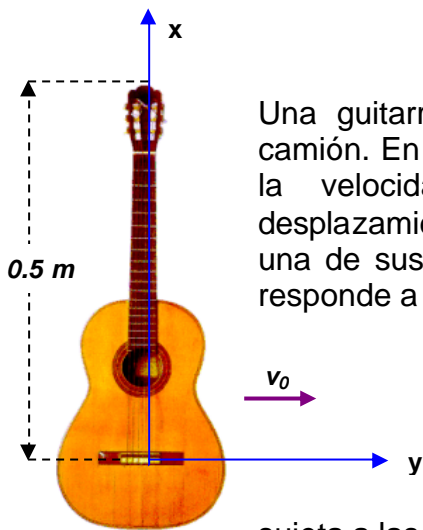
$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left[ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

$$y_{tt}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right]$$

c) Es consecuencia inmediata del inciso b). ■

Finalizaremos esta sección con un ejemplo de aplicación de la Ecuación de onda.

**Ejemplo 6.5:**



Una guitarra está apoyada verticalmente contra la pared de un camión. En el instante  $t = 0$ , el camión choca contra un muro a la velocidad  $v_0 = 22.2$  m/seg. La función posición o desplazamiento vertical  $y(x, t)$  en el instante  $t$  de un punto  $x$  de una de sus cuerdas que se extiende entre  $x = 0$  y  $x = 0.5$  m responde a la “Ecuación de Onda”:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

sujeta a las condiciones de borde  $\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(0.5, t) = 0 \end{cases}$

y las condiciones iniciales  $\begin{cases} y(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 22.2 \end{cases}$

Suponga que  $c = 1$ .

- Hallar la solución de la ecuación.
- Graficar la función solución entre  $x = 0$  m y  $x = 0.5$  m y entre  $t = 0$  seg. y  $t = 6$  seg..
- Representar gráficamente los desplazamientos de la cuerda en los instantes  $t = 0.5$  y  $t = 1$  seg.

Resolución

a) Sabemos que la solución de la Ecuación de onda es

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi c t}{L}\right)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n \pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

En este caso,  $L = 0.5$ ,  $c = 1$ ,  $f(x) = 0$  y  $g(x) = 22.2$ . Calculemos los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{0.5} \int_0^{0.5} 0 \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{0.5}\right) dx = 0$$

$$B_n = \frac{2}{n \pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{n \pi} \int_0^{0.5} 22.2 \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{0.5}\right) dx = \frac{22.2}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n]$$

Por lo tanto,

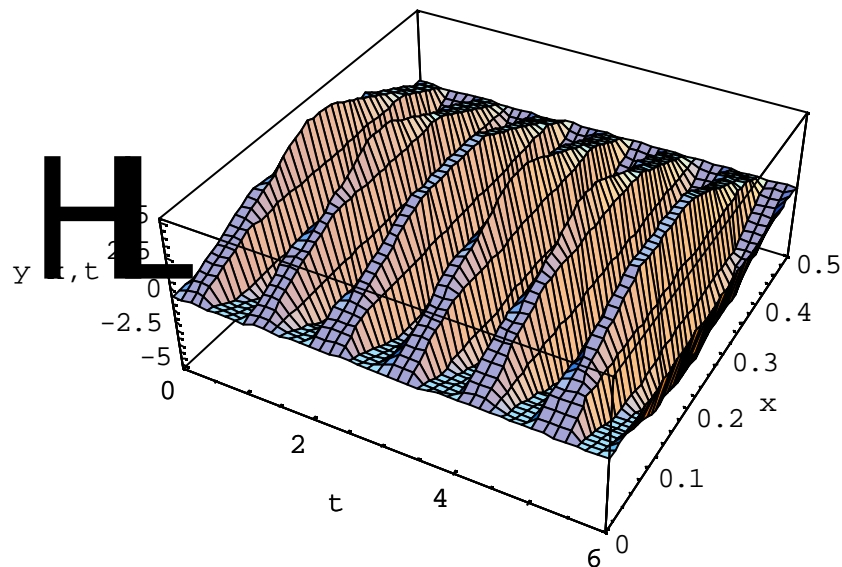
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{22.2}{n^2 \pi^2} [1 - (-1)^n] \sin(2n\pi x) \sin(2n\pi t)$$

b) Graficaremos aproximadamente  $y(x, t)$  considerando los 200 primeros términos de la serie. Para ello ejecutamos los comandos:

$$y[x_, t_] = \sum_{n=1}^{200} \frac{22.2}{n^2 \pi^2} (1 - (-1)^n) \text{Sin}[2n\pi x] \text{Sin}[2n\pi t]$$

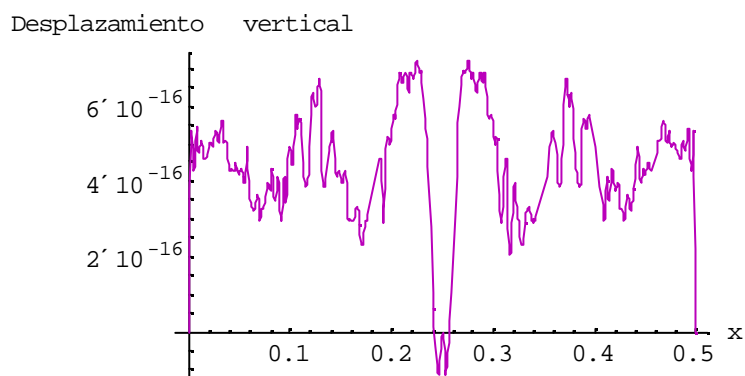
`Plot3D[y[x, t], {x, 0, 0.5}, {t, 0, 6}]`

Se obtiene la siguiente gráfica:



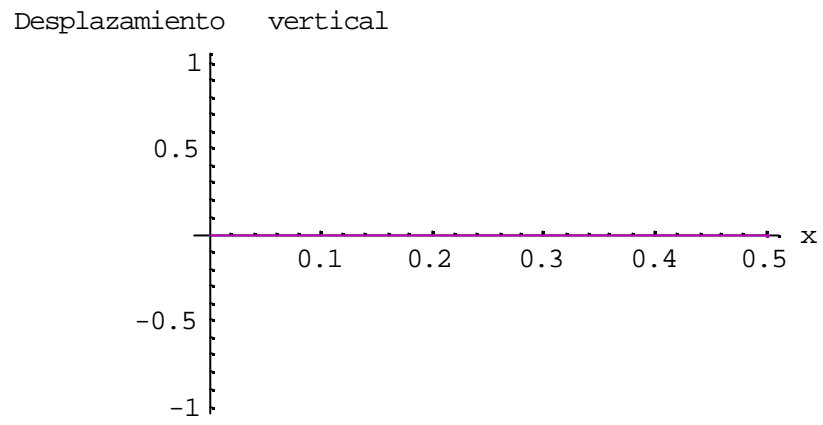
c) Para  $t = 0.5$  seg.

`Plot[y[x, 0.5], {x, 0, 0.5}, AxesLabel->{"x", "Desplazamiento vertical"}]`



Para  $t = 1$  seg.

`Plot[y[x, 1], {x, 0, 0.5}, AxesLabel->{"x", "Desplazamiento vertical"}]`



Se observa que al cabo de 1 seg. la cuerda deja de vibrar.■

### 6.3 Solución de la Ecuación de Onda según D' Alembert

D'Alembert (1717-1783) descubrió un método simple para encontrar una solución de la ecuación de onda. La idea que propuso fue factorizar el operador

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

como

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Luego efectuó un cambio de variables

$$u = x + ct, \quad v = x - ct$$

Y aplicó la Regla de la Cadena:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial u} - c \frac{\partial y}{\partial v}$$

Diferenciando nuevamente, obtuvo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t} \\ &= c \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) - c \left( c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) \\ &= c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) \end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \end{aligned}$$

Entonces, la ecuación (5.2) logró expresarla como

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) = c^2 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right)$$

o como

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0}$$

Esta ecuación puede ser integrada directamente y verificar que la solución general está dada por  $y = F(u) + G(v)$  para una elección adecuada de

las funciones  $F$  y  $G$ . Obviamente, es necesario que  $F$  y  $G$  sean funciones diferenciables.

Sustituyendo nuevamente, se obtiene

$$y(x, t) = F(x + c t) + G(x - c t)$$

Esto representa una superposición de dos ondas, una viajando a lo largo del eje  $x$  hacia la izquierda ( $F(x + c t)$ ) y la otra hacia la derecha ( $F(x - c t)$ ), cada una de ellas con una velocidad  $c$ .

Ahora bien, las condiciones frontera nos dicen que los extremos izquierdo y derecho de la cuerda están fijos, así que cuando  $x = 0$  o  $x = L$  (longitud de la cuerda) tenemos  $y = 0$ , independientemente de  $t$ .

La condición  $x = 0$  nos da

$$0 = F(c t) + G(-c t)$$

para todo  $t$ , por lo tanto

$$G(\lambda) = -F(-\lambda) \tag{5.2.1}$$

para cualquier valor de  $\lambda$ . Entonces

$$y(x, t) = F(x + c t) - F(c t - x)$$

Físicamente, esto significa que la onda viaja hacia la izquierda golpeando el extremo de la cuerda y vuelve invertida como una onda que viaja hacia la derecha. Este fenómeno es recibe el nombre de "Principio de Reflexión".

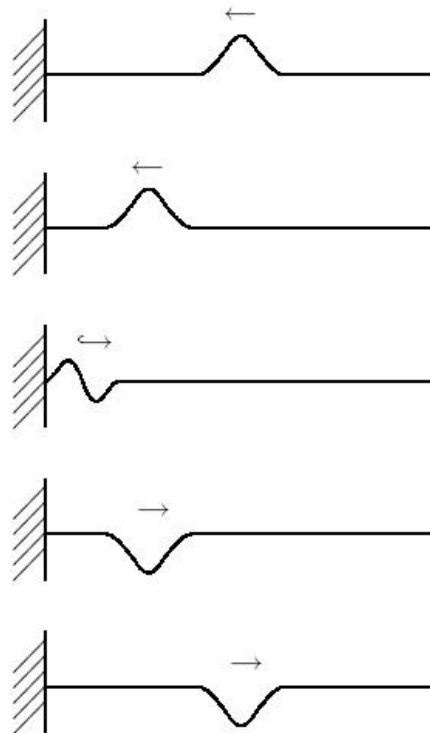


Figura: Verificación gráfica del Principio de Reflexión en la solución de la ecuación de onda.

Sustituyendo por la otra condición frontera  $x = L$ ,  $y = 0$  nos da

$$F(L + c t) = F(c t - L)$$

para todo  $t$ . Por lo tanto

$$F(\lambda) = F(\lambda + 2 L) \tag{5.2.2}$$

para todo valor de  $\lambda$ . Resumimos toda la información anterior en el siguiente teorema:

**TEOREMA 6.5: (de D' Alembert)**

La solución general para la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

está dada por

$$y(x, t) = F(x + c t) + G(x - c t)$$

Con F, G funciones dos veces diferenciables.

Las soluciones que satisfacen las condiciones de borde  $y(0, t) = 0$  e  $y(L, t) = 0$  para todo valor de t, son de la forma

$$y(x, t) = F(x + c t) - F(-x + c t)$$

donde F es una función dos veces diferenciable y periódica, de período  $2L$ .

El siguiente ejemplo ilustrará la forma de hallar una solución de la ecuación de onda en términos de la solución de D'Alembert.

**Ejemplo 6.6:**

Se tiene una cuerda de longitud  $L = 1$  m. con sus extremos fijos y coeficiente  $c^2 = 4$ . En el instante  $t = 0$  la cuerda se aparta de su posición de equilibrio, adoptando la forma de la gráfica de la función  $f(x) = x^5 - x^3$ , como se indica en la siguiente figura:

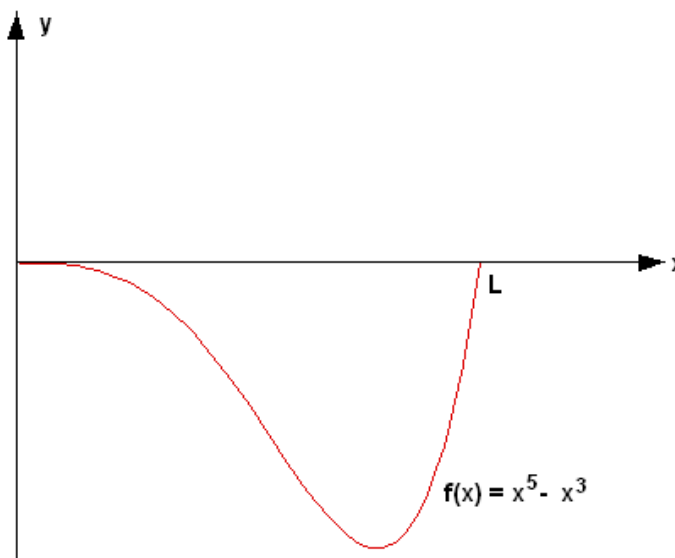


Figura: Posición inicial de la cuerda, en el instante  $t = 0$ .

Hallar una solución de la ecuación de onda según D'Alembert.

**Resolución:**

Debemos hallar la función  $y(x, t)$ , que representa la altura de un punto x de la cuerda, en el instante t.

Dicha función satisface la ecuación de onda



$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Con condiciones de borde  $\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases}$

Y condición inicial  $y(x, 0) = f(x) = x^5 - x^3$ .

Según D'Alembert (Teorema 6.5), la solución de esta ecuación, que verifica además las condiciones de borde es de la forma

$$y(x, t) = F(x + ct) - F(-x + ct)$$

Para cierta función  $F$  periódica, de período  $2L$  y dos veces diferenciable. La función  $F$  deberá elegirse convenientemente, de manera tal que satisfaga la condición inicial. Es decir,

$$y(x, 0) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < L$$

con lo cual

$$F(x) - F(-x) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < L$$

La última ecuación nos sugiere elegir  $F$  impar pues de esta manera, como  $F(x) = -F(-x)$ , tendríamos

$$2F(x) = f(x)$$

Es decir,

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) \quad \text{para } 0 < x < L$$

En consecuencia, tomaremos  $F(x) = \frac{1}{2}f_E(x)$  donde  $f_E$  es la extensión periódica impar, de período  $2L$ , de la función posición inicial  $f(x)$ . O sea,

$$f_E(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, L] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-L, 0] \end{cases} = x^5 - x^3 \quad \text{si } 0 \leq x \leq L, \quad f_E(x + 2L) = f_E(x)$$

Se puede verificar, además, que  $f_E$  es dos veces diferenciable. Por lo tanto, una solución de la ecuación de onda es

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(f_E(x + ct) - f_E(-x + ct))$$

Teniendo en cuenta que  $f_E$  es impar, resulta

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(f_E(x + ct) + f_E(x - ct))$$

Graficaremos mediante el software Mathematica la función  $y(x, t)$  para distintos valores de  $t$  (con incrementos de 0.01 seg.) comenzando en el instante  $t = 0$  seg. hasta  $t = 2$  seg. Escribimos entonces los siguientes comandos:

**L = 1;**

**a = - L;**

**b = L;**

**T = 2 L ;**

**C = 2 ;**

**f [ x\_ ] = x<sup>5</sup> - x<sup>3</sup> ;**

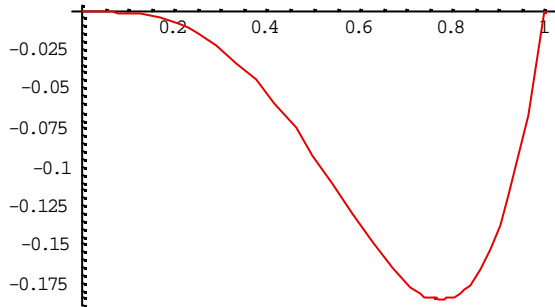
**k [ x\_ ] = Which [  $\frac{x-b}{T} \leq 0$ , IntegerPart [  $\frac{x-b}{T}$  ], True, IntegerPart [  $\frac{x-a}{T}$  ] ] ;**

$$f_E[x_] = f[x - T k[x]];$$

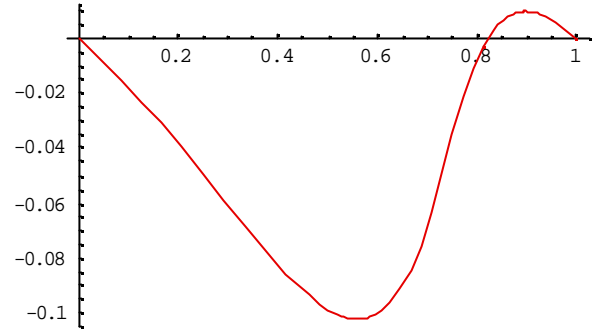
$$y[x_, t_] = \frac{1}{2} (f_E[x + ct] + f_E[x - ct])$$

For [t = 0, t ≤ 2, t = t + 0.01, Plot [y[x, t], {x, 0, L}]]

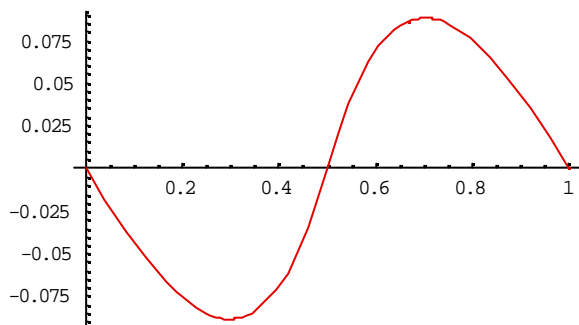
Algunas de las gráficas obtenidas, que muestran las distintas formas que va adoptando la cuerda a lo largo del tiempo, son las siguientes:



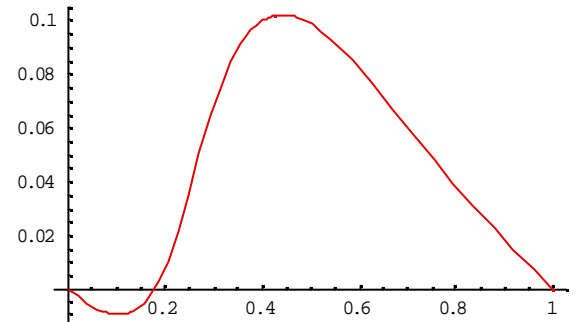
(a) Al tiempo t = 0 seg.



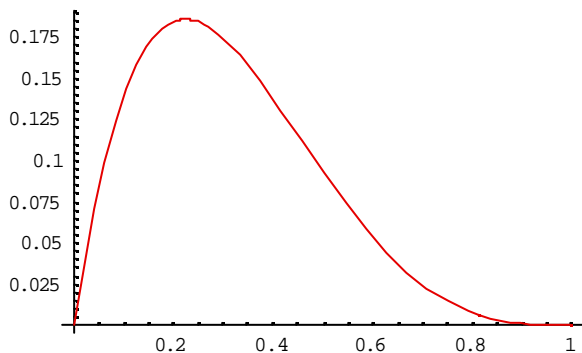
(b) Al tiempo t = 0.13 seg.



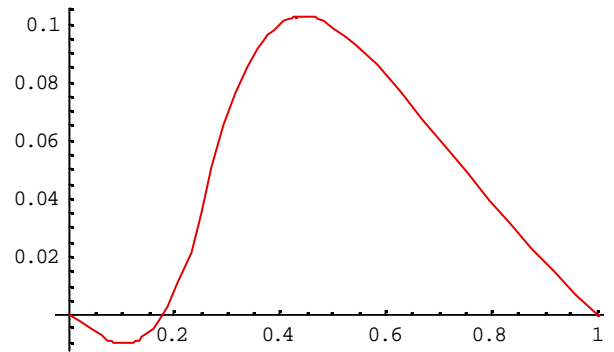
(c) Al tiempo t = 0.25 seg.



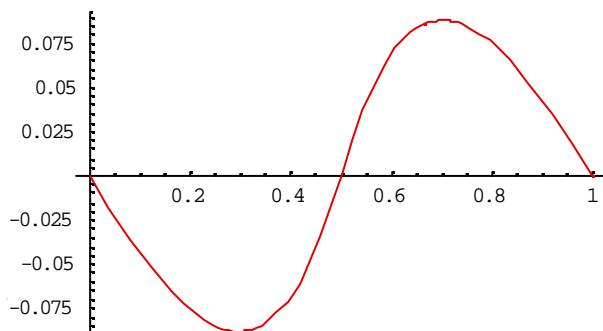
(d) Al tiempo t = 0.37 seg.

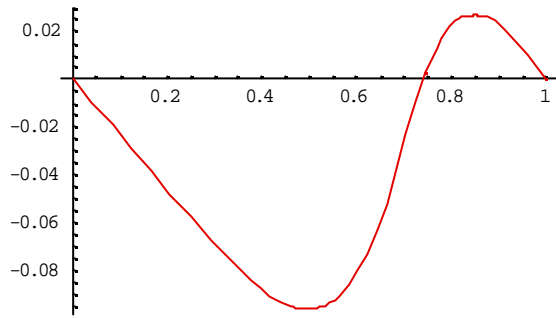


(e) Al tiempo t = 0.5 seg.



(f) Al tiempo t = 0.63 seg.





(g) Al tiempo  $t = 0.75$  seg.  
 (h) Al tiempo  $t = 0.85$  seg.

Al observar las gráficas, se pone en evidencia el Principio de Reflexión, pues la onda viaja hacia la izquierda y al golpear el extremo de la cuerda vuelve invertida hacia la derecha. ■

Según el Teorema 6.5, la solución propuesta por D'Alembert a la ecuación de una cuerda vibrante con extremos fijos es de la forma

$$y(x, t) = F(x + ct) - F(-x + ct)$$

Donde  $F$  es una función dos veces diferenciable y periódica, de período  $2L$ . Sin embargo, es importante tener en cuenta la forma que adquiere la cuerda en el instante inicial para que no haya ambigüedad en la solución. Es decir, a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Con condiciones de borde

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \end{cases}$$

Se le agrega la condición inicial  $y(x, 0) = f(x)$ .

De esta manera, restringiríamos aún más la búsqueda de la función  $F$ . El ejemplo anterior nos sugiere tomar

$$F(x) = \frac{1}{2} f_E(x)$$

donde  $f_E$  es la extensión periódica impar, de período  $2L$ , de la función posición inicial  $f(x)$ , siempre y cuando  $f_E$  sea dos veces diferenciable. Así, una solución de la ecuación de onda es

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (f_E(x + ct) + f_E(x - ct))$$

Podemos resumir estas conclusiones enunciando el siguiente teorema:

**TEOREMA 6.6: (solución de D' Alembert con condiciones iniciales y de borde)**

Dada la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con condiciones de borde

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

y condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

Sea  $f_E$  la extensión impar y periódica, de período  $2L$ , de la función  $f(x)$ . Si  $f_E$  es

dos veces diferenciable entonces

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(f_E(x + ct) + f_E(x - ct))$$

Es una solución de la ecuación de onda con condiciones iniciales y de borde.

Demostración:

Aplicando la Regla de la Cadena, se obtiene

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(f_E''(x + ct) + f_E''(x - ct))$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{2}(f_E''(x + ct) + f_E''(x - ct))$$

Luego,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $f_E$  es impar y periódica, de período  $2L$ :

$$y(0, t) = \frac{1}{2}(f_E(0 + ct) + f_E(0 - ct)) = \frac{1}{2}(f_E(ct) + f_E(-ct)) = \frac{1}{2}(f_E(ct) - f_E(ct)) = 0$$

$$y(L, t) = \frac{1}{2}(f_E(L + ct) + f_E(L - ct)) = \frac{1}{2}(f_E(L + ct) - f_E(-L + ct)) =$$

$$= \frac{1}{2}(f_E(L + ct) - f_E(-L + ct + 2L)) = \frac{1}{2}(f_E(L + ct) - f_E(L + ct)) = 0$$

Además, como  $f_E(x) = f(x)$  para  $0 \leq x \leq L$  se tiene:

$$y(x, 0) = \frac{1}{2}(f_E(x + 0) + f_E(x - 0)) = \frac{1}{2}(f_E(x) + f_E(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = f(x)$$

Finalmente, como

$$y_t(x, t) = \frac{1}{2}c(f_E'(x + ct) - f_E'(x - ct)) \text{ resulta}$$

$$y_t(x, 0) = \frac{1}{2}c(f_E'(x) - f_E'(x)) = 0. \blacksquare$$

Como vimos, la solución propuesta por D'Alembert para la ecuación de onda con condiciones iniciales y de borde requiere que la función  $f_E$  sea dos veces diferenciable. Sin embargo, en numerosos fenómenos reales la función  $f_E(x)$  suele no satisfacer esta condición. Estos casos ocurren a menudo con los instrumentos musicales de cuerda: un claro ejemplo de esta situación es la llamada "cuerda punteada", que se produce cuando un músico estira una cuerda en forma de punta para producir el sonido musical, como se muestra en la figura:

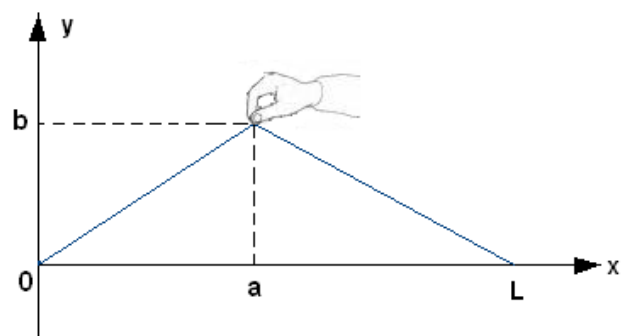
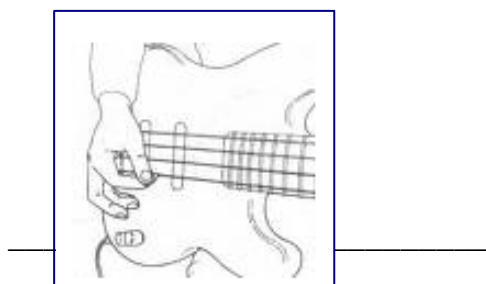


Figura: Una cuerda punteada

En este caso, la posición inicial de la cuerda queda expresada mediante la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \frac{b}{(L-a)}(L-x) & \text{si } a \leq x \leq L \end{cases}$$

Para ciertos valores de  $a$  y  $b$ . La función  $f_E$ , que es la extensión periódica impar de  $f$ , tiene la siguiente gráfica:

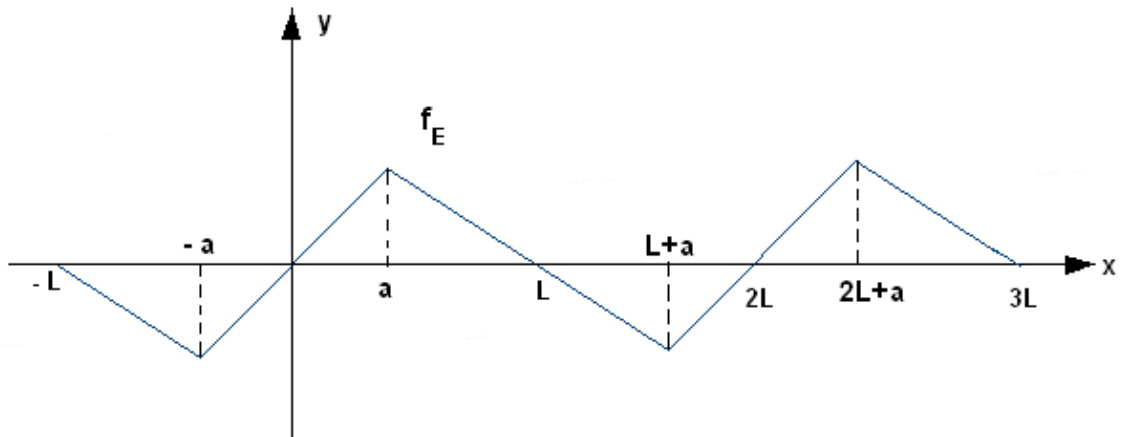


Figura: Gráfica de la extensión periódica impar de  $f$ .

Obviamente,  $f_E$  es continua pero no es dos veces diferenciable en todo punto. En consecuencia, no podríamos proponer como solución de la ecuación de onda a la función

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(f_E(x+ct) + f_E(x-ct))$$

Para resolver esta situación utilizaremos la serie de Fourier en Senos de  $f(x)$ . Más precisamente, por el Teorema 5.33, podemos expresar a  $f(x)$  como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall x \in [0, L]$$

Con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Entonces, si tomamos

$$F(x) = \frac{1}{2} S_k(x)$$

Donde  $S_k(x)$  es la  $k$ -ésima suma parcial de la Serie de Fourier en Senos de  $f(x)$ , es decir,

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

De esta manera,  $F$  es dos veces diferenciable y periódica, de período  $2L$ . Luego, la función

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(S_k(x + ct) + S_k(x - ct))$$

Es una solución de la ecuación de onda pues

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(S_k''(x + ct) + S_k''(x - ct))$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{2}(S_k''(x + ct) + S_k''(x - ct))$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Por otro lado,  $y(x, t)$  satisface las condiciones de borde:

$$y(0, t) = \frac{1}{2}(S_k(0 + ct) + S_k(0 - ct)) = \frac{1}{2}(S_k(ct) + S_k(-ct)) =$$

$$= \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi ct}{L}\right) = \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) - \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = 0$$

$$y(L, t) = \frac{1}{2}(S_k(L + ct) + S_k(L - ct)) = \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(L + ct)}{L}\right) + \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(L - ct)}{L}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^k b_n \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + \sum_{n=1}^k b_n \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(-\frac{n\pi ct}{L}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^k b_n \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) - \sum_{n=1}^k b_n \cos(n\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) = 0$$

Sin embargo,  $y(x, t)$  "casi" verifica las condiciones iniciales pues

$$y_t(x, t) = \frac{1}{2}c(S_k'(x + ct) - S_k'(x - ct)) \text{ entonces } y_t(x, 0) = \frac{1}{2}c(S_k'(x) - S_k'(x)) = 0.$$

Pero, si  $k$  es suficientemente grande,

$$y(x, 0) = \frac{1}{2}(S_k(x + 0) + S_k(x - 0)) = \frac{1}{2}(S_k(x) + S_k(x)) = S_k(x) =$$

$$= \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \approx \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x).$$

Es decir,

$$y(x, 0) \approx f(x)$$

Esta última expresión es bastante satisfactoria a la hora de modelar el movimiento vibratorio de una cuerda punteada y por esta razón la solución

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(S_k(x + ct) + S_k(x - ct))$$

se considera aceptable para estos casos.  
Resumiremos esta información enunciando el siguiente teorema:

**TEOREMA 6.7:**

Dada la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

con condiciones de borde

$$\begin{cases} y(0, t) = 0 \\ y(L, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

y condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{para } 0 \leq x \leq L$$

Donde  $f$  es continua en  $[0, L]$ . Sea  $S_k(x)$  la  $k$ -ésima suma parcial de la Serie de Fourier en Senos de  $f(x)$ , es decir,

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{con } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n x}{L}\right) dx$$

Entonces la función

$$y(x, t) = \frac{1}{2}(S_k(x + ct) + S_k(x - ct))$$

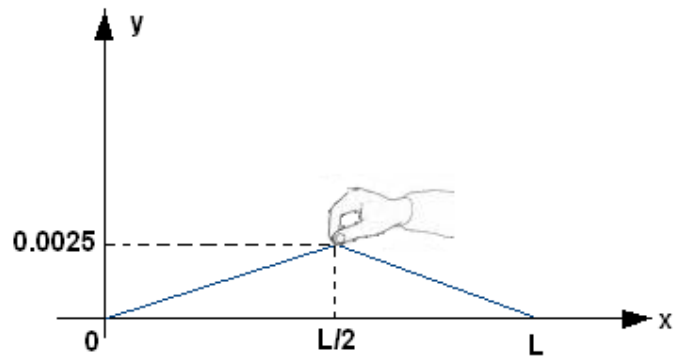
Es una solución de la ecuación de onda. Además, satisface las condiciones de borde y verifica

$$\begin{cases} y(x, 0) = f(x) - \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{para } 0 \leq x \leq L \\ y_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Veremos a continuación un ejemplo de aplicación en relación a este caso:

**Ejemplo 6.7:**

La cuerda de un instrumento musical tiene longitud  $L = 1$  m. y coeficiente  $c^2 = 74500$  Newton.m/ Kg. En el instante  $t = 0$  la velocidad de la cuerda es nula y se encuentra en la siguiente posición:



Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{0.005}{L} x & \text{si } 0 \leq x \leq L/2 \\ \frac{0.005}{L} (L - x) & \text{si } L/2 \leq x \leq L \end{cases}$$

a) Hallar una solución de la ecuación de la cuerda vibrante utilizando la vigésima suma parcial de la serie de Fourier en Senos de la función posición inicial.

b) Graficar en un mismo sistema de coordenadas  $f(x)$ , la posición inicial de la cuerda, y su aproximación mediante la vigésima suma parcial de la serie de Fourier en Senos de  $f(x)$ .

c) Representar gráficamente la forma que va adquiriendo la cuerda, desde  $t = 0$  seg. hasta  $t = 2$  seg. y tomando intervalos de tiempo de 0.1 seg.

d) Graficar la velocidad de cada punto de la cuerda, desde  $t = 0$  seg. hasta  $t = 2$  seg. y tomando intervalos de tiempo de 0.1 seg.

Resolución:

a) Del Teorema 6.7 resulta que

$$y(x, t) = \frac{1}{2} (S_{20}(x + ct) + S_{20}(x - ct))$$

Es una solución de la ecuación de onda, donde

$$S_{20}(x) = \sum_{n=1}^{20} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{y} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

b) Escribimos los siguientes comandos en Mathematica:

**L = 1;**

**C =  $\sqrt{74500}$  ;**

**f [x\_] = Which [ 0 < x < L/2,  $\frac{0.005}{L} x$  , L/2 < x < L,  $-\frac{0.005}{L} x + 0.005$  ] ;**

$$b [n_] = \frac{2}{L} \int_0^{L/2} \frac{0.005}{L} x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{L/2}^L -\frac{0.005}{L} x + 0.005 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx ;$$

$$S20 [x_] = \sum_{n=1}^{20} b [n] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) ;$$

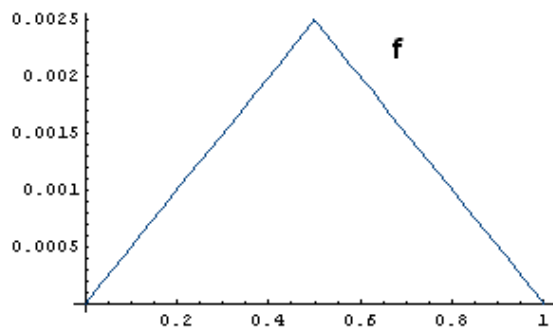
**Gra1 = Plot [ f [x] , { x, 0, L } ] ;**

**Gra2 = Plot [ S20 [x] , { x, 0, L } ] ;**

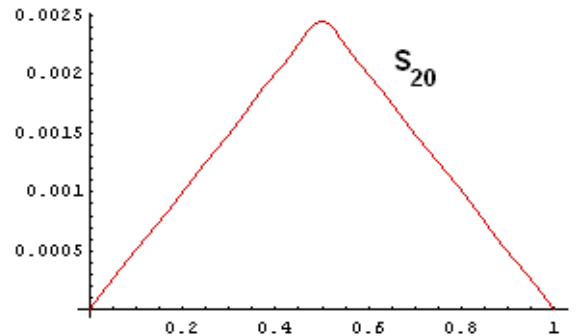


Show [ Gra1, Gra2 ] ;

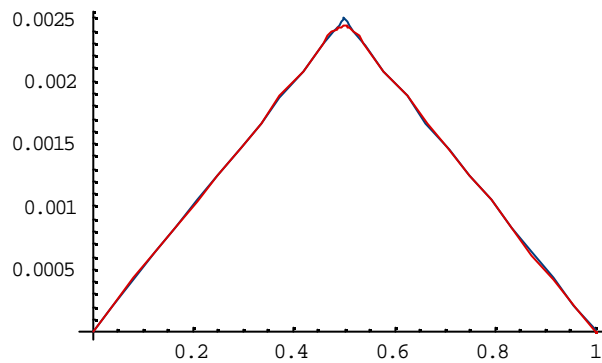
Al ejecutarlos, aparecerán las siguientes gráficas:



(a)



(b)



(c)

Figura: (a) Gráfica de  $f(x)$ , la posición inicial de la cuerda. (b) Gráfica de  $S_{20}$ , la vigésima suma parcial de la serie de Fourier en senos de  $f(x)$ . (c) Gráficas de  $f$  y  $S_{20}$  en un mismo sistema de coordenadas.

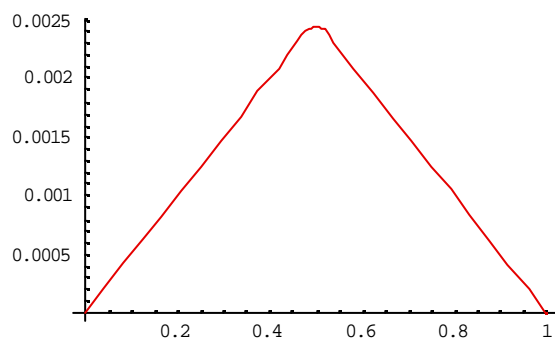
Éstas nos permiten corroborar que  $S_{20}(x)$  es una buena aproximación de  $f(x)$ .

c) Escribimos los comandos:

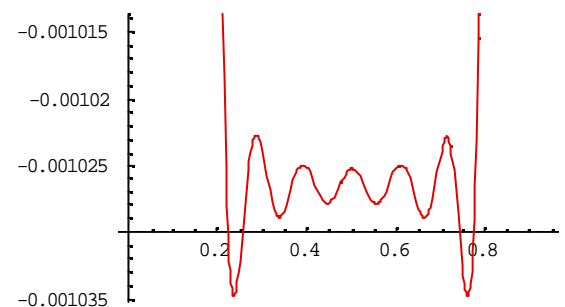
$$y[x_-, t_-] = \frac{1}{2} (S20[x + Ct] + S20[x - Ct])$$

For [ t = 0, t ≤ 2, t = t + 0.1, Plot [ y[x, t], { x, 0, L } ] ]

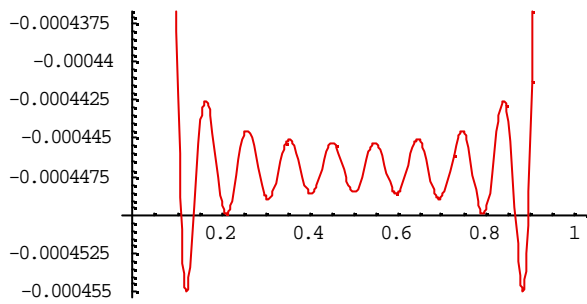
Las diferentes formas que va adquiriendo la cuerda a lo largo del tiempo son las siguientes:



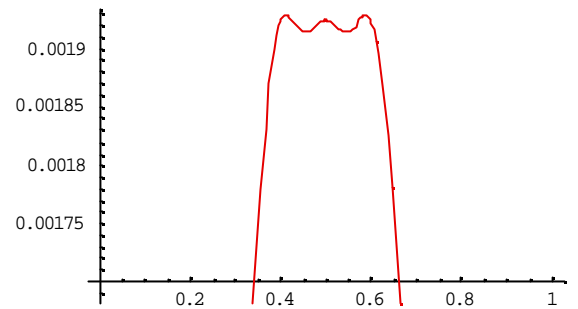
(a) Al tiempo  $t = 0$  seg.



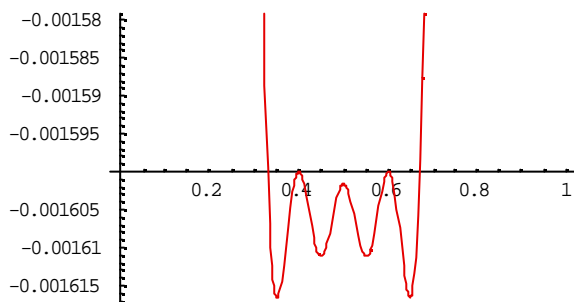
(b) Al tiempo  $t = 0.1$  seg.



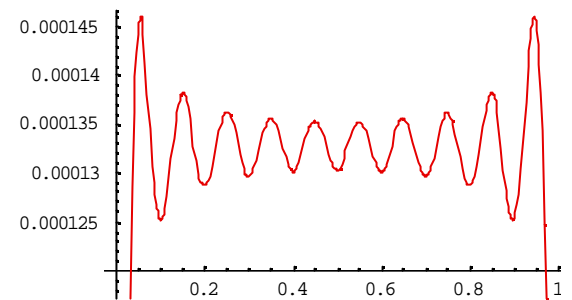
(c) Al tiempo  $t = 0.2$  seg.



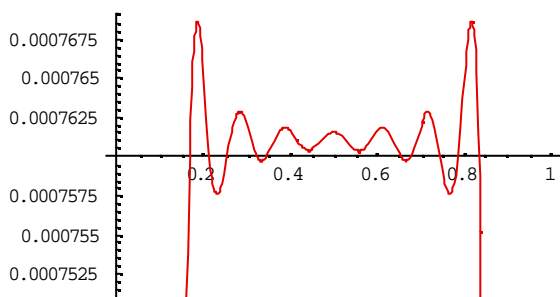
(d) Al tiempo  $t = 0.3$  seg.



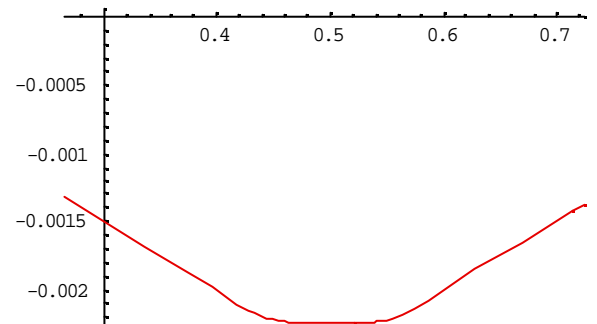
(e) Al tiempo  $t = 0.4$  seg.



(f) Al tiempo  $t = 0.5$  seg.



(g) Al tiempo  $t = 0.9$  seg.



(h) Al tiempo  $t = 1$  seg.

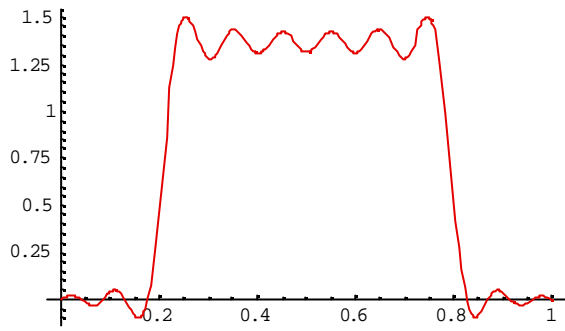
d) Para determinar la velocidad de la cuerda, derivamos respecto de  $t$  la función  $y(x, t)$ . Es decir, calculamos

$$y_t(x, t) = \frac{1}{2}c (S'_{20}(x+ct) - S'_{20}(x-ct))$$

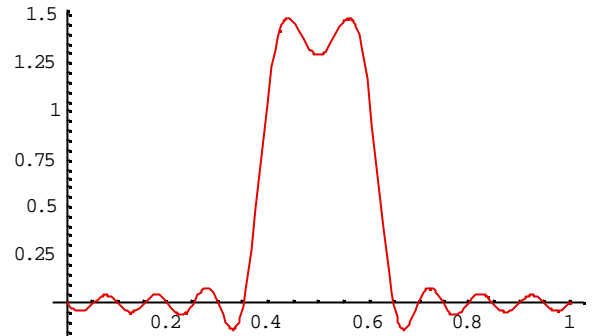
Para ello ejecutamos los comandos:

$$v[x\_ , t\_ ] = \frac{1}{2}C ( S20'[x + C t] - S20'[x - C t] );$$

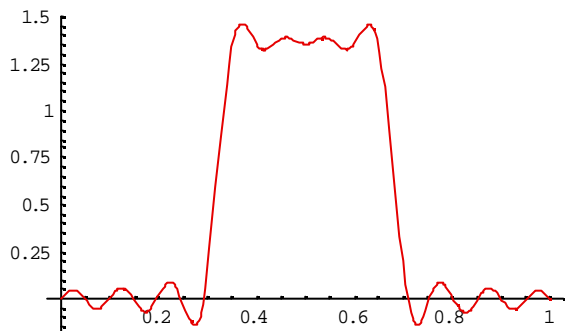
For [  $t = 0, t \leq 2, t = t + 0.1$ , Plot [  $v[x, t], \{x, 0, L\}$  ] ]



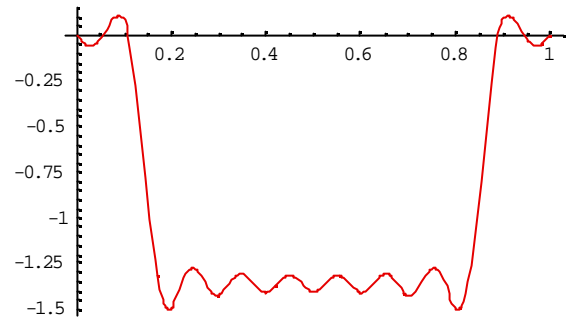
(a) Al tiempo  $t = 0.1$  seg.



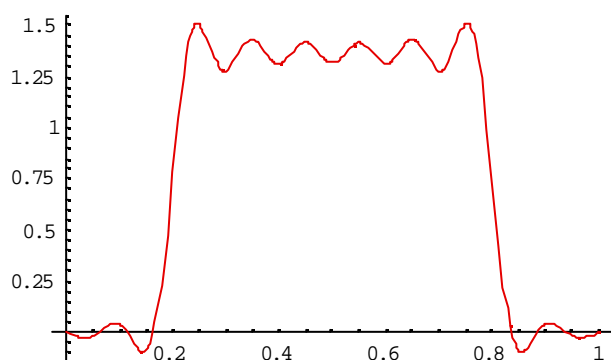
(b) Al tiempo  $t = 0.3$  seg.



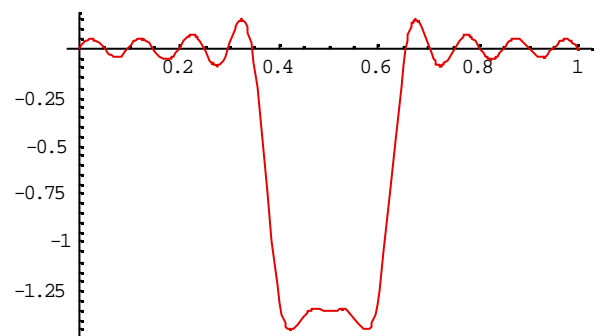
(c) Al tiempo  $t = 0.4$  seg.



(d) Al tiempo  $t = 0.8$  seg.



(e) Al tiempo  $t = 1.4$  seg.



(f) Al tiempo  $t = 1.8$  seg.

El signo de la velocidad nos revela el sentido de movimiento de cada punto de la cuerda: velocidad positiva indica desplazamiento hacia la derecha (en el mismo sentido que el semieje  $x$  positivo) mientras que velocidad negativa muestra que el punto se está desplazando hacia la izquierda (sentido contrario al semieje  $x$  positivo). ■

La búsqueda de la solución de la Ecuación de Onda propuesta por D'Alembert se dificulta si la velocidad inicial de la cuerda es no nula. Por esta razón, en el capítulo siguiente, nos concentraremos en el estudio de la Ecuación de Onda de los instrumentos de cuerda basándonos en la solución en forma de serie formulada en el Teorema 6.4. Además, como veremos, cada término de la serie tendrá un significado fácil de interpretar, vinculado con el sobretono y timbre de un instrumento.

**CAPÍTULO VII**  
**LA ECUACION DE ONDA EN LOS INSTRUMENTOS DE CUERDA**



## 7.1 Introducción

En este capítulo nos detendremos a analizar matemáticamente el sonido producido por la cuerda de un instrumento musical.

Cuando una cuerda vibra con una frecuencia dada, las moléculas del aire comenzarán también a hacerlo con la misma frecuencia y longitudinalmente, es decir, en la misma dirección de propagación de la onda mecánica provocada por la cuerda.

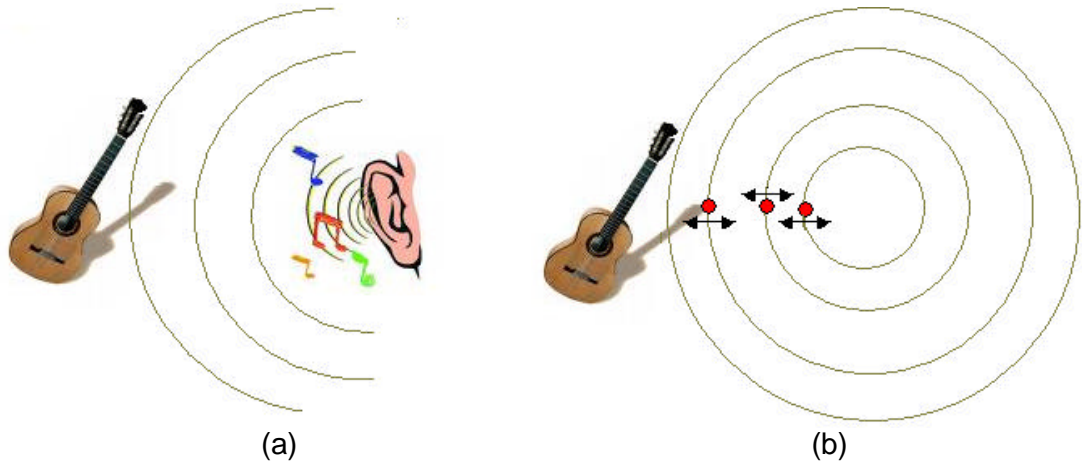


Figura: (a) Ondas sonoras producidas por un instrumento de cuerda.  
(b) moléculas de aire vibrando longitudinalmente.

Podemos imaginar a las moléculas vibrando como si fuesen una serie de pequeñas pesas interconectadas por resortes: al apartarlas de su posición de equilibrio se moverán longitudinalmente, siguiendo la misma dirección de movimiento que el de los resortes.

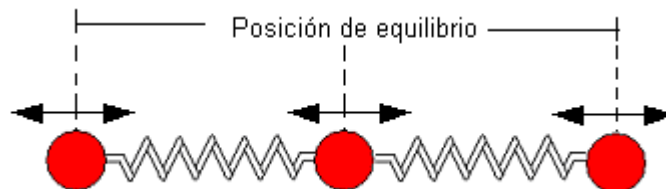


Figura: Moléculas de aire vibrando como si fuesen pesas unidas a resortes.

Las moléculas, al vibrar, producen variaciones periódicas en la presión del aire, las cuales son percibidas por nuestros oídos. Dichas variaciones reciben el nombre de **ondas sonoras**, pues son las que ocasionan que el oído escuche un determinado sonido.

En definitiva, lo que el oído detecta son las variaciones en la presión del aire producidas por las vibraciones de una cuerda.

El hecho de que las moléculas de aire se muevan de la misma forma y frecuencia con que lo hace la onda propagada por la cuerda de un instrumento musical, nos permitirá relacionar la solución de la ecuación de onda de la cuerda vibrante con el sonido que ésta origina. En la siguiente sección veremos cómo hacerlo.

## 7.2 La ecuación de onda en los instrumentos de cuerda

Si tomamos la cuerda de un instrumento musical y la desplazamos hasta una determinada posición para luego soltarla, cada punto  $x$  de la misma comenzará a vibrar, es decir, se desplazará alternativamente hacia uno y otro lado de su posición de equilibrio.

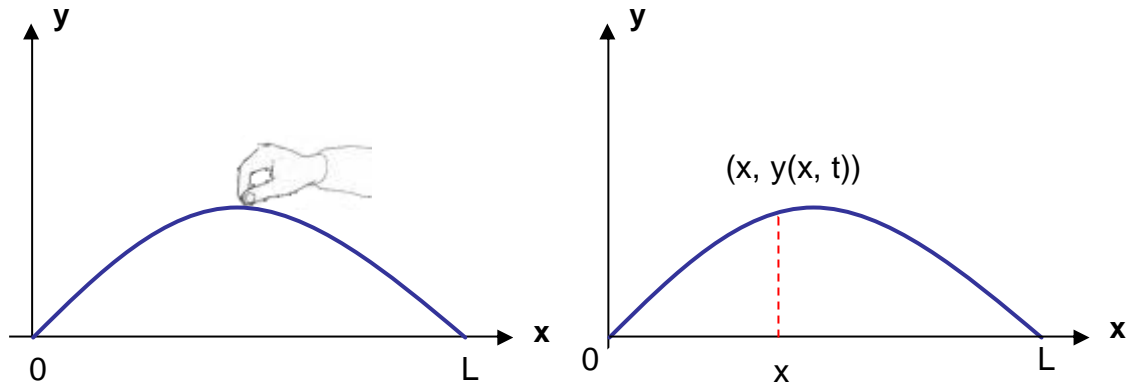


Figura: Desplazamiento de una cuerda de un instrumento musical

Según lo desarrollado en el Capítulo VI, el movimiento vibratorio de la cuerda quedará completamente determinado si designamos como  $y(x, t)$  a la función posición o altura del punto  $x$  de la cuerda, en el instante  $t$ . Dicha función es solución de la ecuación de onda

$$y_{tt}(x, t) = c^2 y_{xx}(x, t)$$

Donde

$$c = \sqrt{\frac{|T|}{\rho}}$$

$|T|$  = tensión de la cuerda.

$\rho$  = densidad lineal de la cuerda.

Es decir, el valor de  $c$  depende de las características de la cuerda de cada instrumento. En una cuerda de guitarra, por ejemplo,

$|T| = 74.5$  Newtons.

$\rho = 10^{-3}$  Kg./m.

Del Teorema 6.4 sabemos, bajo ciertas hipótesis, que  $y(x, t)$  tiene la siguiente expresión en forma de serie:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \right) \quad (1)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n=1,2,\dots$$

donde  $f(x)$  es la posición inicial de la cuerda y  $g(x)$  su velocidad inicial.

El  $n$ -ésimo término de la serie es

$$u_n(x, t) = \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \left( A_n \cos\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) + B_n \text{sen}\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) \right)$$

Y recibe el nombre de **onda permanente**. Si se mide el tiempo en segundos, la onda permanente tiene un período

$$P_n = \frac{2L}{nc} \text{ seg.}$$

y recupera su perfil sinusoidal inicial

$$u_n(x, 0) = \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) A_n \quad \text{en el instante } t = k \frac{2L}{nc} \text{ seg. para todo entero } k.$$

La frecuencia de  $u_n$  es el recíproco del período:

$$f_n = \frac{1}{P_n} = \frac{nc}{2L} \frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} \quad (\text{o Hertz})$$

Las  $f_n$  reciben el nombre de **frecuencias naturales**.

Los puntos de la forma  $x = k L / n$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  son puntos en reposo o **odos** de la onda permanente  $u_n$ . Son llamados así pues  $u_n(x, \frac{kL}{n}) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$ .

En el siguiente ejemplo veremos el aspecto de la gráfica de algunas ondas permanentes:

### **Ejemplo 7.1:**

La posición inicial de una cuerda de guitarra de longitud  $L = 1$  m. se expresa a través de la función  $f(x) = -0.008 x(x-1)$ . En el instante inicial la velocidad de la cuerda es nula. Considerar  $c = \sqrt{74500}$ .

- Hallar la expresión general de la onda permanente.
- Representar gráficamente la onda permanente correspondiente a  $n = 1$ , para valores de tiempo  $t = 0, 1, 2$  y  $3$  seg.
- Representar gráficamente la onda permanente correspondiente a  $n = 5$ , para  $t = 0, 1, 2$  y  $3$  seg.

### **Resolución:**

a) Como la velocidad inicial de la cuerda es  $g(x) = 0$ , resulta  $B_n = 0$  para todo  $n$ . Luego,

$$u_n(x, t) = \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \left( A_n \cos\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) + B_n \text{sen}\left(\frac{n \pi c t}{L}\right) \right) = \text{sen}(n \pi x) A_n \cos(n \pi \sqrt{74500} t)$$

Por otro lado,

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx = -0.32 \left( \frac{-1 + (-1)^n}{n^3 \pi^3} \right)$$

En consecuencia,

$$u_n(x, t) = -0.32 \text{sen}(n \pi x) \left( \frac{-1 + (-1)^n}{n^3 \pi^3} \right) \cos(n \pi \sqrt{74500} t)$$

b) La onda permanente  $u_1$  para valores de  $t = 0, 1, 2$  y  $3$  seg. se muestran en el siguiente gráfico:



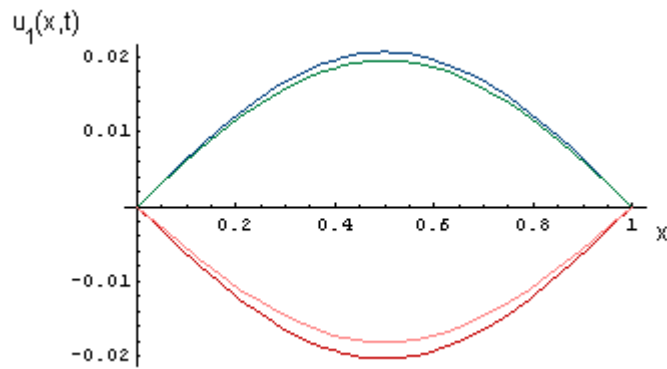


Figura: Gráfica de la onda permanente  $u_1$  para distintos valores de tiempo.  
Azul:  $t = 0$  seg. Rojo:  $t = 1$  seg. Verde:  $t = 2$  seg. Fucsia:  $t = 3$  seg.

c) La onda permanente  $u_5$  para valores de  $t = 0, 1, 2$  y  $3$  seg. es la siguiente:

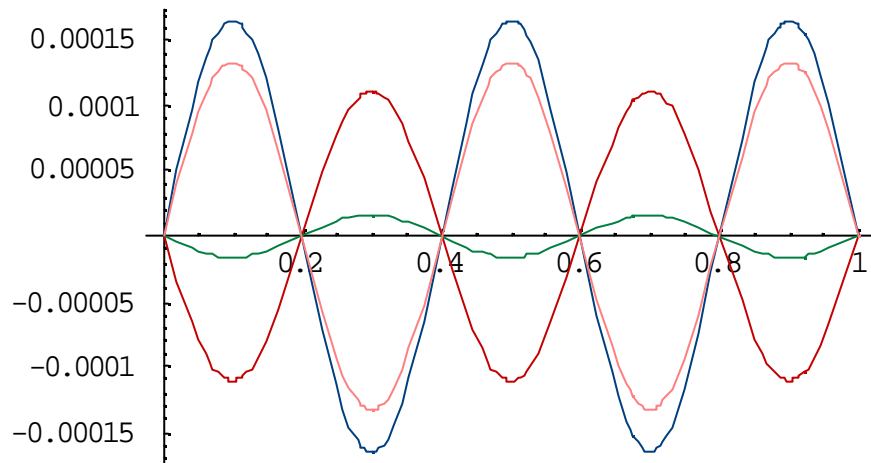


Figura: Gráfica de la onda permanente  $u_5$  para distintos valores de tiempo.  
Azul:  $t = 0$  seg. Rojo:  $t = 1$  seg. Verde:  $t = 2$  seg. Fucsia:  $t = 3$  seg.

Las ondas permanentes son también llamadas **n-ésimo sobretono** o **n-ésimo armónico** debido a su asociación con los tonos de los instrumentos musicales. La onda permanente

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left( A_n \cos\left(\frac{\pi c t}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi c t}{L}\right) \right)$$

Se llama **fundamental** o **primer armónico**. Su frecuencia es

$$f_1 = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Recibe el nombre de **frecuencia fundamental** pues es el que predomina en el sonido que escuchamos. Observar que, al variar la longitud de la cuerda, se obtienen diferentes frecuencias y en consecuencia, diferentes notas musicales. Según la fórmula de la frecuencia fundamental, ésta es directamente proporcional a  $\sqrt{|T|}$  e inversamente proporcional a  $L$  y a  $\sqrt{\rho}$ . De modo que podemos duplicar la frecuencia (y por lo tanto obtener un tono fundamental que

será una **octava** más alto) ya sea sacando la mitad a la longitud **L** o cuadruplicando la tensión **T**.

Los n-ésimos armónicos (para  $n \geq 2$ ) están relacionados con el **timbre**, que es el conjunto de sonidos que acompañan al primer armónico. El timbre es lo que diferencia, por ejemplo, el sonido de un violín al de una guitarra. Los n-ésimos armónicos tienen frecuencia

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

Que resultan ser múltiplos de la frecuencia fundamental, y ésta es la razón por la cual el sonido de una cuerda vibrante suena armoniosamente en lugar de disonante.

Observar que las condiciones iniciales de la cuerda no afectan la expresión de la frecuencia fundamental; por el contrario, intervienen en la expresión de los sobretonos, los cuales contribuyen al sonido producido. (Técnicamente esto es verdad sólo para pequeños desplazamientos de la cuerda, ya que si se golpea fuertemente la tecla de un piano se podrá apreciar una ligera desviación de la frecuencia acostumbrada de la nota).

El siguiente gráfico ilustra, con los mismos datos que el Ejemplo 7.1, los diferentes sobretonos en el instante  $t = 0.5$  seg.

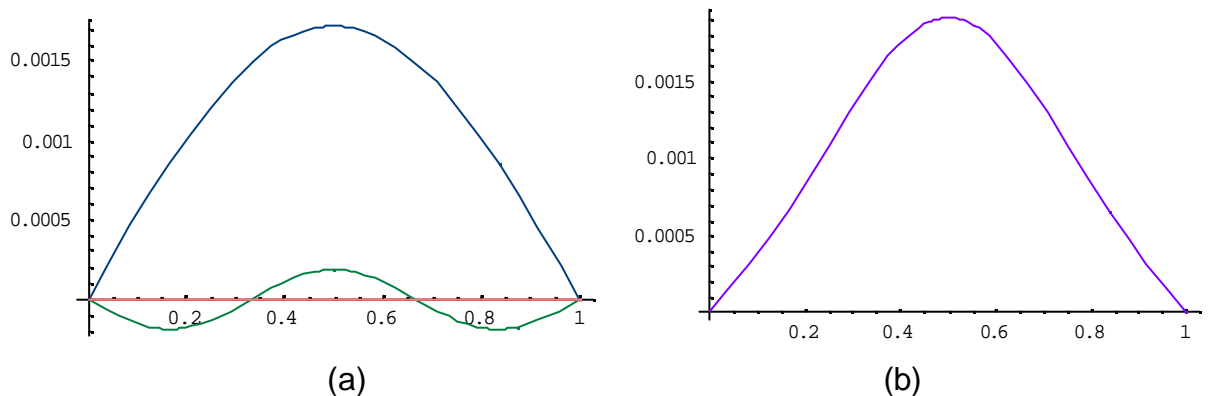


Figura: (a) Gráfica de armónicos para  $t = 0.5$  seg. Azul: Primer armónico Rojo: Segundo armónico. Verde: Tercer armónico. (b) Gráfica de la onda como suma de primero, segundo y tercer armónicos.


**ANEXO**

**APLICACIONES DEL ANÁLISIS DE FOURIER EN ECUACIONES  
DE ONDAS**

## Introducción

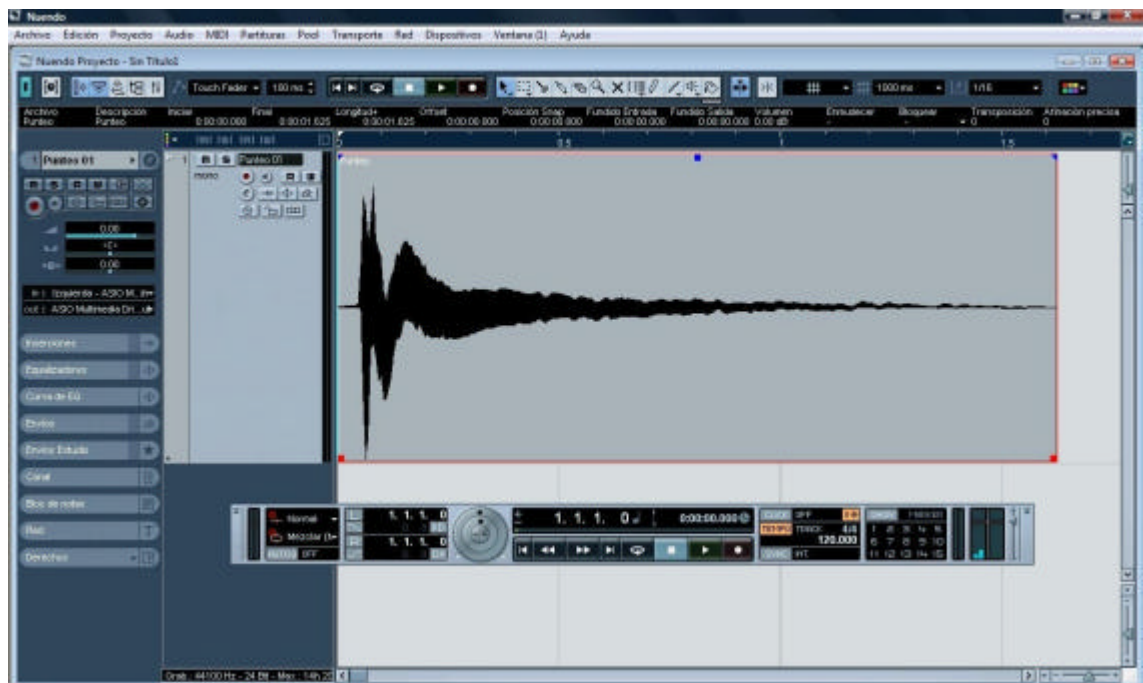
En este apartado utilizaremos todo lo anteriormente explicado para analizar el sonido producido por el punteo de una guitarra. Tomaremos el sonido en cuestión y obtendremos la descomposición de sus armónicos para aislarlos y proceder a la emulación de cada uno de ellos.

## Análisis de Fourier del Punteo de una Guitarra

Comenzaremos analizando el sonido que produce una cuerda punteada en una guitarra. El sonido al que hacemos referencia es el siguiente  Punteo.wav

Para conocer la forma de la onda generada por el sonido en cuestión, podemos usar cualquier software de edición musical. Hemos elegido el software Nuendo de Steinberg, por la calidad de los algoritmos utilizados por el programa. Una alternativa muy buena para este paso es utilizar el software Audacity, debido a que es de libre uso, multiplataforma y fácil de utilizar.

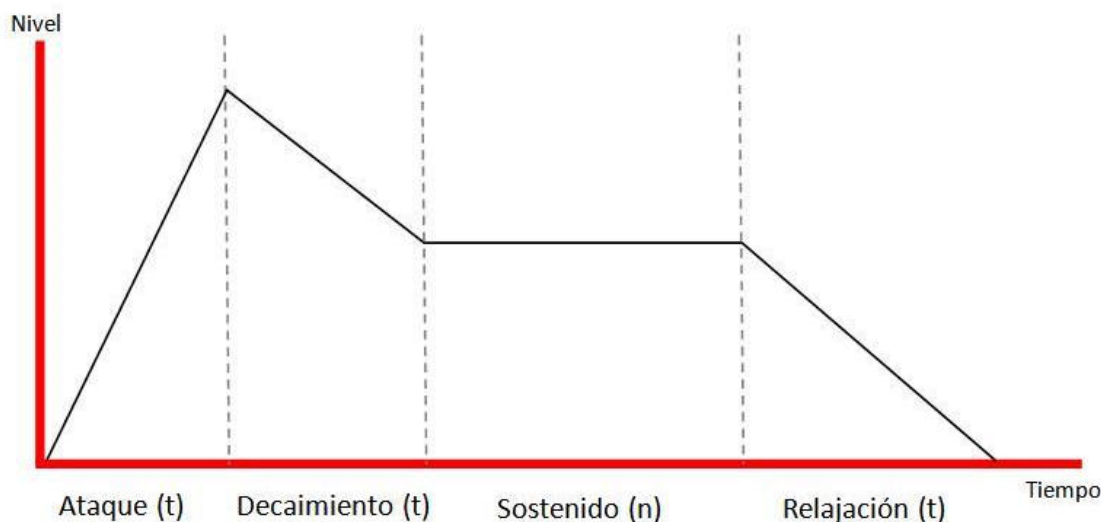
Si incorporamos el sonido en una pista de audio, podremos visualizar la envolvente del sonido, que es una curva circundante que delimita tangencialmente a las amplitudes que define un sonido a lo largo del tiempo.



Aquí lo que se aprecia con claridad es que el sonido presenta una primera etapa de crecimiento casi inmediato, seguido de una atenuación que continúa

hasta que el sonido se apaga. Esto tiene que ver con cualidades del instrumento en sí, que corresponde a la manera en que interactúan las cuatro etapas de cualquier sonido musical. En síntesis de sonido uno se refiere a estas etapas como **ADSR** (Attack, Decay, Sustain, Release).

La interrelación de estas etapas y su duración en el tiempo definen cómo será el sonido.



Los parámetros de una envolvente ADSR son:

**Ataque:** Es el **tiempo** que la envolvente tarda en llegar desde el nivel *cero* hasta el nivel *máximo*.

Si una envolvente se usa para afectar a la amplitud, entonces el ataque es el tiempo que transcurre desde que una tecla es presionada hasta que el sonido alcanza su nivel máximo de volumen. Estos tiempos son de unos cuantos milisegundos, y entre más corto sea (como en nuestro caso), más percusivo será el sonido, entre más largo sea, más suave será el sonido, al estilo violines o cellos.

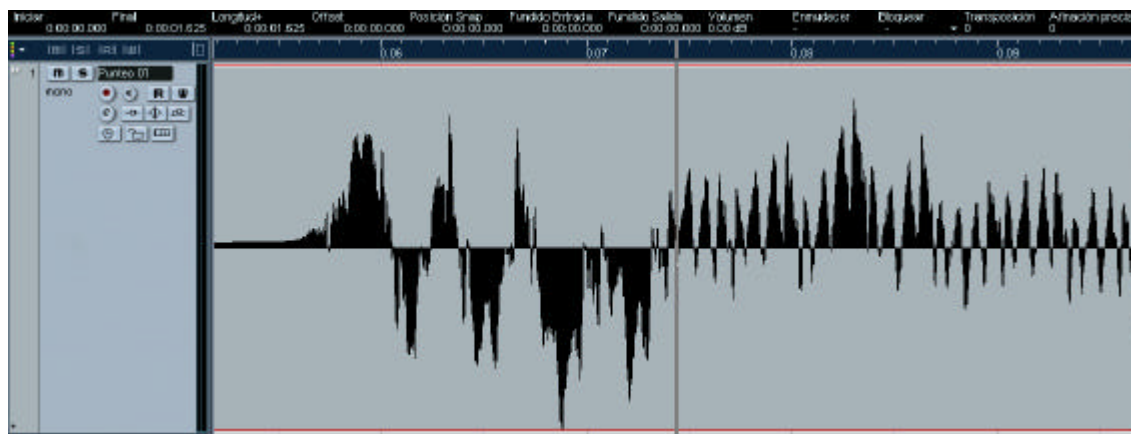
**Decaimiento:** Es el **tiempo** que la envolvente tarda en descender desde su nivel *máximo* hasta el *nivel de sostenimiento*, el cual también es definido por la envolvente.

**Sostenimiento:** A diferencia de los otros parámetros de una ADSR el sostenimiento **no es tiempo, sino un nivel**. Es el nivel que conservará la envolvente mientras esté activa. En la mayoría de sintetizadores esto significa que el *sostenimiento* es el nivel que la envolvente mantendrá mientras la tecla esté presionada.

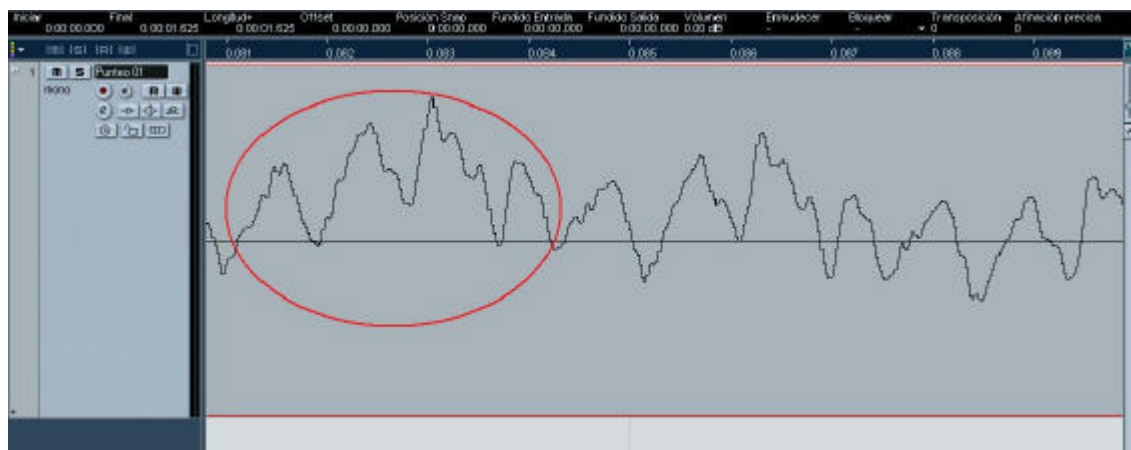
**Relajación:** También llamada desvanecimiento, es el tiempo que la envolvente tarda en descender desde el nivel de *sostenimiento*, hasta el nivel *cero*. Usualmente una envolvente pasa por su etapa de relajación después de que la tecla presionada es liberada.

Si ampliamos el sonido, ya comenzaremos a notar ciertas formas que se repiten en forma periódica. Aquí, por ejemplo, mostramos tres ampliaciones en la visualización del sonido.

En esta primera ampliación notaremos claramente las fases del sonido, y cómo alternan las mismas. Se puede apreciar que hemos pasado del sonido completo a una ampliación en la que en la escala superior se está trabajando con centésimas de segundo.



Aquí ya estamos trabajando en el orden de las milésimas de sonido, y ya comienzan a notarse claramente cuatro grupos de ondas que se repiten periódicamente. Hemos encerrado un grupo de estas cuatro notas en un círculo para una mejor comprensión.



El mayor pico que se registra en cada grupo, corresponde al cuarto armónico de la nota ejecutada, como se verá claramente en el análisis espectral que se realiza a continuación.

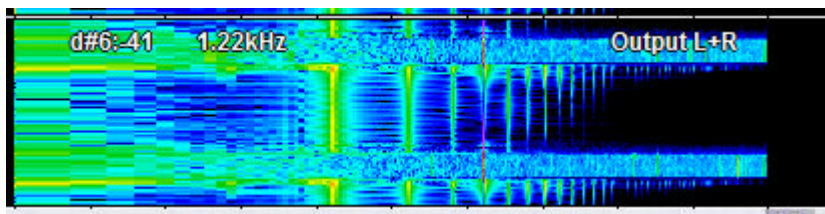
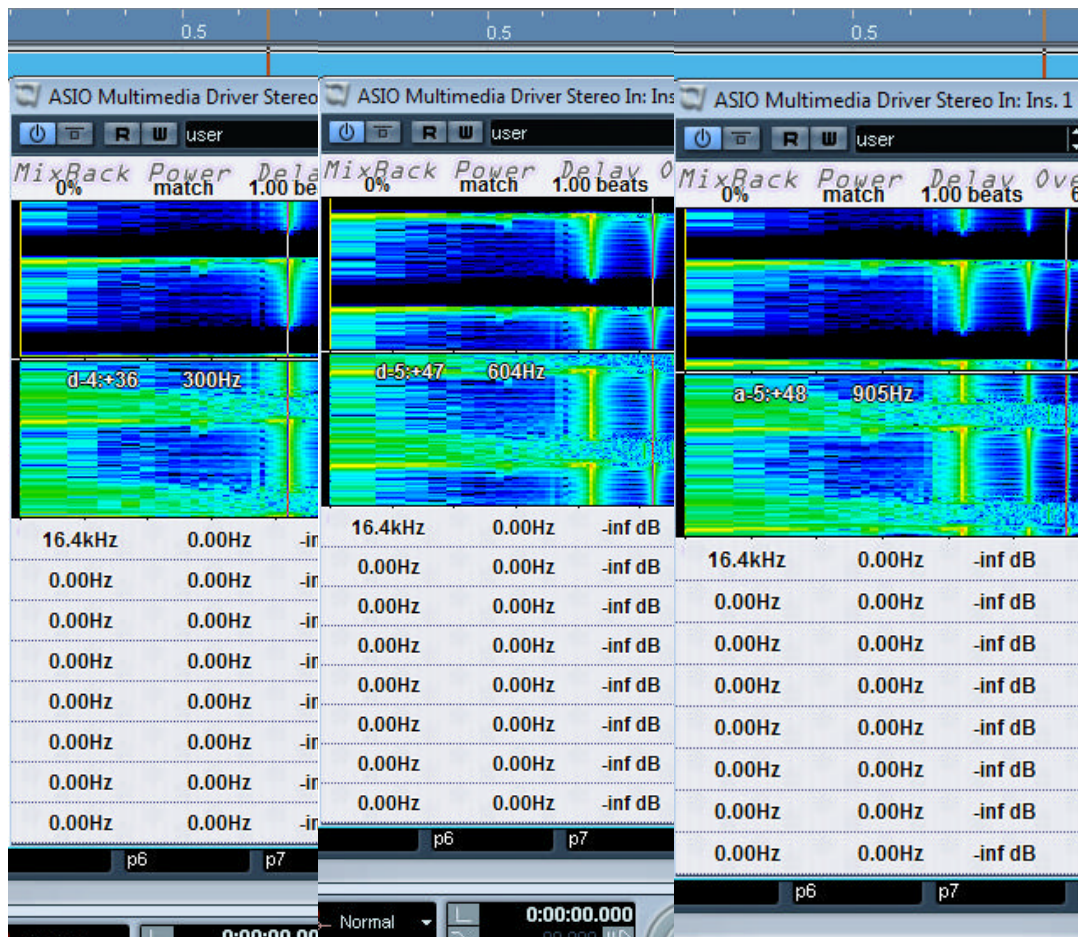
La imagen corresponde al espectro del sonido con el que estamos trabajando. Vemos claramente el armónico fundamental y sus múltiplos.

Mediante una extensión del programa, el efecto VST de audio DtBlkFx (Revision 1.1), visualizaremos el espectro de frecuencias, recurso que se utiliza de manera habitual cuando se desea representar la distribución de las frecuencias que intervienen en un sonido.

En la imagen vemos el resultado de procesar nuestro sonido, y en él hemos marcado la frecuencia principal que se distingue. Las siglas VST corresponden a Virtual Studio Technology, y es un formato de plug-ins patentado por la casa Steinberg que nos permite agregar efectos e instrumentos virtuales a nuestras pistas de sonido.

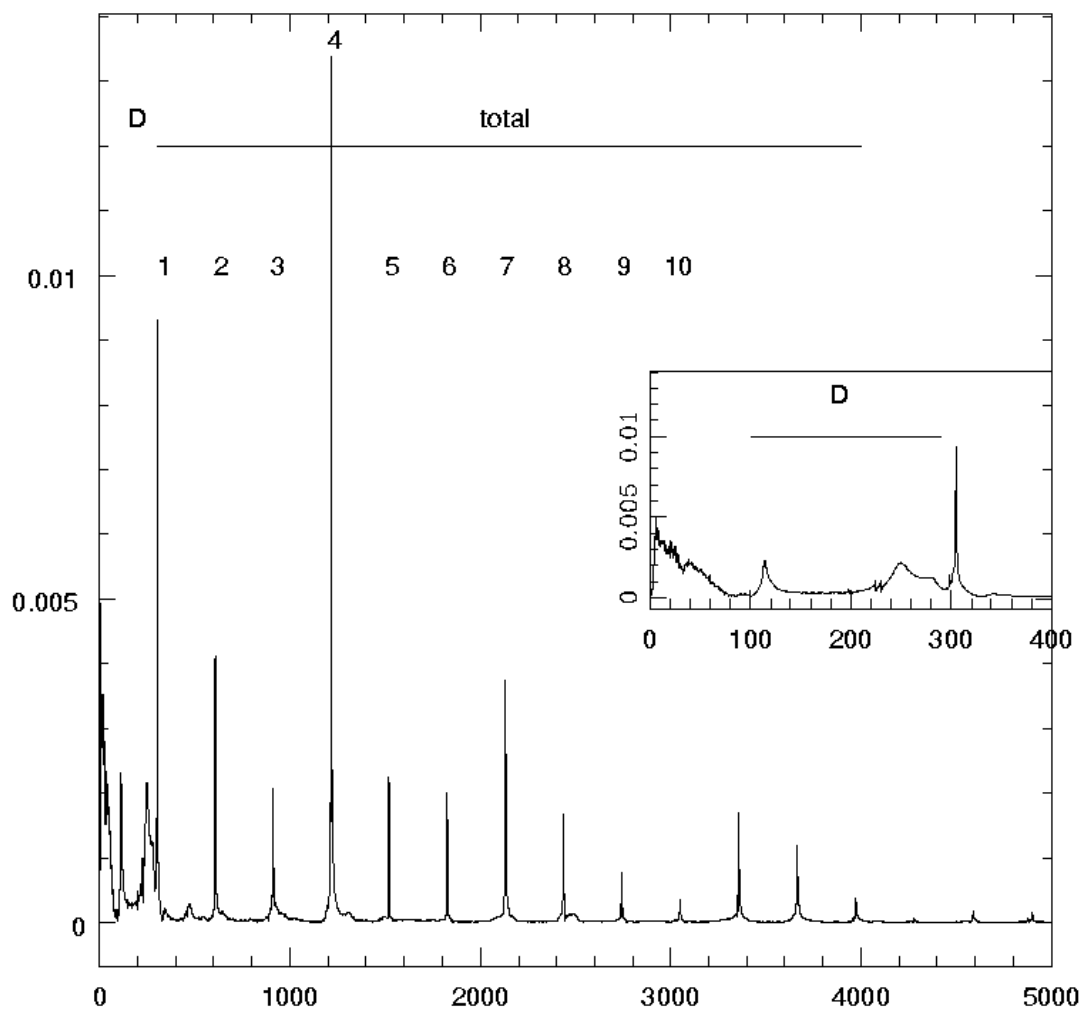


En el círculo señalado en la gráfica, se lee **d4:+36 300 Hz**, lo cual indica la nota (d4, un **RE**) y la frecuencia correspondiente (300 Hz). En las siguientes imágenes se han señalado las frecuencias sobresalientes en el espectro:













A continuación se muestra un diagrama de cómo interactúan los armónicos:



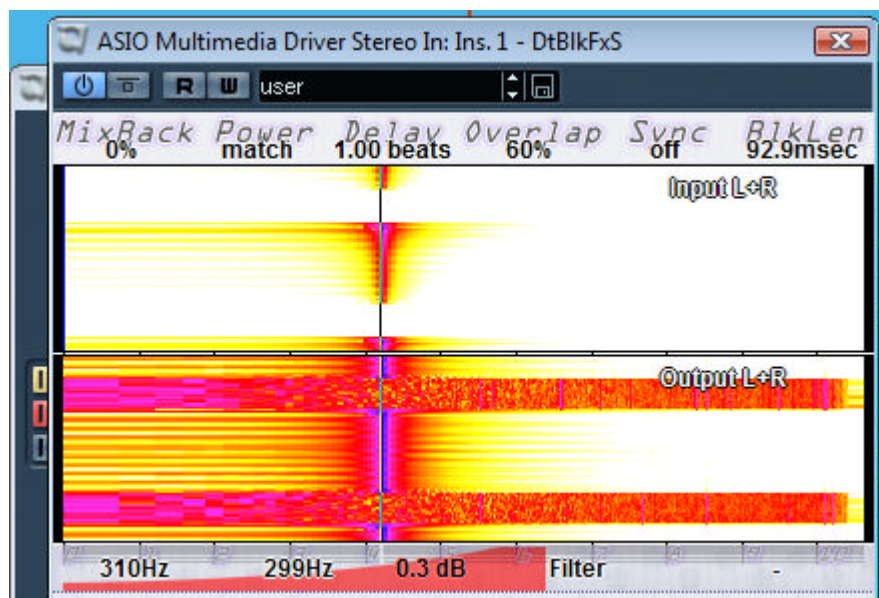


Se puede proceder a aislar cada armónico mediante el uso de los filtros adecuados y un ecualizador de frecuencias. En la siguiente tabla se encuentran los sonidos aislados de cada uno de los primeros diez armónicos, señalados con los números 1 a 10 en la imagen anterior.

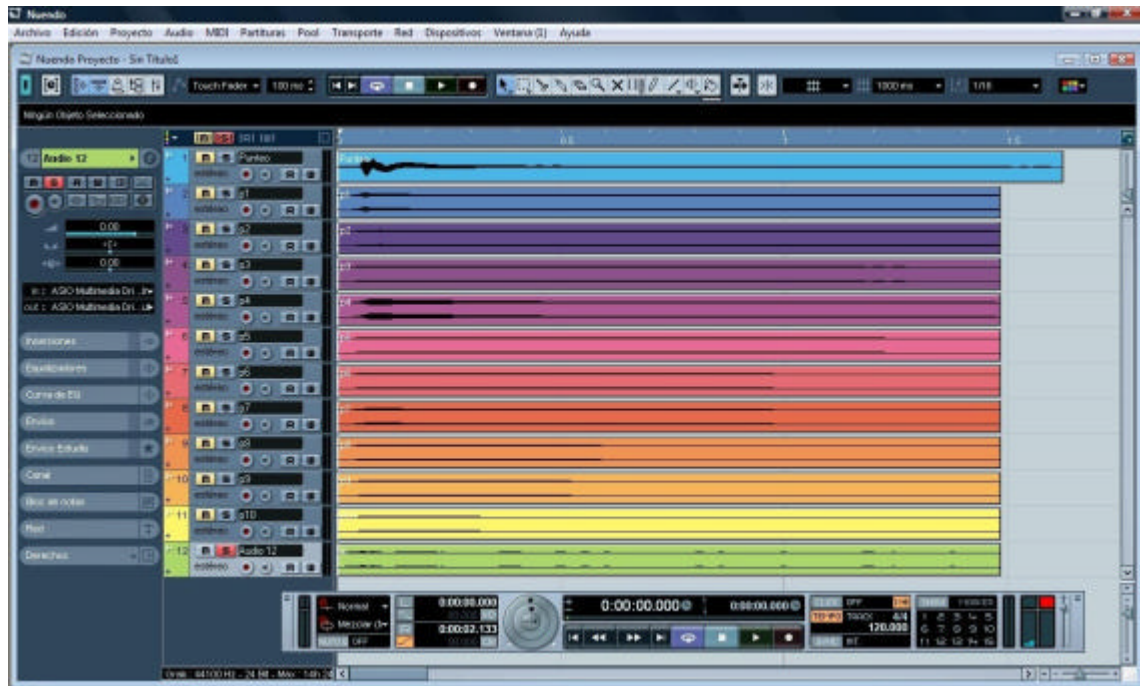
| Armónico | Sonido Aislado                                                                                 |
|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | <br>p1.wav |
| 2        | <br>p2.wav |
| 3        | <br>p3.wav |
| 4        | <br>p4.wav |

|    |                                                                                               |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5  | <br>p5.wav  |
| 6  | <br>p6.wav  |
| 7  | <br>p7.wav  |
| 8  | <br>p8.wav  |
| 9  | <br>p9.wav  |
| 10 | <br>p10.wav |

Si visualizamos el espectro de cada uno de estos archivos, queda claro que no está influido por otros armónicos:



Incorporamos todos estos sonidos en pistas aisladas de nuestro editor de música, lo cual se visualizará de la siguiente manera:



En la imagen anterior se ha coloreado en celeste la pista original de Audio, luego se han numerado p1 a p10, los primeros 10 armónicos que se han aislado. Queda muy claro que hay una gran influencia del cuarto armónico (pista p4) en la totalidad del sonido, seguido por la frecuencia fundamental (p1).

Por último se añade una pista (Audio 12, en color verde claro) en la que se encuentran el remanente del sonido original, una vez que le quitamos el sonido conjunto de los armónicos mencionados. Esta última pista suena de la siguiente manera:

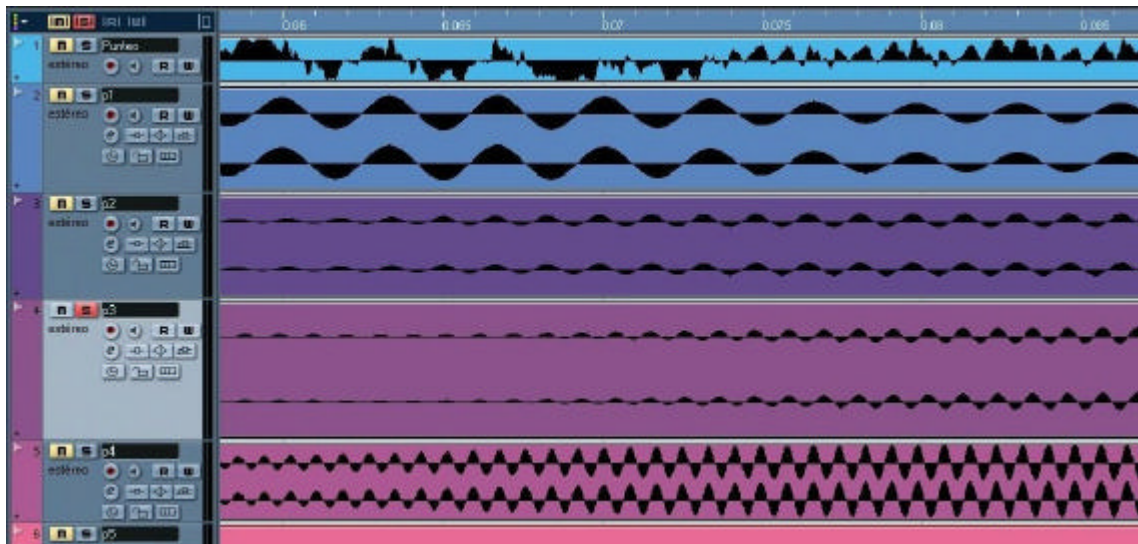


A continuación, se muestra cómo es el sonido conjunto de los primeros 10 armónicos.



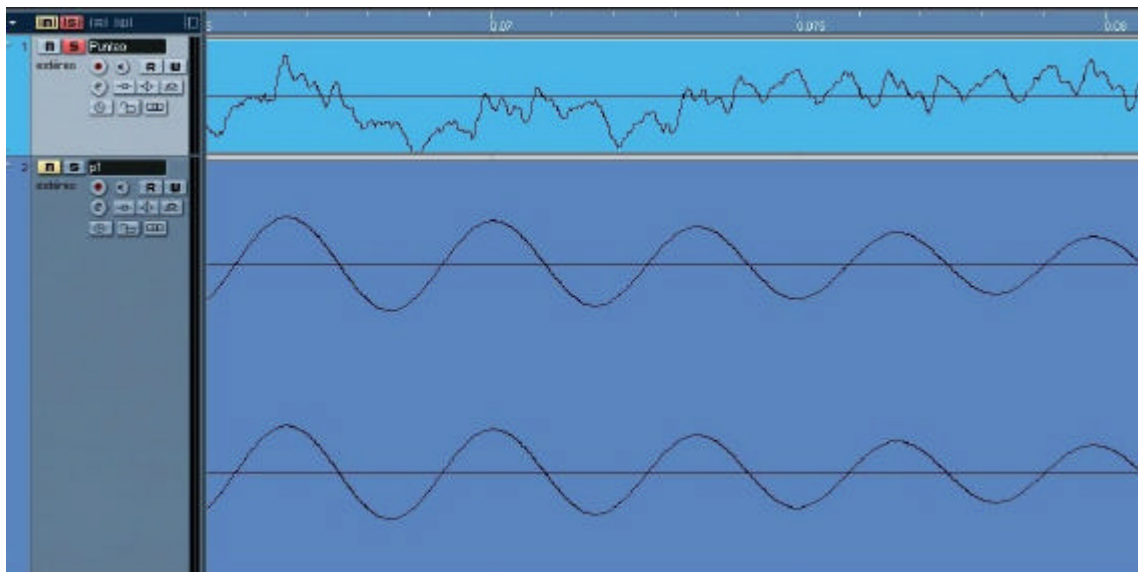
Se trata de una muy buena aproximación al sonido de la guitarra, con la excepción de su comienzo, que queda muy suave, debido a la ausencia del sonido percusivo mostrado en la pista Audio 12.

Si ampliamos convenientemente la vista de los armónicos ya aislados, descubriremos que cada uno de ellos forma ahora una sinusoidal simple!



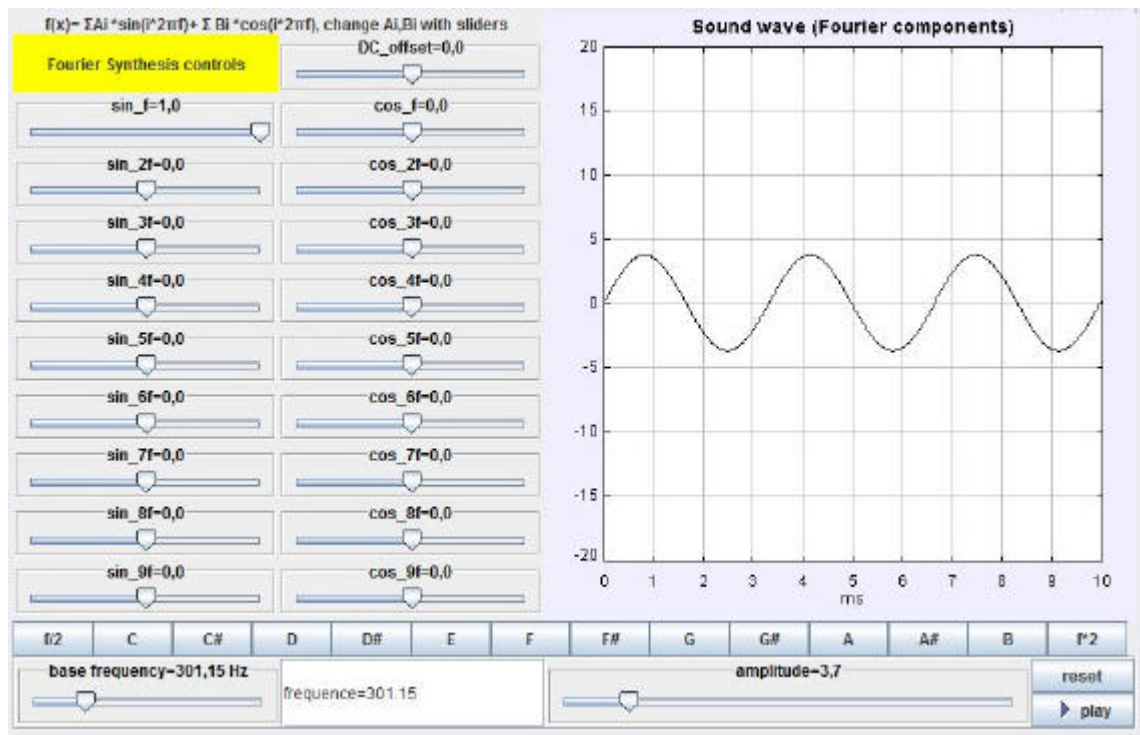
Cada una de estas sinusoidales tiene su propia frecuencia y amplitud, y es la suma de todas ellas la que conforma el sonido final, que se ha dejado en la pista superior (Punteo, en celeste) en la parte superior de la imagen.

Con mayor detalle, a continuación se muestra la onda del sonido completo y la del primer armónico durante el transcurso de unas pocas centésimas de segundo:

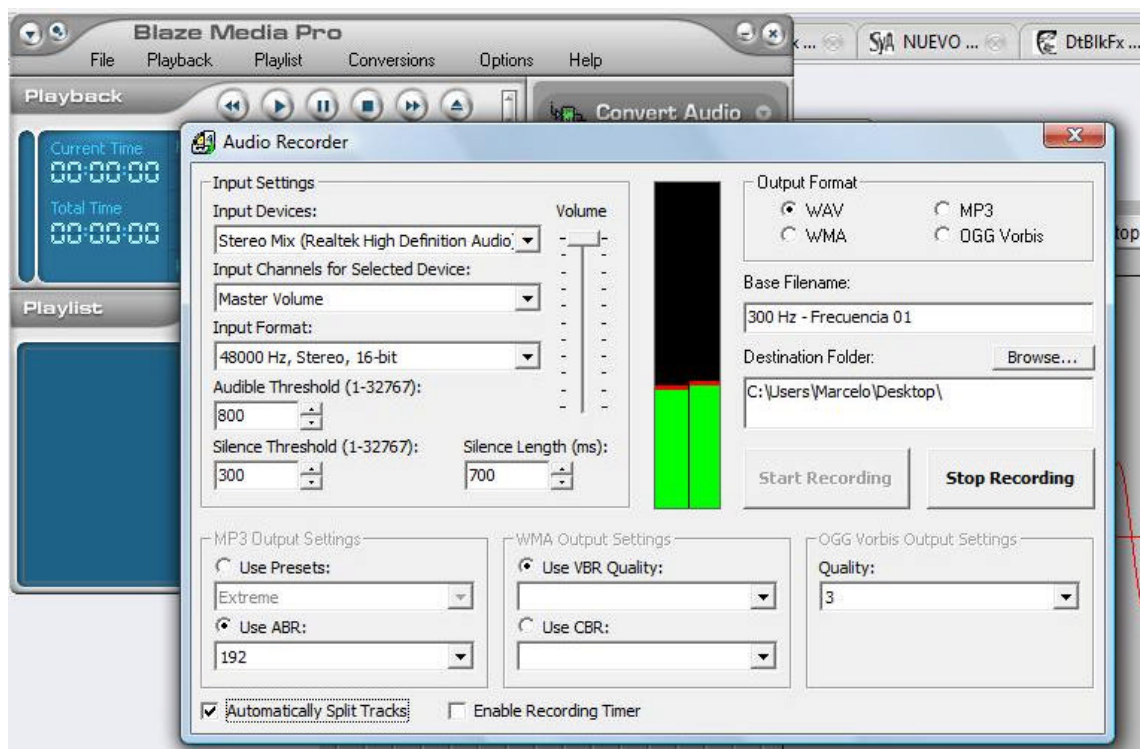


Con los programas adecuados, podemos recrear estas sinusoidales, incorporando los parámetros correspondientes a las frecuencias que forman parte de las series de Fourier. Para ello es importante ingresar la frecuencia que nos da el analizador de espectro.

El sonido ha sido generado mediante el plugin de JAVA Fourier Synthesis, creado por Fu-Kwun Hwang, donde ingresamos la frecuencia y la amplitud:



Luego se grabó con Blaze Media Pro tal como suena por la salida de audio de la computadora:



Si incorporamos estos sonidos generados por computadora en diversas pistas, la acumulación de los mismos irá produciendo un sonido similar al de la guitarra, aunque no exactamente igual.

Aquí cabe la pregunta de porqué no generar el sonido completo ingresando todas las frecuencias componentes del sonido analizado, siendo que el programa lo permite.

La respuesta es que no se genera un sonido similar al de la guitarra, porque en este instrumento, cada frecuencia tiene una amplitud independiente, y lo mismo pasa con el ataque, el decaimiento, sostenimiento y liberación de la nota (los parámetros ADSR mencionados al comienzo).

---

<sup>i</sup> <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/sound/souref.html>

<sup>ii</sup> R. Fay, Hearing in Vertebrates. A Psychophysics Databook. Hill-Fay Associates, Winnetka, Illinois, 1988.