

Universidad Abierta Interamericana  
Facultad de Tecnología Informática



Carrera: Licenciatura en Matemática

**ANÁLISIS DEL MODELO MATEMÁTICO DEL  
COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE UNA NEURONA**

Por Nora Alicia Sarti

Directora de Tesis: Dra. María Lorena Bergamini

Con el propósito de optar al título de: Licenciado en Matemática

**Agosto 2011**

### **Agradecimientos:**

A:

- Universidad Abierta Interamericana, por el excelente ámbito académico.
- Dra. María Lorena Bergamini, por su dedicación y sus consejos.
- Ing. Eduardo Abel Aguirre, por sus aportes en el campo de la física.
- Mg. Ing. Daniel D. Pugliese, por sus consejos.
- A Cintia, por su valiosa ayuda en el campo de la biología.
- A Patricia M. García, por ayuda incondicional.
- A mi esposo y a mis hijas, por ser lo mas importante que tengo, porque los amo y porque esto es para y por ellos.
- A mi papá, que vive en mi corazón.
- A mi mamá y hermana, porque son las mejores y las amo.
- A Chola, Susana, Carlos, Eduardo, Martha, Marcelo, Matías, Ezequiel, Leticia, Paula, Carolina y Hernán, porque los quiero, están siempre presentes en mi vida y son la mejor familia que se puede tener.
- A Carlos, porque siempre estará presente en mí.
- A Viviana y Patricia, las hermanas que me dio la vida.
- A Graciela, por estar siempre conmigo.

**Resumen:** Se presenta una descripción de la dinámica del comportamiento de una neurona, a través de un modelo matemático que representa una modificación del oscilador de relajación, el cual simula las formas de los pulsos eléctricos de las neuronas. Se realiza el análisis según la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, analizando la estabilidad el punto crítico encontrado.

**Palabras claves:** Ecuación diferencial no lineal, puntos críticos, ciclos límites, neurona, Fitzhugh-Nagumo

## Índice

1	Introducción	4
2	Fundamentos biológicos y matemáticos	5
2.1	La neurona	5
2.2	Orígenes de la formulación matemática de procesos Neuronales	9
3.	Estudio de modelos matemáticos	14
3.1.	Modelos dinámicos	14
3.2.	Estabilidad de puntos críticos	16
3.3.	Sistemas lineales	17
3.3.1	Clasificación de los puntos críticos de sistemas lineales de orden 2	23
3.3.2	Análisis de Estabilidad – Plano Traza-Determinante	31
3.4.	Sistemas no lineales	33
3.4.1	Teorema de existencia y unicidad	34
3.4.2	Puntos críticos y linealización	34
3.4.3	Efecto de pequeños términos no lineales	36
3.4.4	Puntos hiperbólicos	40
3.4.5	Ciclos límites	41
3.4.6	Teorema de Poincaré Bendixson	42
4.	Análisis cualitativo del modelo F-N	44
4.1	Cálculo de puntos de equilibrio	44
4.2	Análisis de los puntos críticos	46
4.3	Obtención de trayectorias solución	53
5.	Conclusión	59
	Anexo	60
	Resolución de la ecuación cúbica	61
	Análisis del plano traza determinante	64
	Cálculo de los valores propios del polinomio característico	70
	Bibliografía	73

## **1. Introducción**

El sistema biológico más simple es más complicado que un sistema físico complejo. El hombre puede dominar perfectamente el comportamiento de un satélite artificial pero no puede hacerlo con una simple célula nerviosa. Esto es debido a que mientras que la mayoría de los sistemas físicos son descriptos a través de modelos matemáticos lineales, los sistemas biológicos son no lineales. Las propiedades de los sistemas lineales pueden establecerse de manera unívoca mediante ecuaciones matemáticas, propiedad que no comparten los sistemas no lineales.

La respuesta de un sistema lineal a un estímulo será siempre la misma, mientras que en los no lineales puede depender de cómo haya sido el estímulo anterior, o lo que es lo mismo, están dotados de memoria, como es el caso de la membrana excitable del sistema nervioso, cuya respuesta a un estímulo eléctrico no solo depende del estímulo que la produce, sino también del intervalo de tiempo transcurrido desde que recibió el estímulo anterior y las características de éste.

El trabajo se organiza de la siguiente manera, en el próximo apartado se presentan los fundamentos biológicos, y los fundamentos matemáticos necesarios para realizar el estudio de la neurona, luego se realiza el estudio cuantitativo y cualitativo del modelo de Fitzhugh-Nagumo y por último se exponen las conclusiones.

## **2. Fundamentos biológicos y matemáticos**

### **2.1 La Neurona**

El tejido nervioso está constituido por células nerviosas y fibras nerviosas, y la neurología esta formada por varias clases de células. La célula nerviosa se denomina neurona, que es la unidad funcional del sistema nervioso.

Las células nerviosas se componen básicamente de tres partes: el cuerpo celular (soma), las dendritas y el axón (fig. 1).

El soma: contiene al núcleo de la célula y por lo tanto es poseedor del material genético de la neurona. Es ahí donde ocurren los mecanismos bioquímicos sintetizadores de enzimas y demás proteínas, necesarios para mantenerla viva, es decir, se encarga de todas las actividades metabólicas de la neurona y recibe la información de otras neuronas vecinas a través de las conexiones sinápticas.

Las dendritas: son brazos delgados que se ramifican, formando una red que rodea a la célula. Constituyen uno de los canales físicos principales por los cuales la neurona puede recibir señales provenientes de otras células.

El axón: son fibras que transmiten los impulsos nerviosos o potenciales de acción desde el cuerpo celular hacia la siguiente célula.

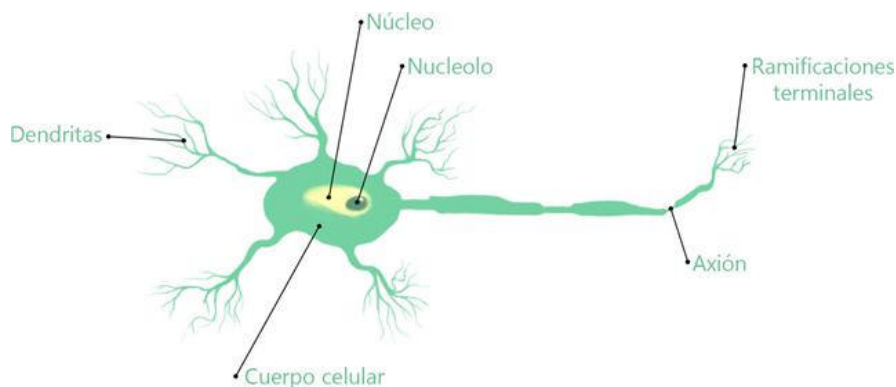


Figura 1 Esquema de una neurona típica.

Las neuronas están comunicadas entre sí mediante dos tipos de contactos, químico y eléctrico, llamados sinapsis. La señal generada por la neurona y transportada a lo largo del axón es de naturaleza eléctrica, mientras que la sinapsis de origen químico se da por una sustancia llamada neurotransmisor

que es liberada por la neurona presináptica y se une a receptores ubicados en la neurona postsináptica. (fig. 2 y 3).

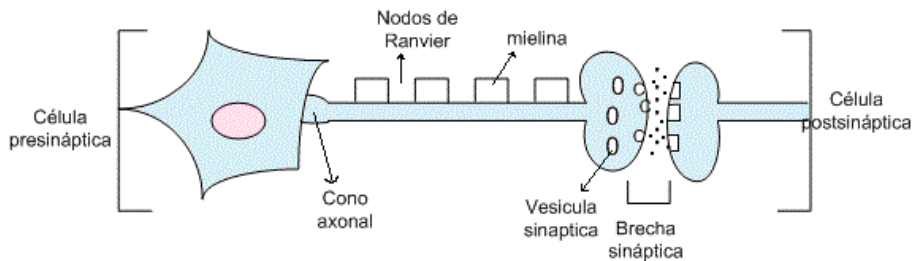


Figura 2 Neurona y sinapsis

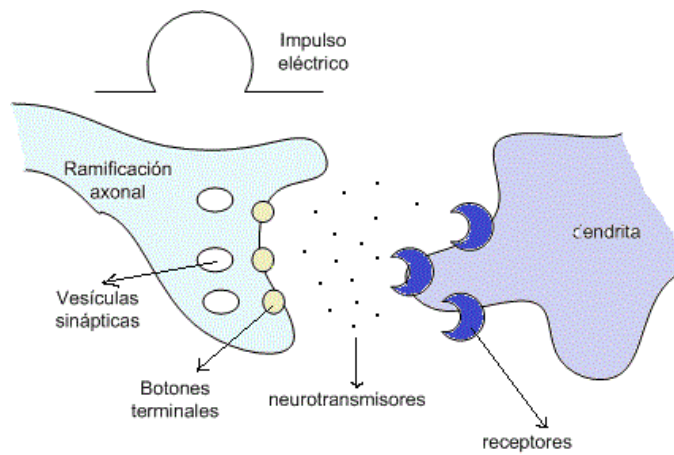


Figura 3 Esquema de una sinapsis. (ampliada)

La generación de las señales eléctricas está íntimamente relacionada con la composición de la membrana celular. Es decir, la neurona como todas las células, es capaz de mantener en su interior un líquido cuya composición difiere marcadamente de la composición del líquido exterior (relación de concentración de los iones sodio y potasio), siendo la concentración de sodio más alta en el exterior que en el interior celular, a diferencia de la concentración del potasio que es inversa. La cantidad de cargas positivas es igual a la cantidad de cargas negativas dentro y fuera de la célula, aunque no tiene por qué ser la misma cantidad fuera que dentro de ella. Esto provoca que dentro de la célula la carga sea neutra con disposición de las cargas negativas cerca de la membrana mientras que en el exterior, también neutro, se dispongan las cargas positivas cerca de la membrana (fig. 4).

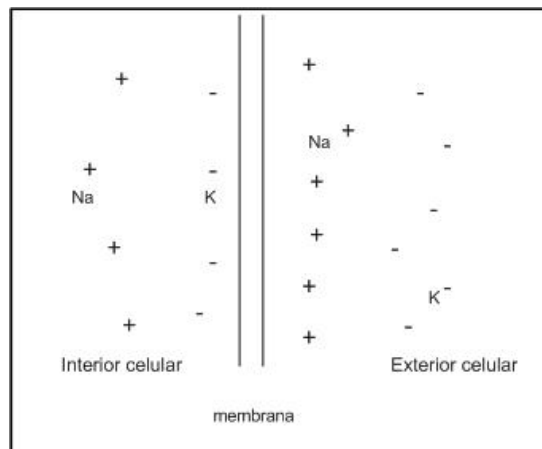


Figura 4 Disposición de iones en la membrana celular

La separación de cargas es la responsable del potencial de reposo de la membrana celular, que es aproximadamente de 70 milivoltios, negativa en el interior de la célula. El potencial de membrana es la diferencia de potencial entre el interior y el exterior celular tanto en reposo como en los distintos estados de activación.

La llegada de señales procedentes de otras neuronas a través de las dendritas actúa acumulativamente, bajando ligeramente el valor del potencial de reposo, dicho potencial modifica la permeabilidad de la membrana, de manera que cuando llega a cierto valor crítico comienza una entrada masiva de iones de sodio que invierten la polaridad de la membrana (despolarización). Esta inversión de voltaje es conocida como potencial de acción que ocurre cuando la despolarización producida por la entrada de sodio alcanza los 15 milivoltios, se propaga a lo largo del axón y propicia la emisión de los neurotransmisores en las terminales axónicas.

Una neurona puede estar en estado:

- **Excitado:** cuando se produce la despolarización y el potencial de membrana disminuye (acercándose al cero, no en sentido matemático) debido al aumento de cargas positivas.
- **Inhibido:** cuando se produce la hiperpolarización al ingresar cargas negativas al interior de la célula provocando un aumento del potencial de membrana.



En la excitación inicial comienza un proceso que produce un impulso eléctrico, que viaja a través del axón, a velocidades superiores a los 100 m/seg. Este proceso es asistido por la mielina que recubre la neurona, aislándola del medio ambiente.

La transmisión de una señal de una célula a otra por medio de la sinapsis es un proceso químico. En él se liberan sustancias transmisoras en el lado del emisor de la unión. El efecto es elevar o disminuir el potencial eléctrico dentro del cuerpo de la célula receptora. Si su potencial alcanza el umbral se envía un pulso o potencial de acción por el axón (fig.5). Se dice entonces, que la célula se disparó. Este pulso alcanza otras neuronas a través de la distribución de los axones.

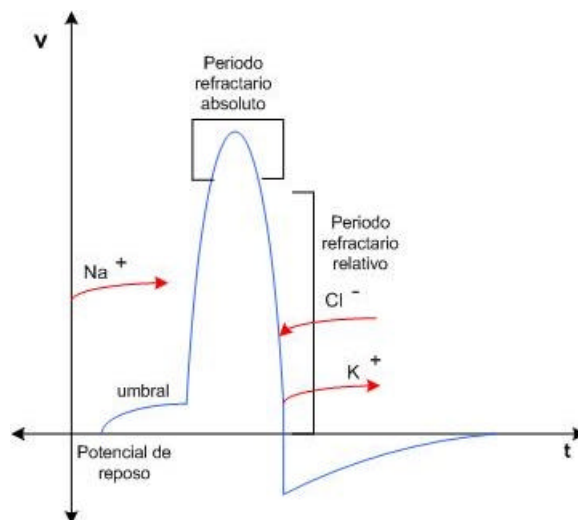


Figura 5 Esquema de un potencial de acción

El potencial de acción se dispara cuando se abren los canales de sodio y este ión ingresa masivamente provocando una disminución del potencial de membrana que se aproxima al valor de equilibrio del sodio de 55 milivoltios, pero que no alcanza ya que se inactivan los canales de sodio luego de haber sido abiertos pasando a un estado de refractariedad, en el que hay salida de iones de potasio, -dado que la membrana tiende a volver a su estado de reposo (-70 mv) - y entrada de iones de cloro para contribuir a llegar al valor de estado de reposo que una vez alcanzado -debido a que sigue entrando una leve cantidad de iones de cloro- hace más negativo el interior celular produciendo un período de hiperpolarización que rápidamente vuelve al estado de reposo.

Durante el potencial de acción se producen dos periodos:

*Refractario absoluto*, que coincide con el pico del potencial de acción donde ante la aplicación de un estímulo, aún de intensidad máxima, no se va a producir un nuevo potencial de acción porque los canales de sodio se encuentran cerrados.

*Refractario relativo*, en el que un estímulo supramáximo desencadenaría un segundo potencial de acción de menor amplitud debido a que hay algunos canales de sodio que se han abierto y otros aún permanecen cerrados.

## **2.2 Orígenes de la formulación matemática de procesos neuronales**

En la década de 1930 a 1940 se propusieron varios modelos con el objeto de describir la neurona por medio de dos variables de estado gobernadas por ecuaciones diferenciales autónomas, ordinarias, lineales y de primer orden. Todos estos modelos son en esencia similares, pero se diferencian entre sí en la identificación de las variables de estado con parámetros reales existentes en la neurona, como, por ejemplo, excitación e inhibición, potenciales de membrana y potencial de umbral, etc.

La teoría de la neurona formal continua (neurona artificial que modela la actividad de la neurona biológica) es, salvo pequeñas variaciones, la teoría de los dos factores concebida por N. Rashevsky. Su teoría esta expresada por:

$$\frac{dx}{dt} = b_1 \cdot E_1 - a_1 \cdot x$$

$$\frac{dy}{dt} = b_2 \cdot E_2 - a_2 \cdot y$$

$$S(t) = S(x, y, U)$$

Donde,  $x(t)$  es el factor excitante,  $y(t)$  es el factor inhibidor,  $E_1(t)$  es la suma de los estímulos excitantes,  $E_2(t)$  es la suma de los estímulos inhibidores y  $S(t)$ , la respuesta de una neurona formal con umbral  $U$ , el cual es característico de la neurona formal.

Otro modelo de la neurona es un modelo discreto propuesto por W. McCulloch y W. Pitts, que está basado en una descripción funcional de la neurona a través del Algebra de Boole. Este modelo que opera con redes de neuronas formales discretas, tiene por unidad a la neurona formal discreta, la cual está basada en

el comportamiento todo-o-nada de la neurona real. Por lo que le atribuye a la neurona discreta dos estados: encendido o 1 y apagado o 0. La forma de operar de la red neuronal de McCulloch – Pitts es análoga al funcionamiento de una computadora digital, pues ambos sistemas utilizan elementos binarios conectados entre si.

En 1951, Huxley y Hodgkin lograron el modelo matemático que más se aproxima al comportamiento real de la neurona, construido analíticamente a partir de datos experimentales obtenidos en el axón gigante de calamar, que se expresa por medio de un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que aproximan las características eléctricas de células excitables como las neuronas o los miocitos cardíacos.

Las hipótesis físicas seguidas por H-H para armar su modelo fueron:

- El tejido excitable funciona como un circuito eléctrico.
- La corriente a través de la membrana es movida por iones de sodio, potasio y otros no identificados.
- Las corrientes iónicas son independientes una de otras
- La fuerza motora de los iones se produce por la diferencia de concentraciones en el interior y el exterior de la membrana celular.

Este modelo, que consta de cuatro ecuaciones, está formado por una que corresponde a la dinámica del voltaje y las otras tres correspondientes a la dinámica de la activación de canales. Estas son:

$$C\dot{v} = -g_l(V - V_l) - g_{Na}m^3h(V - V_{Na}) - g_Km^4(V - V_K) + I_a$$

$$\dot{m} = \alpha_m(V).(1 - m) - \beta_m(V).m$$

$$\dot{n} = \alpha_n(V).(1 - n) - \beta_n(V).n$$

$$\dot{h} = \alpha_h(V).(1 - h) - \beta_h(V).h$$

Donde,

V = potencial de membrana

C = capacitancia de la membrana celular (propiedad de la membrana de retener energía electrostática).

$g_{Na}$  = conductancia del sodio (es la inversa de la resistencia, que es la oposición al movimiento de electrones)

$g_K$  = conductancia del potasio

$g_l$  = conductancia de otros iones no identificados

$V_l$  = voltaje de reposo para el ión "i"

$I$  = corriente inducida

$m$  = función asociada a la activación del canal iónico del sodio

$n$  = función asociada a la activación del canal iónico del potasio

$h$  = función asociada a la desactivación del canal por cargas de sodio

$\alpha_i, \beta_i$  = funciones de ajuste para el comportamiento de apertura y cerradura de canal para la función  $i$  (tasa de transferencia de iones al interior y al exterior de la célula)

Las ecuaciones de H-H corresponden al circuito eléctrico (fig. 6) que modela la membrana celular .

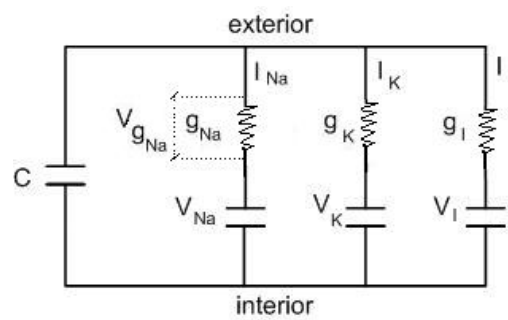


Figura 6 Circuito eléctrico

Usando la ley de Ohm, tenemos que  $V = R.I$  y  $C \cdot \frac{dV}{dt} = I$ .

Siendo  $R$  una medida que indica el impedimento del flujo de corriente, y  $g$  una medida de la conductancia dada por  $g = \frac{1}{R}$

Por lo tanto  $V = \frac{I}{g} \Rightarrow I = V \cdot g$

Entonces, en el nodo correspondiente al sodio,

$$V_{g_{Na}} = \frac{I_{Na}}{g_{Na}} \quad \text{y} \quad V = V_{g_{Na}} + V_{Na}$$

Sustituyendo,  $V = \frac{I_{Na}}{g_{Na}} + V_{Na}$  de donde se obtiene que  $I_{Na} = g_{Na}(V - V_{Na})$

De la misma manera se obtiene  $I_K = g_K(V - V_K)$

$$I_l = g_l(V - V_l)$$

Por la 1ª ley de Kirchoff,  $\sum_{i=0}^n I_i = 0$  en cada nodo, la corriente total esta determinada por la suma de las corrientes iónicas para el sodio, potasio y otros iones junto con una corriente inducida  $I_a$ .

La corriente generada por los canales es entonces  $I = I_{Na} + I_K + I_I$ , por lo que

$$C \cdot \frac{dV}{dt} = g_{Na}(V - V_{Na}) + g_K(V - V_K) + g_I(V - V_I)$$

Sabiendo que la corriente inducida  $I_a$  es igual pero de signo opuesto a la generada por los canales, la ecuación correspondiente es

$$C \cdot \frac{dV}{dt} = -g_{Na}(V - V_{Na}) - g_K(V - V_K) - g_I(V - V_I) + I_a$$

Por otro lado, la conductancia del potasio  $g_K$  obedece a la ecuación diferencial

$\frac{dg_K}{dt} = f(v, t)$  con  $v = V - V_K$ , la que se reescribió en términos de la variable

$n(t)$  de manera que  $g_K = \bar{g}_K \cdot n^4$  donde  $\bar{g}_K$  es una constante que se determinó experimentalmente y la función  $n$  representa la fracción de canales abiertos tras aplicar un voltaje fijo al tiempo  $t$  que satisface la ecuación

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n \cdot (1 - n) - \beta_n \cdot n$$

Donde  $\alpha_n = \alpha_n(v) > 0$ ,  $\beta_n(v) > 0$ , para ajustar el comportamiento a los datos experimentales; en el caso de  $v = \text{cte.}$ ,  $n$  mide la actividad del potasio. Las funciones usadas son:

$$\alpha_n(v) = \frac{0.01 \cdot (v + 10)}{\exp\left(\frac{v + 10}{10}\right) - 1}$$

$$\beta_n(v) = 0.125 \exp\left(\frac{v}{80}\right)$$

La forma propuesta para la conductancia del sodio es  $g_{Na} = \bar{g}_{Na} \cdot m^3 h$  donde

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m \cdot (1 - m) - \beta_m \cdot m \quad \text{y} \quad \frac{dh}{dt} = \alpha_h \cdot (1 - h) - \beta_h \cdot h$$

En 1961, Fitzhugh propuso un modelo simplificado del modelo de Hodgking Huxley que estudia numéricamente una generalización de la ecuación de Bonhoeffer-Van der Pol, para describir la dinámica de una única neurona considerando solamente la parte axonal de la misma, a través de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dx}{dt} = c \left( x - \frac{x^3}{3} + y + z \right)$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{c} (a - x - by)$$

Donde a, b y c son constantes positivas, z es la intensidad del estímulo, x el voltaje e y una variable de recuperación.

En estas ecuaciones m y v (la activación del sodio y el potencial de membrana) se agrupan en una misma variable x y la desactivación del sodio h y la activación del potasio n, evolucionan juntas y se agrupan en la variable y.

Básicamente se usa para modelizar los mismos fenómenos que el modelo de Hodgkin-Huxley, es decir, el control del potencial eléctrico de acción a través de la membrana de la célula. Este control se realiza a través del cambio del flujo de los canales iónicos de la membrana de la célula, dando lugar a cambios del potencial que se utiliza para enviar señales eléctricas entre las células. Su uso no solamente se aplica para modelizar potenciales de acción en neuronas, sino también en otras células excitables.

De aquí en más, adoptaremos para el resto del presente trabajo, el modelo de Fitzhugh-Nagumo

### **3. Estudio de modelos matemáticos**

Un modelo matemático se define como una descripción desde el punto de vista de las matemáticas de un hecho o fenómeno del mundo real. Es un patrón teórico o experimental que permite interpretar mediante métodos matemáticos fenómenos reales o problemas teóricos para hacer inferencia y tomar decisiones. El objetivo del modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y tal vez predecir su comportamiento en el futuro.

El proceso para elaborar un modelo matemático es el siguiente:

1. Plantear un problema del mundo real
2. Formular un modelo matemático acerca del problema, identificando variables (dependientes e independientes) y estableciendo hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática.
3. Aplicar los conocimientos matemáticos que se posee para llegar a conclusiones matemáticas.
4. Comparar los resultados obtenidos como predicciones con datos reales. Si hay discrepancias, se reformula el modelo.

Es importante mencionar que un modelo matemático no es exactamente igual al problema de la vida real que se quiere estudiar sino que se trata de una idealización.

#### **3.1. Modelos dinámicos**

Un modelo dinámico constituye una descripción, generalmente matemática, del comportamiento de un sistema. Una de las herramientas matemáticas más útiles para describir procesos dinámicos continuos es la ecuación diferencial. En muchos procesos y sistemas son necesarias varias ecuaciones diferenciales para describir adecuadamente su dinámica.

Un modelo dinámico es uno en el cual las variables de decisión implican magnitudes y decisiones para distintos instantes de tiempo.

Muchas de las leyes o de los principios en los que se basa el mundo natural son declaraciones o relaciones que involucran tasas de cambio con las que suceden las cosas. Cuando dichas leyes se expresan en términos

matemáticos, las relaciones son ecuaciones y las tasas de cambio son derivadas, por lo tanto, son ecuaciones diferenciales.

Un sistema de ecuaciones diferenciales, de orden  $n$ , se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \end{aligned} \quad (1)$$

Cuando las funciones del lado derecho no dependen de  $t$ , el sistema es autónomo.

A un punto  $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal que  $g_k(\mathbf{x}^*) = 0$  para  $k=1, 2, \dots, n$  se lo llama punto crítico del sistema.

Una solución del sistema (1) para  $t \in (a, b)$  es un  $n$ -vector  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  cuyas componentes son funciones diferenciables de  $t$  en  $(a, b)$ , y satisfacen las ecuaciones (1).

Si el sistema (1) tiene un punto crítico  $\mathbf{x}^*$ , admite una solución trivial,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ . Ésta es una solución constante para todo  $t$ . Físicamente, si interpretamos las variables  $\mathbf{x}$ , por ejemplo, como la posición de una partícula, y la variable  $t$  como el tiempo, cuando la partícula se ubica en un punto crítico  $\mathbf{x}^*$  permanece allí indefinidamente, por eso, a la solución constante también se la llama solución de equilibrio o estacionaria.

Las soluciones no constantes  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  pueden definir una curva simple (que no se cruza a sí misma) o una solución periódica. Las soluciones periódicas son tales que existe un  $p > 0$  tal que  $\mathbf{x}(t+p) = \mathbf{x}(t)$  para todo  $t$ . Al menor valor  $p$  tal que esa relación ocurre, se lo llama período de la solución.

Si las magnitudes medidas por  $\mathbf{x}$ , valen  $\mathbf{x}^*$  para un determinado  $t_0$ , seguirán teniendo esos valores para todo  $t > t_0$ . Interesa saber qué sucede con la solución, si los valores de  $\mathbf{x}$  están cerca de  $\mathbf{x}^*$  en un determinado  $t_0$ . En particular, interesa saber si la solución  $\mathbf{x}(t)$ , permanece cerca del punto estacionario para  $t > t_0$ . Estas ideas se formalizan en el concepto de estabilidad de los puntos críticos.



### 3.2 Estabilidad de puntos críticos

Consideremos el sistema autónomo

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{2}$$

Suponemos que las funciones  $g_k$  son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en todo  $R^n$ . Los puntos críticos se pueden calcular resolviendo simultáneamente las ecuaciones  $g_1(\mathbf{x}^*) = 0$ ,  $g_2(\mathbf{x}^*) = 0$ , ...,  $g_n(\mathbf{x}^*) = 0$ .

Sea  $\mathbf{x}^*$  un punto crítico aislado de (2). Si  $\Phi(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$  es una solución de (2) (comúnmente llamada trayectoria del sistema), diremos que  $\Phi$  tiende a  $\mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$  si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_k(t) = x_k^* \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Geoméricamente, esto significa que si  $\mathbf{P} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un punto que se mueve en  $R^n$  según  $x_k = x_k(t)$ , entonces  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Se dice que un punto crítico  $\mathbf{x}^*$  es estable si, dado un  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que, para cada solución  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  del sistema (2), que cuando  $t = 0$  satisfaga

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta,\tag{3}$$

existe para todo  $t > 0$  y también satisface

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon\tag{4}$$

para todo  $t \geq 0$ .

Un punto crítico que no es estable se llama inestable.

Geoméricamente, como se ve en la figura 7a, las expresiones matemáticas (3) y (4) dicen que para todas las soluciones que comienzan "suficientemente cerca" (dentro de la distancia  $\delta$ ) de  $\mathbf{x}^*$  permanecen "cerca" (dentro de la distancia  $\epsilon$ ) de  $\mathbf{x}^*$ .

Se dice que un punto crítico es asintóticamente estable si es estable y si existe un  $\delta > 0$  tal que, si una solución  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  satisface  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ .

Así, las trayectorias que comienzan “suficientemente cerca” de  $\mathbf{x}^*$  no sólo deben permanecer “cerca”, sino que al final deben tender a  $\mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (Fig. 7 b).

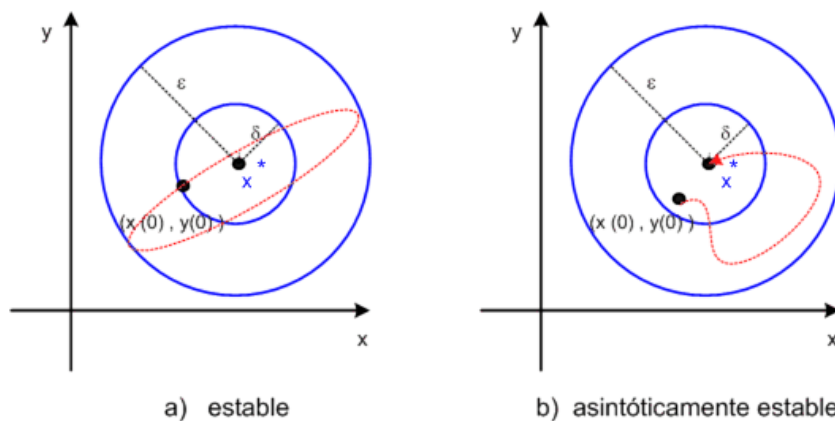


Figura 7 Estabilidad

La estabilidad asintótica es una propiedad más fuerte que la estabilidad, porque un punto crítico debe ser estable para que pueda ser asintóticamente estable.

### 3.3 Sistemas lineales

Un sistema de ecuaciones diferenciales, lineal de orden  $n$  tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde los coeficientes,  $p_j$  y las funciones,  $g$ , son continuos en un intervalo común  $I$ . Cuando  $g(t) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , se dice que el sistema lineal es homogéneo; en caso contrario, es no homogéneo.

En forma matricial, el sistema se expresa de la siguiente manera

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \quad (6)$$

donde  $\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}$  es la matriz de coeficientes del sistema

y  $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$  es el término no homogéneo del sistema.

Se dice que el sistema (6) tiene una solución en el intervalo  $I$  si existe un vector

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \quad (7)$$

con  $n$  componentes que es diferenciable, y satisface la ecuación (6) en todos los puntos del intervalo  $I$ .

Además del sistema de ecuaciones diferenciales, también puede indicarse una condición inicial de la forma

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (8)$$

donde  $t_0$  es un valor específico de  $t \in I$ , y  $\mathbf{x}_0$  es un vector constante dado, con  $n$  componentes. En estos casos, el sistema (6) y la condición (8) forman un problema con valor inicial.

En el caso en que  $\mathbf{P}(t)$  sea una matriz constante, y  $\mathbf{g}(t) = 0$  el sistema resulta,

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  donde  $\mathbf{x}(t) = 0$  es una solución del sistema, ya que  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  es un punto crítico. Si  $\mathbf{P}$  es invertible,  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  es el único punto crítico del sistema.

Si los valores propios de la matriz  $\mathbf{P}$  son todos distintos, las componentes de cualquier solución no constante son combinación lineal de exponenciales de tipo  $e^{\lambda t}$ , donde  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{P}$ . Recordemos que la exponencial de un número imaginario da origen a senos y cosenos.

En el caso general se tiene el siguiente teorema:

**Teorema 1:**

Si  $\mathbf{x}(t)$  es una solución del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ , cada coordenada  $\mathbf{x}(t)$  es una combinación lineal de funciones de tipo  $t^k e^{at} \cos bt$  y  $t^k e^{at} \sin bt$ , donde  $a+bi$  son los valores propios de la matriz  $\mathbf{P}$ , y  $k$  es un entero positivo menor que  $n$ .

Este resultado es consecuencia de los siguientes teoremas:

*Teorema 2*

Sea  $\mathbf{P}$  una matriz de  $n \times n$ . Entonces existe una matriz  $\mathbf{B}$  invertible de  $n \times n$  tal que  $\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{J}$  es una matriz de Jordan cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de  $\mathbf{P}$ .

Una matriz de Jordan es de la forma  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(I_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2(I_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_r(I_r) \end{bmatrix}$ , donde

cada bloque  $\mathbf{J}_i(\lambda_i)$  es un bloque de Jordan de  $n_i \times n_i$ , dada por

$$\mathbf{J}_i(I_i) = \begin{bmatrix} I_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_i \end{bmatrix},$$

es decir, una matriz cuadrada con  $\lambda_i$  en la diagonal, y unos arriba la diagonal.

Si todos los bloques de Jordan son de  $1 \times 1$ , la matriz  $\mathbf{J}$  es una matriz diagonal.

La matriz  $\mathbf{J}$  del teorema se llama forma canónica de Jordan de  $\mathbf{P}$ .

Es sabido que si  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{P}$  con multiplicidad algebraica igual a su multiplicidad geométrica, digamos  $m$ , existen  $m$  vectores propios linealmente independientes correspondientes al valor propio  $\lambda$ . Cuando la multiplicidad geométrica de un valor propio es menor que la multiplicidad algebraica, se usan vectores propios generalizados:

Un *vector propio generalizado* de una matriz cuadrada  $\mathbf{P}$  es un vector no nulo  $\mathbf{v}_2$  que satisface  $(\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ , donde  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{P}$ , y  $\mathbf{v}_1$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda$ .

**Teorema 3**

Sea **B** la matriz de  $n \times n$  cuyas columnas son  $n$  vectores propios o vectores propios generalizados de **P**. Entonces  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}$  es una matriz de Jordan, cuyos elementos en la diagonal son los valores propio de **P**, y aparecen en el orden en que se ubican los vectores propios correspondientes en **B**.

Sea **J** una matriz de  $n \times n$ . Entonces, la *exponencial de J*,  $e^{\mathbf{J}}$  está definida por:

$$e^{\mathbf{J}} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J}^2}{2!} + \frac{\mathbf{J}^3}{3!} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{J}^k}{k!}. \quad \text{Esta serie de matrices converge para cualquier matriz } \mathbf{J}.$$

**Teorema 4**

Para cualquier vector constante **d**,  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{P}t} \mathbf{d}$  es una solución de la ecuación diferencial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ .

*Demostración:*

Por definición de exponencial de matriz,  $e^{\mathbf{P}t} = \mathbf{I} + \mathbf{P}t + \frac{\mathbf{P}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{P}^n t^n}{n!} + \dots$

Derivando se obtiene<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{de^{\mathbf{P}t}}{dt} &= \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 t + \frac{\mathbf{P}^3 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{P}^{n+1} t^n}{n!} + \dots \\ &= \mathbf{P} \left( \mathbf{I} + \mathbf{P}t + \frac{\mathbf{P}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{P}^n t^n}{n!} + \dots \right) = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}t} \end{aligned}$$

Luego, si  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{P}t} \mathbf{d}$ , con **d** constante,  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{de^{\mathbf{P}t}}{dt} \mathbf{d} = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}t} \mathbf{d}$

Entonces  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{P}t} \mathbf{d} = \mathbf{P}\mathbf{x}(t)$

Este resultado nos da explícitamente la solución de todo sistema de ecuaciones diferenciales lineal de primer orden homogéneo. Aunque queda la cuestión: ¿cómo se calcula en forma práctica la exponencial de **Pt**? El siguiente teorema nos da una idea:

---

<sup>1</sup> La derivación término a término está justificada porque la convergencia es uniforme.

**Teorema 5**

Sea  $\mathbf{J}$  la forma canónica de Jordan de la matriz  $\mathbf{P}$ , y sea  $\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}$ . Entonces  $e^{\mathbf{P}t} = \mathbf{B}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{B}^{-1}$ .

*Demostración:*

Primero notemos que si  $\mathbf{J} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1}$  y

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k &= (\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1})^k = \overbrace{(\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1})(\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1})\dots(\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1})}^{k \text{ veces}} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{J}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{J}(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})\dots(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{J}^k\mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

Entonces,

$$e^{\mathbf{P}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B}^{-1})^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}\mathbf{J}^k\mathbf{B}^{-1} t^k}{k!} = \mathbf{B} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{J}^k t^k}{k!} \right) \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{B}^{-1}.$$

El teorema nos dice que para calcular la exponencial de  $\mathbf{P}t$ , debemos calcular la exponencial de una matriz de Jordan. Si ésta es diagonal, es claro cómo calcular la exponencial, ya que, en el caso de  $2 \times 2$ ,

$$\mathbf{J}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}, \text{ entonces } e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Si } \mathbf{J} \text{ no es diagonal, } \mathbf{J}^k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}, \text{ entonces } e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Esto se puede demostrar por inducción completa:

Para  $k = 1$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 1\lambda^0 \\ 0 & \lambda^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Por hipótesis inductiva suponemos que para  $k = n$  la igualdad es verdadera

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Probemos que es verdadera para  $k = n + 1$

Por hipótesis inductiva

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & \lambda^n + n\lambda^{n-1}\lambda \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda^{n-1} t^n}{n!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora bien, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\lambda^{n-1} t^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^n}{(n-1)!} = t + \lambda t^2 + \frac{\lambda^2 t^3}{2!} + \frac{\lambda^3 t^4}{3!} + \dots \\ &= t \left( 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) = t e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\text{En consecuencia, } e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Si el bloque de Jordan fuese de  $3 \times 3$ , de la misma manera se demuestra

$$\text{que } J^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \quad \text{y entonces}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1} t^k}{k!} & \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} t^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1} t^k}{k!} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{pmatrix} \quad \text{y como}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} t^k}{k!} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} t^k}{2(k-2)!} = \frac{t^2}{2} + \frac{\lambda t^3}{2} + \frac{\lambda^2 t^4}{2 \cdot 2!} + \frac{\lambda^3 t^5}{2 \cdot 3!} + \dots = \\ &= \frac{t^2}{2} \left( 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \dots \right) = \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \end{aligned}$$

$$\text{Entonces, } e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Con todo esto, vemos que las soluciones del sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$  se pueden escribir como  $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{P}t} \mathbf{d} = \mathbf{B}e^{\mathbf{J}t} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$  para cualquier vector  $\mathbf{d}$ , siendo  $\mathbf{J}$  la forma canónica de Jordan de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{B}$  una matriz cuyas columnas son vectores propios y vectores propios generalizados de  $\mathbf{P}$ . Entonces, cada componente de  $\mathbf{x}(t)$  es una combinación lineal de términos que contienen las funciones  $e^{\lambda t}$ ,  $y$ ,  $t^n e^{\lambda t}$  donde  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{P}$ , real o complejo. En el caso en que sea complejo, sea  $\lambda = a + bi$ , la exponencial es  $e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$ , y  $t^k e^{\lambda t} = t^k e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$

### 3.3.1 Clasificación de los puntos críticos de sistemas lineales de orden 2

Para estudiar la clasificación de los puntos críticos de sistemas lineales de  $2 \times 2$ , consideremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases} \quad (9)$$

que tiene el origen como punto crítico. La matriz  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  se denomina matriz de coeficientes del sistema.

$$\text{Supongamos que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (10)$$

es decir, el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo. Así,  $(0,0)$  es el único punto crítico, y por lo tanto, es aislado.

Como se mostró en la sección anterior, el sistema tiene una solución no trivial

$$\text{de la forma } \begin{cases} x = A e^{\lambda t} \\ y = B e^{\lambda t} \end{cases} \text{ siempre que } \lambda \text{ sea un valor propio de la matriz de}$$

coeficientes, que se calcula como raíz de la ecuación cuadrática

$$|\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}| = \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0. \quad (11)$$



De acuerdo a la forma de las trayectorias alrededor del punto crítico aislado, éstos se denominan nodo, punto silla, foco o centro.

Un **nodo** es un punto crítico donde las trayectorias vecinas a él o bien todas se acercan o bien todas se alejan del punto. Cuando el retrato de fase está formado por semirrectas donde todas entran (o todas salen) del punto crítico, al nodo se lo llama **nodo estrella**.

Un **punto silla** es un punto crítico donde se tienen un par de trayectorias opuestas que entran, otro par de trayectorias opuestas que salen del punto y el resto son ramas de hipérbolas con asíntotas en las trayectorias anteriores.

Un **punto espiral** o **foco** es un punto crítico al cual todas las trayectorias vecinas son espirales que convergen hacia el punto crítico o divergen desde él.

Un **centro** es un punto crítico tal que en una vecindad de él todas las trayectorias son cerradas.

Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  las raíces de la ecuación cuadrática, distinguimos los siguientes casos:

**Caso A:** Si las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales, distintas y del mismo signo, el punto crítico es un **nodo**.

*Demostración:*

Supongamos que  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son ambas negativas, y elegimos la notación  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ .

De acuerdo a los teoremas 4 y 5, la solución es  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}$ , donde

$\mathbf{d}$  es un vector arbitrario, y  $\mathbf{B}$  es la matriz de vectores propios de  $\mathbf{P}$  correspondientes a los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  (en ese orden). Si

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{d} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ , cada componente de la solución se escribe

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}, \quad (12)$$

Cuando  $c_2 = 0$ , obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} \end{cases} \quad (13)$$

Y cuando  $c_1 = 0$  obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_2 A_2 e^{\lambda_2 t} \\ y = c_2 B_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (14)$$

Para cualquier  $c_1 > 0$ , la solución (13) representa una trayectoria consistente en la semirrecta  $A_1 y = B_1 x$  con pendiente  $B_1/A_1$ ; y para  $c_1 < 0$  representa una trayectoria que consta de la semirrecta complementaria a la anterior. Como  $\lambda_1 < 0$ , ambas trayectorias en forma de semirrecta tienden a  $(0,0)$  para  $t \rightarrow \infty$ , y como  $y/x = B_1/A_1$ , ambas entran a  $(0,0)$  con pendiente  $B_1/A_1$  (fig. 8).

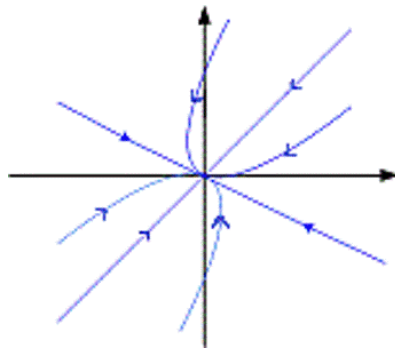


Figura 8 Nodo

Exactamente del mismo modo las soluciones (14) representan dos semirrectas en la recta  $A_2 y = B_2 x$ , con pendiente  $B_2/A_2$ . Estas dos trayectorias también tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y entran en él con pendiente  $B_2/A_2$ .

Si  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$ , la solución general (12) representa trayectorias curvas. Como  $\lambda_1 \neq 0$  y  $\lambda_2 < 0$ , estas trayectorias también tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además al ser  $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$  e

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{(c_1 B_1 / c_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} + B_2}{(c_1 A_1 / c_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t} + A_2}$$

Es claro que  $(y/x) \rightarrow B_2/A_2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , así que todas ellas entran a  $(0,0)$  con pendiente  $B_2/A_2$ . El punto crítico es un nodo y es asintóticamente estable.

Si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  son ambos positivos y elegimos la notación de manera que  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , la situación es exactamente la misma excepto que todas las trayectorias tienden a  $(0,0)$  y entran a él cuando  $t \rightarrow -\infty$ . En este caso se trata de un nodo inestable

Caso B: Si las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales, distintas y de signos opuestos, el punto crítico es un **punto silla**.

*Demostración:*

Elegimos la notación de modo que  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ . La solución general de (9) puede escribirse como (12) y de nuevo tenemos soluciones particulares de la forma (13) y (14). Las dos trayectorias con forma de semirrecta representadas por (13) tienden y entran a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , pero esta vez las representadas por (14) lo hacen para  $t \rightarrow -\infty$ . Si  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$ , la solución general (12) representa trayectorias curvas, pero al ser  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , ninguna de ellas tiende a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ . En lugar de eso, cuando  $t \rightarrow \infty$ , cada una de esas trayectorias es asintótica a una de las semirrectas (14), y cuando  $t \rightarrow -\infty$ , cada una de ellas es asintótica a una de las semirrectas (13). La figura 9 muestra una gráfica de ese comportamiento. En este caso el punto crítico es un punto silla inestable.

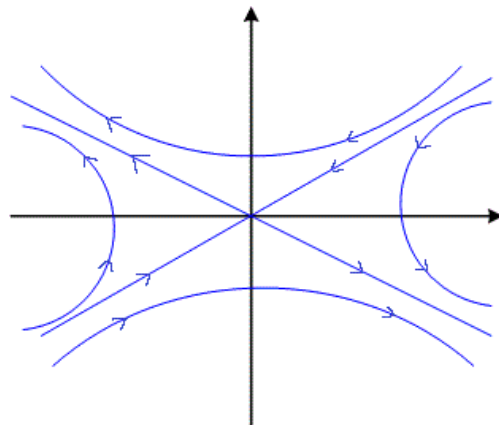


Figura 9 Punto silla

Caso C: Si las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejas conjugadas, pero no puramente imaginarias, el punto crítico es un **foco**.

*Demostración*

En este caso,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  tienen la forma  $a \pm ib$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales no nulos.

Observemos que el discriminante  $\Delta$  de la ecuación (11) es negativo:

$$\Delta = (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1) = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 < 0 \quad (15)$$

La solución general en este caso es:

$$\begin{cases} x = e^{at} [c_1(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2(A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at} [c_1(B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2(B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \quad (16)$$

donde  $\mathbf{v}_1=(A_1, B_1)$  y  $\mathbf{v}_2=(A_2, B_2)$  son la parte real e imaginaria del vector propio correspondiente al valor propio  $a+bi$  (el vector  $\mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$  es vector propio correspondiente al valor propio  $a-ib$ ) y  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias.

Supongamos primero que  $a < 0$ . Entonces de (16)  $x \rightarrow 0$  e  $y \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , de modo que todas las trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Además las trayectorias no tienden a  $(0,0)$  con pendiente asintótica, cuando  $t \rightarrow \infty$ , sino que giran en torno a él en forma de espirales. Para probar esto introducimos la coordenada polar  $\theta$ , y demostraremos que a lo largo de cualquier trayectoria,  $d\theta/dt$  es de signo constante para todo  $t$ .

Como sabemos  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ , así que  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{x \cdot dy/dt - y \cdot dx/dt}{x^2 + y^2}$ ;

Y usando las ecuaciones (9) obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2} \quad (17)$$

Suponemos que  $x^2 + y^2 \neq 0$  (ya que solo sirven las soluciones que representan trayectorias). Ahora (15) implica que  $a_2$  y  $b_1$  tienen signos opuestos.

Consideremos el caso que  $a_2 > 0$  y  $b_1 < 0$ . Cuando  $y = 0$ , (17) da  $\frac{d\theta}{dt} = a_2 > 0$ .

Si  $y \neq 0$ ,  $d\theta/dt$  no puede ser 0; porque, si lo fuera, (17) implicaría que  $a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2 = 0$ , o sea

$$a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (b_2 - a_1)\frac{x}{y} - b_1 = 0 \quad (18)$$

para algún número real  $x/y$ , cosa que no puede ser cierta por cuanto el discriminante  $\Delta$  de la ecuación (18) es negativo por (15). Esto demuestra que

$\frac{d\theta}{dt}$  es siempre positiva si  $a_2 > 0$ . Análogamente se ve que  $\frac{d\theta}{dt}$  es siempre

negativa si  $a_2 < 0$ . Puesto que, por (16),  $x$  e  $y$  cambian de signo infinitas veces cuando  $t \rightarrow \infty$ , todas las trayectorias giran en espiral en torno al origen (en sentido contrario a las agujas del reloj o al revés según sea  $a_2 > 0$  o  $a_2 < 0$ ).

En este caso el punto crítico es un foco, asintóticamente estable.

Si  $a > 0$ , la situación es la misma salvo que las trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y el punto crítico es inestable.

La figura 10 ilustra la forma de las trayectorias cuando  $a_2 > 0$  y  $a_2 < 0$ .

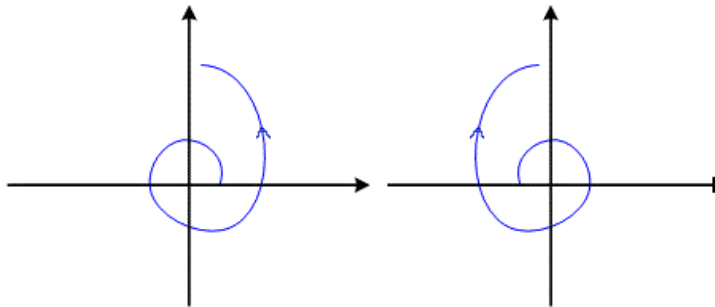


Figura 10 Foco o espiral

#### Caso D

Si las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son reales e iguales, el punto crítico  $(0,0)$  es un nodo.

*Demostración:*

Suponemos que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$ . Hay dos subcasos para tratar por separado:

- (i)  $a_1 = b_2 \neq 0$  y  $a_2 = b_1 = 0$ ;
- (ii) todas las demás posibilidades que conducen a una raíz doble de la ecuación (11).

(i) Si  $a$  denota el valor común de  $a_1$  y  $b_2$ , la ecuación (11) se convierte en  $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$  y  $\lambda = a$ . El sistema (9) es, por lo tanto,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay \end{cases}$$

Y su solución general es

$$\begin{cases} x = c_1 e^{\lambda t} \\ y = c_2 e^{\lambda t} \end{cases} \quad (19)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias. Las trayectorias definidas por (19) son semirrectas de todas las pendientes posibles, y como  $\lambda < 0$  vemos que cada una de ellas tiende y entra en  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En consecuencia, el punto crítico es un nodo asintóticamente estable. Si  $\lambda > 0$ , tenemos la misma

situación excepto que las trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ , las flechas de la figura 11 se invierten y  $(0,0)$  es inestable.

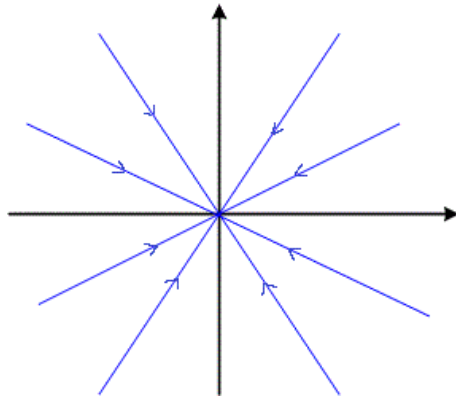


Figura 11 Nodo estrella

(ii) En este caso, de acuerdo a los teoremas 4 y 5, la solución

$$\text{es } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{d}, \text{ siendo } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix}, \text{ donde la primer columna es el}$$

vector propio, y la segunda, el vector propio generalizado. La solución general de (9) se puede escribir como

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda t} + c_2 (A_2 + A_1 t) e^{\lambda t} \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda t} + c_2 (B_2 + B_1 t) e^{\lambda t} \end{cases} \quad (20)$$

Cuando  $c_2 = 0$ , obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{\lambda t} \\ y = c_1 B_1 e^{\lambda t} \end{cases} \quad (21)$$

Estas soluciones representan dos semirrectas de la recta  $Ay = B_1 x$ , con pendiente  $B_1/A_1$ , y como  $\lambda < 0$ , ambas trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (fig. 12). Además, como  $y/x = B_1/A_1$ , ambas trayectorias entran en  $(0,0)$  con pendiente  $B_1/A_1$ .

Si  $c_2 \neq 0$ , las soluciones (20) representan trayectorias curvas, y como  $\lambda < 0$ , esas trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

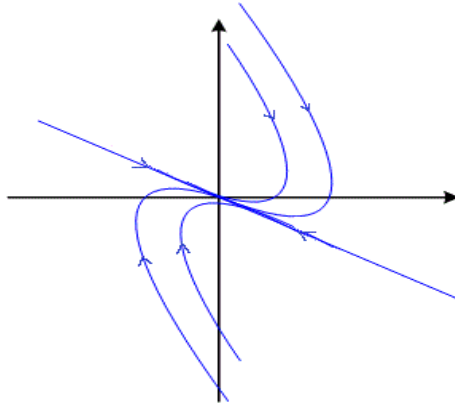


Figura 12 Nodo asintóticamente estable

Se deduce de  $\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 e^{\lambda t} + c_2 (B_2 + B_1 t) e^{\lambda t}}{c_1 A_1 e^{\lambda t} + c_2 (A_2 + A_1 t) e^{\lambda t}} = \frac{c_1 B_1 / c_2 + B_2 + B_1 t}{c_1 A_1 / c_2 + A_2 + A_1 t}$  que

$y/x \rightarrow B_1/A_1$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ , así que estas trayectorias curvadas entran todas en  $(0,0)$  con pendiente  $B_1/A_1$ . Se observa también que  $y/x \rightarrow B_1/A_1$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . La figura 12 muestra una gráfica cualitativa del comportamiento de las trayectorias. Es claro que  $(0,0)$  es un nodo asintóticamente estable. Si  $\lambda \neq 0$ , el esquema de las trayectorias es similar, pero las direcciones de las flechas deben invertirse y el punto crítico pasa a ser inestable.

#### Caso E:

Si las raíces  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son imaginarias puras, el punto crítico  $(0,0)$  es un centro.

#### *Demostración:*

Basta referirse al caso C, porque ahora  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son de la forma  $a \pm ib$  con  $a=0$  y  $b \neq 0$ . La solución general de (9) viene dada por lo tanto por (16) sin el factor exponencial, así que  $x(t)$  e  $y(t)$  son periódicas y cada trayectoria es una curva cerrada que rodea al origen. Estas curvas pueden ser elipses, como se ve en la figura 13. El punto crítico  $(0,0)$  es un centro. Es estable, pero no asintóticamente estable.

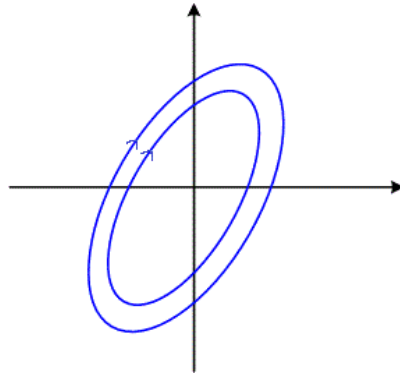


Figura 13 Centro

### 3.3.2 Análisis de Estabilidad – Plano Traza-Determinante

Consideremos el sistema (9) y su matriz de coeficientes  $\mathbf{P}$ . El determinante de la matriz es  $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$  y su traza  $\tau = a_1 + b_2$ . Entonces la ecuación (11) se puede escribir como

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

Dado que los coeficientes del polinomio característico (11) son la traza y el determinante, estos valores determinan el tipo de valores propios que tiene  $\mathbf{P}$ , y por lo tanto, el tipo de punto crítico que presenta el sistema (9). Analizando distintas regiones determinadas en el plano traza-determinante, se puede deducir el tipo de punto crítico, sin necesidad de calcular explícitamente los valores propios.

El siguiente diagrama (fig. 14) permite saber la naturaleza y las propiedades de la estabilidad en el punto crítico  $(0,0)$

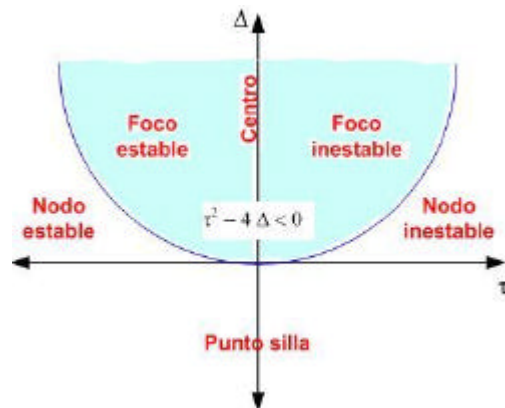


Figura 14 Plano traza - determinante



### Proposición 1

Sea  $(0,0)$  un punto de equilibrio. Y sea  $\Delta = \text{Det.P}$ ,  $\tau = \text{Tr.P}$  y el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x} \quad (22)$$

- Si  $\Delta < 0$ , entonces (22) tiene un punto silla en  $(0,0)$
- Si  $\Delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ , entonces (22) tiene un nodo sobre  $(0,0)$ ; éste es estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$ .
- Si  $\Delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\Delta < 0$  y  $\tau \neq 0$ , entonces (22) tiene un foco sobre  $(0,0)$ ; éste es estable si  $\tau < 0$  e inestable si  $\tau > 0$ .
- Si  $\Delta > 0$  y  $\tau = 0$ , entonces (22) tiene un centro sobre  $(0,0)$ .

### *Demostración*

Los valores propios de la matriz A están dados por:  $\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$

Así

a) Consideremos que  $\Delta < 0$ . Entonces:

- Si  $\tau > 0$ , el valor propio  $\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$  es la suma de dos términos positivos y por lo tanto es positivo. En este caso solo tenemos que determinar el signo del otro valor propio  $\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ . Como  $\Delta < 0$ , entonces  $\tau^2 - 4\Delta > \tau^2$ , de manera que  $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} > \tau$  y  $\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} < 0$ . En esta situación específica el sistema tiene un valor propio positivo y otro negativo.
- Si  $\tau < 0$ ,  $\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} < 0$ . Por otro lado, como  $\Delta < 0$ ,  $\tau^2 - 4\Delta > \tau^2$  y entonces  $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} > |\tau| = -\tau$ . Luego,  $\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} > 0$ . En este caso también tenemos un valor propio negativo y otro positivo.

Entonces, el punto de equilibrio es una silla.

b) Consideremos  $\Delta > 0$  y  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$ :

- Si  $\tau < 0$ ,  $\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} < 0$ . Además, como  $\Delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\Delta < \tau^2$   
 $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} < |\tau| = -\tau$ . Luego,  $\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} < 0$ . Entonces, hay dos valores propios negativos.

Por lo tanto, si  $\Delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$  y  $\tau < 0$ , el punto es un nodo estable.

- Si  $\tau > 0$ , el valor propio  $\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$  es positivo. Nos queda determinar el signo del valor propio  $\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ . Como  $\Delta > 0$ , entonces  $\tau^2 - 4\Delta < \tau^2$ . Como estamos considerando el caso en que  $\tau > 0$ , tenemos  $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} < \tau$  y  $\frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} > 0$ . Se tienen entonces dos valores propios positivos.

Por lo tanto, si  $\Delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\Delta \geq 0$  y  $\tau > 0$ , el punto es un nodo inestable

- c) Si  $\Delta > 0$ ,  $\tau^2 - 4\Delta < 0$  y  $\tau \neq 0$ , entonces los valores propios son complejos conjugados y su parte real es  $\frac{\tau}{2}$ . Tenemos un foco estable si  $\tau < 0$  y un foco inestable si  $\tau > 0$ .
- d) Si  $\Delta > 0$  y  $\tau = 0$ , entonces  $\tau^2 - 4\Delta < 0$ . Se tienen dos valores propios complejos conjugados puramente imaginarios, es decir, un centro.

### 3.4 Sistemas no lineales

Un sistema que no puede representarse en términos del sistema de ecuaciones (5), pues están involucradas funciones no lineales se dice que es no lineal.

Un sistema no lineal general n-dimensional de primer orden se puede escribir, en notación vectorial, de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

donde  $\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

### 3.4.1 Teorema de existencia y unicidad

Teorema 6

#### Teorema de existencia y unicidad

Consideremos el problema con valor inicial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

Supongamos que  $\mathbf{f}$  es continua y que todas sus derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  con  $i,$

$j = 1, \dots, n$  son continuas para todo  $\mathbf{x}$  en cada conjunto abierto conexo  $D \subset \mathfrak{R}^n$ .

Entonces para  $\mathbf{x}_0 \in D$ , el problema de valor inicial tiene una solución  $\mathbf{x}(t)$  en algún intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  con  $\varepsilon > 0$  y esa solución es única.

Entonces, la existencia y unicidad de las soluciones están garantizadas si  $\mathbf{f}$  es continuamente diferenciable.

Una consecuencia importante del teorema de existencia y unicidad es el siguiente corolario.

Corolario: Diferentes trayectorias nunca se intersecan.

Si dos trayectorias se cruzan, habrá dos soluciones para un mismo punto (el punto de intersección) y esto violaría la condición de unicidad del teorema.

En el espacio bidimensional este resultado tiene fuertes consecuencias topológicas. Por ejemplo, supongamos que hay una trayectoria cerrada  $C$  en el espacio de fases. Luego, cualquier trayectoria que se inicie dentro de  $C$  queda atrapada en él. Si hay puntos críticos, la trayectoria puede acercarse a uno de ellos; si no hubiese puntos críticos, la trayectoria debe aproximarse eventualmente a la órbita cerrada.

En los sistemas no lineales las trayectorias generalmente no se pueden calcular analíticamente. El método de estudio de puntos críticos frecuentemente usado es el diagrama de fases del sistema directamente a partir de las propiedades de las funciones.

### 3.4.2 Puntos críticos y linealización

Consideremos un sistema no lineal autónomo de 2x2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (23)$$

con un punto crítico aislado en  $(0,0)$ . Si  $f(x,y)$  y  $g(x,y)$  se pueden desarrollar en series de potencias en  $x$  e  $y$ , entonces (23) adopta la forma

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1x^2 + d_1xy + e_1y^2 + \dots \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2x^2 + d_2xy + e_2y^2 + \dots \end{cases} \quad (24)$$

Cuando  $|x|$  e  $|y|$  son pequeños, es decir, cuando  $(x,y)$  está cerca del origen, los términos de segundo orden o de orden superior son muy pequeños. Es natural despreciar esos términos no lineales y conjeturar que el comportamiento cualitativo de las trayectorias de (24) cerca del punto crítico  $(0,0)$  es similar al de las trayectorias del sistema lineal asociado

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y \end{cases} \quad (25)$$

Esta conjetura está garantizada, para ciertos casos, por el teorema de Hartman Grobman, enunciado más adelante.

El proceso de sustituir (24) por el sistema lineal (25) se suele llamar linealización.

El objetivo de la linealización es aproximar el plano de fases cerca del punto crítico a través del correspondiente sistema lineal.

Consideremos el sistema (23). Supongamos que  $(x^*, y^*)$  es un punto crítico, entonces  $f(x^*, y^*) = 0$  y  $g(x^*, y^*) = 0$ . Para estudiar el comportamiento del sistema cerca de este punto crítico, se procede a linealizar el sistema alrededor de  $(x^*, y^*)$ , como se describe a continuación.

Sea  $u = x - x^*$ ,  $v = y - y^*$ , que denotan las componentes de una pequeña perturbación en un punto crítico. Para saber si esa perturbación crece o decrece, se deben derivar las ecuaciones diferenciales de  $u$  y  $v$ .

Si se deriva la  $u$ -ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} && \text{pues } x^* \text{ es una constante} \\ \dot{u} &= f(x^* + u, y^* + v) && \text{por sustitución} \\ \dot{u} &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \sigma(u^2, v^2, uv) && \text{expansión de Taylor} \end{aligned}$$

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \sigma(u^2, v^2, uv) \quad \text{pues } f(x^*, y^*) = 0$$

Donde las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  están evaluadas en el punto crítico  $(x^*, y^*)$  y  $\sigma(u^2, v^2, uv)$  son términos cuadráticos de  $u$  y  $v$ . Como  $u$  y  $v$  son pequeños, esos términos cuadráticos son muy pequeños.

De la misma manera se calcula la derivada de la  $v$ -ecuación, obteniendo

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + \sigma(u^2, v^2, uv)$$

Entonces la perturbación  $(u, v)$  evoluciona de acuerdo con

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \sigma(u^2, v^2, uv)$$

Donde la matriz  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$  es llamada matriz jacobiana en el punto

$(x^*, y^*)$ .

Como los términos cuadráticos son pequeños, se pueden eliminar y se obtiene el sistema linealizado:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v \\ \frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v \end{pmatrix}$$

### 3.4.3 Efecto de los pequeños términos no lineales

Linealizar el sistema proporciona un cuadro cualitativo correcto del plano de fases siempre y cuando el punto crítico no sea un punto de los casos fronterizos.

Si el sistema linealizado predice un punto silla, nodo o espiral, el tipo de punto crítico corresponde también al sistema no lineal original.

En cambio, si el sistema linealizado predice un punto de los casos fronterizos (centros, nodos estrellas o puntos fijos no aislados), pueden ser alterados por la supresión de los pequeños términos no lineales.

**Comentario [G1]:** qué son estrellas? nodos degenerativos? no están definidos antes en este trabajo

Los puntos críticos se pueden clasificar de forma más general, teniendo en cuenta solo su estabilidad, como:

- Casos fuertes:
  - Repelentes: (también llamados fuentes), ambos valores propios tienen parte real positiva.
  - Atractores: (también llamados sumideros), ambos valores propios tienen parte real negativa.
  - Puntos silla: un valor propio es positivo y el otro es negativo.
- Casos marginales o fronterizos:
  - Centros: ambos valores propios son puramente imaginarios.
  - De orden superior y puntos fijos no aislados: al menos un valor propio es cero.

#### Teorema 7

Sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  valores propios del sistema lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x}$ , correspondiente al sistema no lineal  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ . Suponiendo que  $\mathbf{x} = 0$  es un punto crítico aislado de estos dos sistemas, entonces, el tipo y la estabilidad de  $\mathbf{x} = 0$  para el sistema lineal y para el sistema no lineal son los que se indican en la siguiente tabla:

Tabla 1: Tipos de puntos críticos en un sistema lineal y no lineal

$\lambda_1, \lambda_2$	Sistema lineal		Sistema no lineal	
	Tipo de punto	Estabilidad	Tipo de punto	Estabilidad
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo	Inestable	Nodo	<b>Inestable</b>
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo	Asintóticamente estable	Nodo	<b>Asintóticamente estable</b>
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Punto silla	Inestable	Punto silla	<b>Inestable</b>
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo propio o impropio	Inestable	Nodo o Foco	<b>Inestable</b>
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo propio o impropio	Asintóticamente estable	Nodo o Foco	<b>Asintóticamente estable</b>
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi$				
	$a > 0$	Foco	Inestable	Foco
$a < 0$	Foco	Asintóticamente estable	Foco	<b>Asintóticamente estable</b>
$\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$	Centro	Estable	Centro o foco	<b>Indeterminado</b>

Comentario [G2]: hay un renglon en blanco en la tabla

Los pequeños términos cuadráticos que se eliminan al linealizar el sistema, pueden cambiar completamente el comportamiento de un punto crítico fronterizo. El siguiente ejemplo, mostrado en Strogatz (1994) muestra cómo un foco se convierte en centro..

Sea el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

donde  $a$  es un parámetro. Mostraremos que la linealización de sistema predice incorrectamente que el origen es un centro para todos los valores de  $a$ , mientras que en verdad el origen es un espiral estable si  $a < 0$  y un espiral inestable si  $a > 0$ .

En efecto, para obtener la linealización alrededor de  $(x^*, y^*) = (0,0)$  se puede calcular la matriz jacobiana directamente de la definición o se puede realizar el siguiente camino.

Para cualquier sistema con un punto crítico en el origen,  $x$  e  $y$  representan desviaciones desde ese punto crítico, por lo que se puede linealizar por una simple omisión de los términos no lineales en  $x$  y en  $y$ . Entonces, la linealización del sistema es  $\dot{x} = -y$  e  $\dot{y} = x$ .

El jacobiano es  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $\tau=0$  y  $\Delta=1>0$ , así es que el origen es un centro, según proposición 1.

En cambio, si se analiza el sistema no lineal, cambiando a coordenadas polares, se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \\ y &= r \sin \vartheta \end{aligned}$$

Para obtener una ecuación diferencial en  $r$ , se sabe que  $r^2 = x^2 + y^2$ , y

entonces  $x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$ . Sustituyendo,

$$r\dot{r} = x(-y + ax(x^2 + y^2)) + y(x + ay(x^2 + y^2))$$

$$r\dot{r} = xy + ax^2(x^2 + y^2) + yx + ay^2(x^2 + y^2)$$

$$r\dot{r} = a(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)$$

$$r\dot{r} = a(x^2 + y^2)^2$$

$$r\dot{r} = ar^4 \Rightarrow \dot{r} = ar^3$$

Además, de la identidad  $\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , derivando obtenemos:

$$\dot{\vartheta} = \frac{y\dot{x} - y\dot{x}}{x^2} : \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{y\dot{x} - y\dot{x}}{x^2} : \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{y\dot{x} - y\dot{x}}{r^2}, \text{ sustituyendo } \dot{\vartheta} = \frac{r \cos \vartheta \cdot r \cos \vartheta - r \sin \vartheta \cdot (-r \sin \vartheta)}{r^2}$$



$$\dot{\vartheta} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Así, en coordenadas polares el sistema original es  $\begin{cases} \dot{\vartheta} = 1 \\ \dot{r} = ar^3 \end{cases}$ , en el que la

ecuación radial y la angular son independientes. Por lo tanto todas las trayectorias giran en torno al origen con velocidad angular constante  $\dot{\vartheta} = 1$  y la ecuación radial depende de  $a$ .

Si  $a < 0$ ,  $r(t) \rightarrow 0$  monótonamente cuando  $t \rightarrow \infty$ . En este caso, el origen es un espiral estable.

Si  $a = 0$ ,  $r(t) = r_0$  para todo  $t$  y el origen es un centro.

Si  $a > 0$ ,  $r(t) \rightarrow \infty$  monótonamente cuando  $t \rightarrow \infty$  y el origen es un espiral inestable.

En la figura 15 se muestran las trayectorias (obtenidas con un resolvidor numérico) para los tres casos,  $a > 0$ ,  $a < 0$ ,  $a = 0$ .

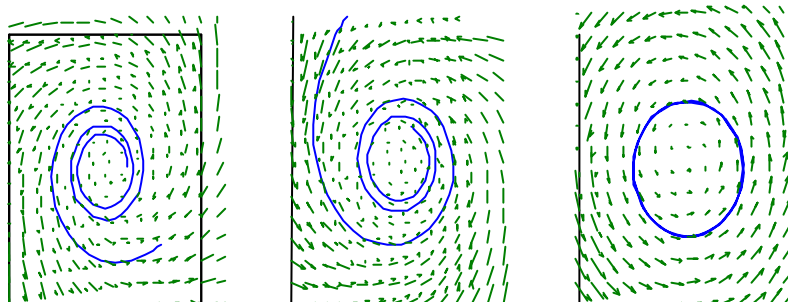


Figura 15 Trayectorias según el valor de  $a$

De la misma manera, los nodos estrellas pueden ser alterados por pequeños términos no lineales, pero a diferencia de los centros, su estabilidad no cambia.

#### 3.4.4 Puntos hiperbólicos

Un punto crítico se llama hiperbólico cuando tiene  $\text{Re}(\lambda) \neq 0$  en todos sus valores propios. En un sistema no lineal, un punto crítico es hiperbólico si la matriz jacobiana evaluada en ese punto, no tiene valores propios imaginarios.

La estabilidad de estos puntos no se ve afectada por los términos no lineales muy pequeños.

Toda la descripción anterior de la relación entre las trayectorias de un sistema no lineal cerca de un punto crítico y las trayectorias del sistema linealizado, se formalizan con el siguiente teorema<sup>2</sup>:

#### Teorema 8

Teorema de Hartman Grobman Consideramos el sistema no lineal planar (en  $\mathfrak{R}^2$ ),  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , con  $\mathbf{f}$  suficientemente suave. Suponemos que  $\mathbf{x}^*$  es punto crítico aislado.

Suponemos, además, que  $\mathbf{p}(\mathbf{x}^*) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}^*}$  no tiene valores propios nulos o imaginarios puros. Entonces existe un homeomorfismo  $h$  definido en un entorno  $D \subset \mathfrak{R}^2$  de  $\mathbf{x}^*$ ,  $h: D \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , que lleva las trayectorias del no lineal sobre las del sistema linealizado. En particular  $h(\mathbf{x}^*) = 0$ .

El Teorema de Hartman-Grobman afirma que es posible "deformar" de manera continua todas las trayectorias del sistema no lineal, alrededor del punto de equilibrio aislado, en las trayectorias del sistema linealizado, a través del homeomorfismo  $h$ . Dicho homeomorfismo (aplicación continuamente diferenciable con inversa continua) asigna un espacio de fases a otro conservando el sentido y las trayectorias. Entonces, el teorema afirma que la estabilidad de puntos hiperbólicos se conserva al linealizar el sistema.

**Comentario [G3]:** Tené en cuenta que el teorema es verdadero aún n para más dimensiones, es decir, para  $\mathfrak{R}^n$ . Lo dejamos para  $\mathfrak{R}^2$ , porque es lo que necesitas en tu trabajo

#### 3.4.5 Ciclos límites

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada que atraen o repelen a otras soluciones cercanas. Aislada significa que las trayectorias vecinas no son cerradas; son espirales que se mueven desde o hacia el ciclo límite.

Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite, éste es estable o atractor; de lo contrario, el ciclo límite es inestable, o excepcionalmente, semi-estable. Un ciclo límite es semi-estable cuando las trayectorias vecinas que comienzan cerca del ciclo límite se aproximan a él cuando  $t \rightarrow \infty$  por el interior y cuando  $t \rightarrow -\infty$  por el exterior, o viceversa.

<sup>2</sup> El teorema es válido para  $\mathfrak{R}^n$ , está enunciado para  $\mathfrak{R}^2$  porque el trabajo está referido a esa dimensión

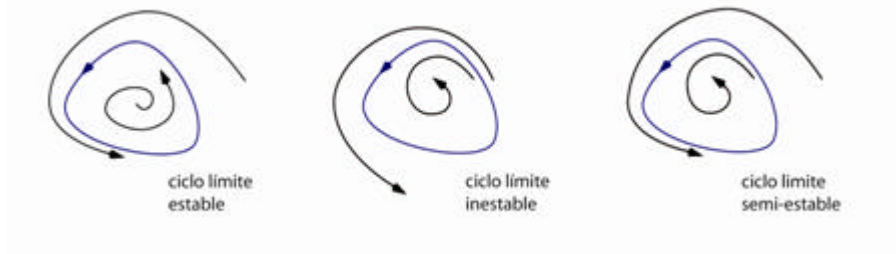


Figura 16 Tipos de ciclos límites

Los ciclos límites son inherentes de sistemas no lineales; ellos no pueden ocurrir en sistemas lineales. Un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, en el caso de puntos críticos que son centros, pero las órbitas no son aisladas.

### 3.4.6 Teorema de Poincaré-Bendixson

La existencia de ciclos límites en sistemas no lineales, no es fácilmente detectable. Se requeriría resolver el sistema analíticamente, cosa que no siempre es posible. Existen varios teoremas que indican bajo qué hipótesis se puede asegurar que un sistema *no* tiene ciclos límites. Para determinar la existencia de ciclos límites, la herramienta más útil es el siguiente resultado:

Teorema 9

#### Teorema de Poincaré-Bendixson

• Supongamos que:

- (1)  $R$  es un subconjunto cerrado y acotado  $\subset \mathbb{R}^2$ ;
- (2)  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  es un campo vectorial continuamente diferenciable en un conjunto abierto  $\subset \mathbb{R}^2$ ;
- (3)  $R$  no contiene ningún punto fijo; y
- (4) existe una trayectoria  $C$  que está confinada en  $R$  (si comienza en  $R$ , permanece en  $R$  para todo  $t$ ).

Entonces  $C$  es una órbita cerrada, o gira en espiral hacia una órbita cerrada cuando  $t \rightarrow \infty$ .

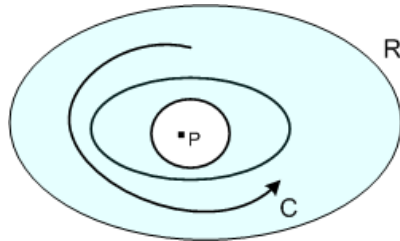


Figura 17 Teorema de Poincaré Bendixon

La figura 17 muestra una región con forma de anillo cerrado  $R$  que no contiene puntos fijos y la trayectoria  $C$  está confinada dentro de  $R$ .

Cuando se aplica el teorema de Poincaré-Bendixon es fácil satisfacer las condiciones (1) a (3), pero la condición (4) es más difícil, porque es una condición sobre "toda trayectoria" en el interior de  $R$ . Lo más común es construir una región de atrape  $R$  (trapping region), por ejemplo, un conjunto cerrado conexo tal que el campo vectorial  $f$  apunte hacia adentro en toda la frontera de  $R$ .

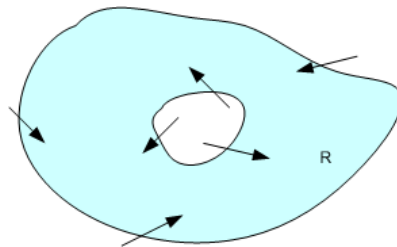


Figura 18 Región de atrape

Luego, todas las trayectorias que atraviesan la frontera de  $R$  lo hacen hacia adentro, y por lo tanto, quedan atrapadas en el interior de  $R$ . Si además se sabe que no hay puntos fijos en  $R$ , el teorema asegura que  $R$  contiene una órbita cerrada.

#### 4. Análisis cualitativo del modelo de Fitzhugh-Nagumo

##### 4.1 Cálculo de puntos de equilibrio

En esta sección se analiza matemáticamente el modelo de FHN

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = c \left( x - \frac{x^3}{3} + y + z \right)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{c} (a - x - by)$$

donde los parámetros a considerar son  $a = 0,7$  ,  $b = 0,8$  y  $c = 3$  (Hernandez, Padín, Robbio, 2008).

Para realizar el análisis del sistema, se hallan los puntos de equilibrio, es decir los puntos fijos para los cuales la tasa de variación de la variable  $x$  y la variable  $y$  son nulas. Estos puntos están dados por la intersección de las curvas dadas por las ceroclinas, es decir, las curvas donde  $\dot{x} = 0$  o  $\dot{y} = 0$

Entonces,  $\frac{dx}{dt} = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 0$ ,

$$c \left( x - \frac{x^3}{3} + y + z \right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{c} (a - x - by) = 0$$

$$3 \left( x - \frac{x^3}{3} + y + z \right) = 0 \quad \frac{1}{3} (0,7 - x - 0,8y) = 0$$

$$x - \frac{x^3}{3} + y + z = 0 \quad 0,7 - x - 0,8y = 0$$

$$y = -x + \frac{x^3}{3} - z \quad y = \frac{x - 0,7}{-0,8}$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$$

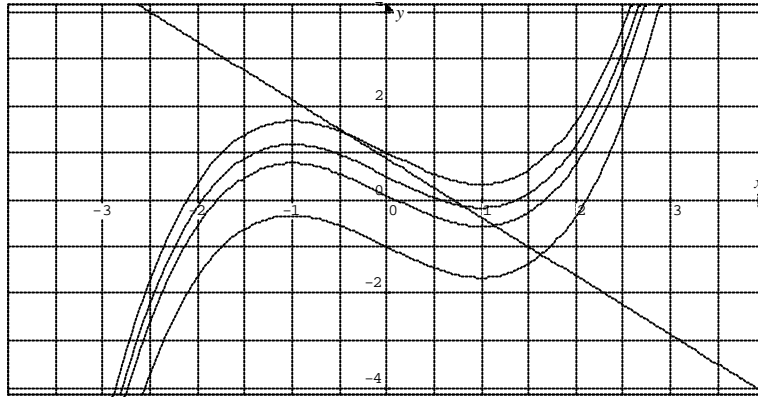


Figura 19 Ceroclinas para  $\frac{dx}{dt} = 0$  y  $\frac{dy}{dt} = 0$ , con  $z=1, -0.1, -1$

Al tener fijos los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$ , la modificación del parámetro  $z$  tiene como consecuencia la traslación de la ceroclina cúbica en dirección del eje  $y$ .

Los puntos críticos se hallan en la intersección de la ceroclina cúbica y la lineal.

Analíticamente

$$-x + \frac{x^3}{3} - z = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$$

$$-x + \frac{x^3}{3} - z - \frac{7}{8} + \frac{5}{4}x = 0$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{x^3}{3} - z - \frac{7}{8} = 0$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{x^3}{3} - \left(z + \frac{7}{8}\right) = 0$$

Se obtienen los siguientes puntos:

$$x_{real} = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left(24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}\right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left(24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}\right)^{1/3}}$$

$$x_{compleja}^1 = \frac{2 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt[3]{2}(i + \sqrt{3}) \left(24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}\right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left(24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}\right)^{1/3}}$$

$$x_{compleja}^2 = \frac{2 - 2i\sqrt{3} - \sqrt[3]{2} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{2/3} (1 + i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{8} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{1/3}}$$

Se analiza sólo el punto de equilibrio real, porque los otros no tienen sentido físico. Entonces, el sistema tiene un sólo punto crítico en

$$(x^*; y^*) = \left( \begin{array}{l} \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{1/3}}; \\ -\frac{5}{4} \left[ \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{1/3}} \right] + \frac{7}{8} \end{array} \right)$$

Por supuesto, el punto crítico depende del valor del parámetro  $z$ . La naturaleza del punto crítico y la forma de las trayectorias en su entorno dependerá también del valor de  $z$ .

#### 4.2 Análisis de los puntos críticos

Para conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema de Fitzhugh-Nagumo se analiza la parte lineal del campo vectorial. La matriz  $\mathbf{P}$  de linealización del modelo de FHN alrededor del punto de equilibrio esta dada por el jacobiano del sistema,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dx} & \frac{dx}{dy} \\ \frac{dy}{dx} & \frac{dy}{dy} \end{pmatrix}$$

Entonces  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 - 3x^2 & 3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \end{pmatrix}$  de donde el determinante y la traza vienen

dados por

$$\text{Determinante: } \Delta = (3 - 3x^2) \left( -\frac{4}{15} \right) - \left( -\frac{1}{3} \right) 3 = -\frac{4}{5} + \frac{4}{5}x^2 + 1 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x^2$$

$$\text{Traza: } \tau = (3 - 3x^2) + \left( -\frac{4}{15} \right) = \frac{41}{15} - 3x^2$$

Dado que el punto crítico depende de un parámetro  $z$ , es conveniente analizar el plano traza-determinante (sección 3.3.2), para lo que se debe hacer  $\tau = 0$  y  $\Delta = 0$  evaluados en el punto de equilibrio.

Del cálculo de  $\tau = 0$ , evaluada en la  $x_{\text{real}}$ , se obtiene  $z_1 = -0,346478$  y  $z_2 = -1,403523$  y de  $\Delta = 0$  se obtienen dos valores de  $z$  complejos conjugados,  $z_1 = -\frac{7}{8} + \frac{1}{12}i$  y  $z_2 = -\frac{7}{8} - \frac{1}{12}i$ .

De lo anterior, solo las raíces de  $t$  son útiles pues son reales y es en esos valores de  $z$  que el punto fijo pasa de estable a inestable y luego de inestable a estable nuevamente.

La ecuación del polinomio característico de la linealización es  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$

donde  $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$  son los valores propios.

Entonces,  $\tau = \frac{41}{15} - 3x^2$  y  $\Delta = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x^2$  con  $\Delta > 0$  siempre

En el sistema de FHN, el punto de equilibrio esta dado para el punto de abscisa

$$x = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)^{1/3}}$$

Donde

- si  $z = -0,346478$  (el caso  $\tau = 0$ )

$$\bullet \quad x = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24(-0,346478) + 21 + \sqrt{576(-0,346478)^2 + 1008(-0,346478) + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24(-0,346478) + 21 + \sqrt{576(-0,346478)^2 + 1008(-0,346478) + 445} \right)^{1/3}}$$

$$x = \frac{8.922677842}{9.347803097} = 0.954521372 .$$

- Si  $z > -0,346478$ , por ejemplo, para  $z=0$ :

$$x = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24.0 + 21 + \sqrt{576.0^2 + 1008.0 + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24.0 + 21 + \sqrt{576.0^2 + 1008.0 + 445} \right)^{1/3}}$$



$$x = \frac{13.2467796}{11.04401303} = 1.199408034 \quad \text{En este punto } \tau < 0 \text{ y el sistema será}$$

estable. (Proposición 1)

- Si  $z < -0,346478$ , por ejemplo,  $z = -1$ :

$$x = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24 \cdot (-1) + 21 + \sqrt{576 \cdot (-1)^2 + 1008 \cdot (-1) + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24 \cdot (-1) + 21 + \sqrt{576 \cdot (-1)^2 + 1008 \cdot (-1) + 445} \right)^{1/3}}$$

$$x = \frac{-1.098199205}{2.685964699} = -0.408865837 \quad \text{En ese punto } \tau > 0 \text{ y el sistema}$$

será inestable. (Proposición 1)

- Si  $z = -1,40352$  (donde  $\tau = 0$ )

$$x = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24 \cdot (-1,40352) + 21 + \sqrt{576 \cdot (-1,40352)^2 + 1008 \cdot (-1,40352) + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24 \cdot (-1,40352) + 21 + \sqrt{576 \cdot (-1,40352)^2 + 1008 \cdot (-1,40352) + 445} \right)^{1/3}}$$

$$x = \frac{-1.6337885}{1,7116342} = -0,95451965$$

- Si  $z < -1,40352$ , por ejemplo,  $z = -2$

$$x = \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 24 \cdot (-2) + 21 + \sqrt{576 \cdot (-2)^2 + 1008 \cdot (-2) + 445} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 24 \cdot (-2) + 21 + \sqrt{576 \cdot (-2)^2 + 1008 \cdot (-2) + 445} \right)^{1/3}}$$

$$x = \frac{-1.777980}{1,058267} = -1,680086 \quad \text{En este punto } \tau < 0 \text{ y el sistema será}$$

estable. (Proposición 1)

Ahora bien, para  $z = -0,346478$  el punto de equilibrio es el que corresponde a la abscisa  $x = 0.954521372$

Entonces

$$\tau_{(0.954521372)} = 0$$

$$\Delta_{(0.954521372)} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} (0.954521372)^2 = 0.928888839 > 0$$

$$\tau^2 - 4\Delta = 0 - 4 \cdot (0.928888839) < 0$$

Entonces según proposición 1 d), existen dos valores propios complejos conjugados puramente imaginarios (punto 3.3.1, caso E), es decir, que el sistema linealizado tiene un centro.

$$\text{Pues, } \lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4.0,928888839}}{2} = \pm 0.963788794 i$$

El mismo análisis se realiza para  $z = -1,40352$ , obteniendo los valores de  $\lambda_{1,2} = \pm 0,963787 i$

Al variar el valor de  $z$ , se obtienen diferentes puntos críticos, cuya tipología se muestra en las siguientes tablas:

Tabla 2: Tipos de puntos críticos y estabilidad

valor de z	x	y	traza	Determinante	Discriminante	Tipo de punto	Estabilidad
-8	-2,685200224	4,23150028	-18,8975674	5,9682402	333,245093	Nodo	Estable
-5	-2,205031616	3,63128952	-11,85316	4,08973154	124,138475	Nodo	Estable
-1,5	-1,032480224	2,16560028	-0,4647129	1,05281233	-3,99529124	Foco	Estable
-1,40352	-0,95451965	2,06814956	0	0,92888621	-3,71554484	Centro	Indeterminada
-1,3	-0,857956492	1,94744562	0,5250653	0,78887147	-2,87979232	Foco	Inestable
-0,7	0,516394935	0,22950633	1,93334215	0,41333098	2,08448793	Nodo	Inestable
-0,35	0,951480477	-0,3143506	0,01738804	0,92425208	-3,69670597	Foco	Inestable
-0,34648	0,954521373	-0,3181517	0	0,92888884	-3,71555536	Centro	Indeterminada
-0,3	0,993297475	-0,3666218	-0,22658629	0,9893119	-3,90590625	Foco	Estable
0	1,199408035	-0,62426	-1,58240557	1,35086371	-2,89944744	Foco	Estable
1,5	1,794540517	-1,3681756	-6,92779367	2,77630053	36,8891229	Nodo	Estable

Tabla 3: Tipos de puntos críticos según los valores propios

valor de z	x	y	$l_1$	$l_2$	Tipo de punto
-8	-2,6852	4,2315	- 0,321282	-18,576301	Nodo
-5	-2,20503	3,63129	- 0,355707	-11,497473	Nodo
-1,5	-1,03248	2,1656	- 0,232355 + 0,999411 i	- 0,232355 - 0,999411 i	Foco
-1,40352	-0,95452	2,06815	0,963787 i	- 0,963787 i	Centro
-1,3	-0,85796	1,947446	0,262533 + 0,848497 i	0,262533 - 0,848497 i	Foco
-0,7	0,516395	0,229506	1,6885589	0,2447831	Nodo
-0,35	0,95148	-0,31435	0,008694 + 0,961342 i	0,008694 - 0,961342 i	Foco
-0,34648	0,954521	-0,31815	0,963789 i	- 0,963789 i	Centro
-0,,3	0,993297	-0,36662	-0,113295 + 0,988169 i	- 0,113295 - 0,988169 i	Foco
0	1,199408035	-0,62426	-0,791203 + 0,851388 i	-0,791203 - 0,851388 i	Foco
1.5	1,794540517	-1,3681756	- 0,427076	- 6,500718	Nodo

Se observa, en las tablas 2 y 3 que el análisis de los puntos críticos para el modelo de FitzHugh –Nagumo se debe realizar en dos casos:

- ✓ Cuando ningún valor propio de la matriz de linealización tiene parte real igual a cero (puntos hiperbólicos).
- ✓ Cuando existen valores propios de la matriz de linealización con parte real igual a cero (puntos no hiperbólicos).

Para los valores de  $z = -0,346478$  y  $z = -1,40352$ , donde la traza es igual a cero, el sistema de ecuaciones diferenciales tiene dos centros, y como se dijo anteriormente, no se puede estudiar su estabilidad analizando la linealización debido a que, como el centro es un caso frontera, el punto crítico no es hiperbólico, y no se puede aplicar el teorema de Hartman Grobman. Es decir, el sistema linealizado, para este valor de  $z$ , no nos permite predecir el diagrama de trayectorias del sistema no lineal.

Se distinguen entonces tres intervalos de valores para el parámetro  $z$  donde la estabilidad del sistema está bien definida a través de los valores propios de la matriz jacobiana:

Tabla 4: Intervalos de estabilidad

Intervalos de $z$	Tipo de estabilidad
$(-\infty, -1.40352)$	Estable
$-1.40352$	Indeterminada
$(-1.40352, -0,346478)$	Inestable
$-0.346478$	Indeterminada
$(-0.346478, +\infty)$	Estable

Como la variable  $x$  representa el voltaje “negativo” transmembrana, los valores de  $z$  para los cuales, los puntos tienen primera componente negativa se descartan, pues representarían un voltaje positivo.

Por lo tanto, el sistema de FHN presenta siempre un punto fijo que es estable solo si  $z > -0,346478$ , lo que significa que la neurona está en estado pasivo (o latente), es decir que no está ni excitada ni inhibida sino que está en reposo.

### 4.3 Obtención de trayectorias solución

Para comprobar el análisis cualitativo, se resolvió el sistema de ecuaciones diferenciales con un algoritmo numérico implementado en Matlab, para determinados valores de  $z$ .

Para  $z=-0.7$ , el punto de equilibrio es  $(x^*, y^*) = (0,516394935, 0,229506331)$ .

Las trayectorias para distintos puntos iniciales se muestran en la figura 20

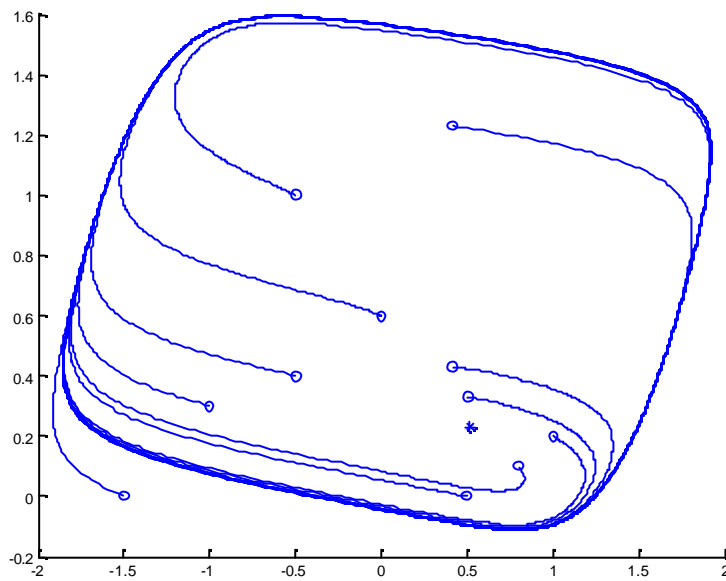


Figura 20 Trayectorias para  $z = -0.7$

Los puntos huecos son los puntos iniciales de las correspondientes trayectorias. Se observa cómo las trayectorias que se inician cerca del punto crítico (marcado con un asterisco) no permanecen cerca. Se confirma, entonces, que el punto crítico es inestable.

Se observa además que para este valor de  $z$ , las trayectorias terminan adoptando el recorrido de una trayectoria cerrada. En este caso, el diagrama de fases indica que existe un ciclo límite, correspondiente a una solución periódica. Para probar teóricamente la existencia del ciclo límite, usaremos el Teorema de Poincaré-Bendixon. Como se dijo, aplicarlo directamente no es simple, ya que no se puede verificar la hipótesis 4 fácilmente. En cambio, construiremos una región de atrape. Ésta consiste en una región en el plano de fases donde sea fácil comprobar que todas las trayectorias que atraviesan

su frontera, lo hacen hacia adentro. En nuestro caso la región de atrape consistirá en un rectángulo con lados paralelos a los ejes, eliminando un entorno del punto crítico. Recordemos que la región no debe tener puntos críticos (hipótesis 3 del teorema).

Consideraremos un rectángulo con vértices  $(x_i, y_j)$ ,  $i, j=1, 2$ ; en las ceroclinas, definidos por las siguientes ecuaciones

$$f(x_1, y_1) = 0$$

$$g(x_1, y_2) = 0$$

$$f(x_2, y_2) = 0$$

$$g(x_2, y_1) = 0$$

donde  $f(x, y) = \dot{x}$  y  $g(x, y) = \dot{y}$

Con un resolvidor numérico, se resolvió el sistema

$$\begin{cases} x_1 - \frac{x_1^3}{3} + y_1 - 0.7 = 0 \\ 0.7 - x_1 - 0.8 y_2 = 0 \\ x_2 - \frac{x_2^3}{3} + y_2 - 0.7 = 0 \\ 0.7 - x_2 - 0.8 y_1 = 0 \end{cases}$$

obteniendo los siguientes resultados:

$$x_1 = -2.57271$$

$$x_2 = 2.62272$$

$$y_1 = -2.4034$$

$$y_2 = 4.09089$$

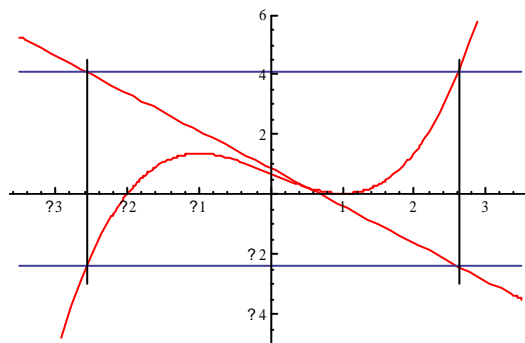


Figura 21 Construcción de la región de atrape

Se visualizan cuatro regiones determinadas por la intersección de las isoclinas entre sí (punto crítico) y las rectas  $x = -2.57271$ ,  $x = 2.62272$ ,  $y = -2.4034$  e  $y = 4.09089$  (fronteras exteriores de la región de atrape)

Evaluando el signo de  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  en esas regiones, se obtiene un esquema del movimiento, como se indica con flechas negras en la figura 22. Se puede ver que en toda la frontera del rectángulo, la dirección de esos vectores, indicando la dirección de las trayectorias del sistema, es hacia adentro de la región de atrape.

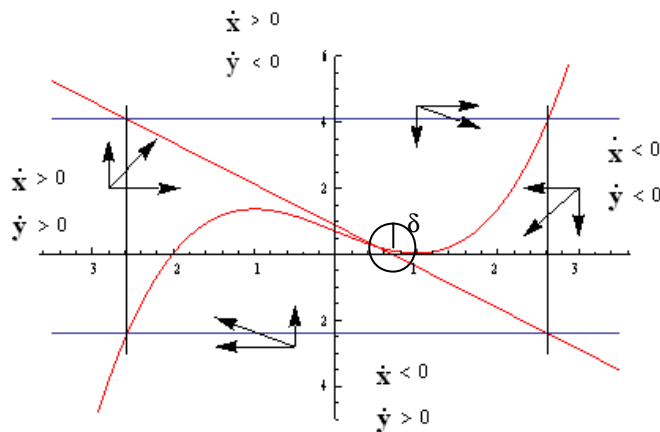


Figura 22 Dirección de las trayectorias en la frontera de la región de atrape

Por otro lado, eliminemos un pequeño entorno del punto crítico, es decir, todos los  $(x,y)$  tales que  $\|(x,y)-(x^*,y^*)\| < \delta$  para algún valor positivo de  $\delta$ . Como  $(x^*,y^*)$  es inestable, todas las trayectorias se alejan de ese punto. Entonces, toda trayectoria que atraviesa la frontera del entorno,  $\|(x,y)-(x^*,y^*)\| = \delta$  lo hace hacia afuera del entorno, es decir, hacia adentro de la región de atrape. Entonces, siendo la región de atrape  $R$  el rectángulo antes determinado menos el entorno del punto crítico, se ha probado que todas las trayectorias que atraviesan la frontera lo hacen hacia adentro de  $R$ . Así, toda trayectoria que ingresa a la región, queda confinada allí. Por lo tanto, por el teorema de Poincaré-Bendixon, se verifica la existencia de un ciclo límite.

Para  $z = -0.346478$ , el punto crítico es  $(x^*,y^*) = (0,954521373, -0,3181517)$ . Según el análisis anterior, este valor de  $z$  es el valor donde la estabilidad del



sistema cambia, de inestable a estable. Las trayectorias obtenidas por resolución numérica se grafican en la figura 23.

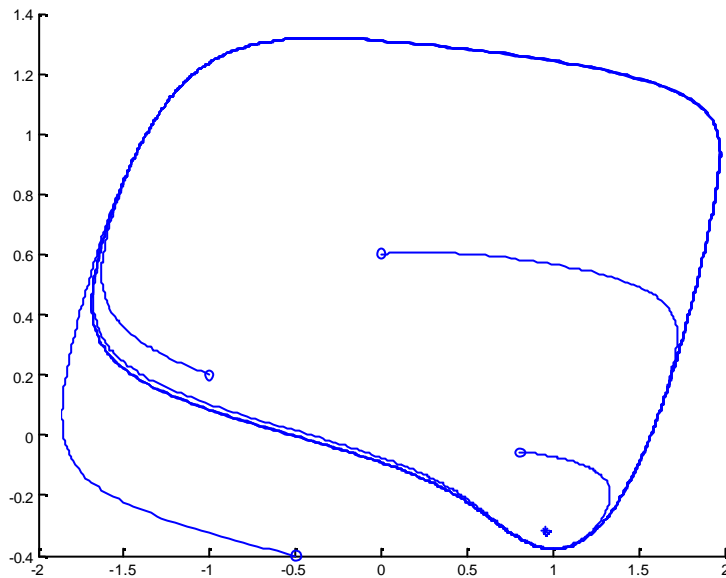


Figura 23 Trayectorias para  $z = -0.346478$

Se visualiza que permanece la existencia del ciclo límite.

Se observa que las trayectorias tienen forma de espirales que se aproximan a una órbita cerrada. Sin embargo, el sistema linealizado tiene trayectorias que son todas órbitas cerradas (ciclo). En este caso, el punto crítico no es un punto hiperbólico, y no se puede aplicar el teorema 10 para afirmar que el diagrama de trayectorias del sistema linealizado es topológicamente equivalente al diagrama del sistema no lineal.

Para  $z = -0.33$ , el punto crítico es  $(\hat{x}, \hat{y}) = (0,968550365, -0,335688)$ , el ciclo límite desaparece, y las trayectorias tienden al punto crítico. Recordemos que del análisis cualitativo de la sección anterior se determinó que para este valor de  $z$  el punto crítico es estable.

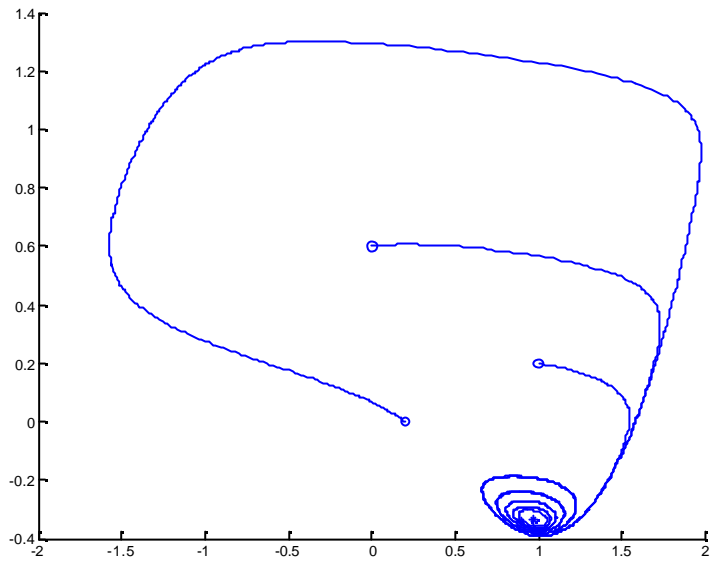


Figura 24 Trayectorias para  $z = -0.33$

Para  $z = -0.1$ , el punto crítico es  $(x^*, y^*) = (1, 137512229, -0,5468903)$ .

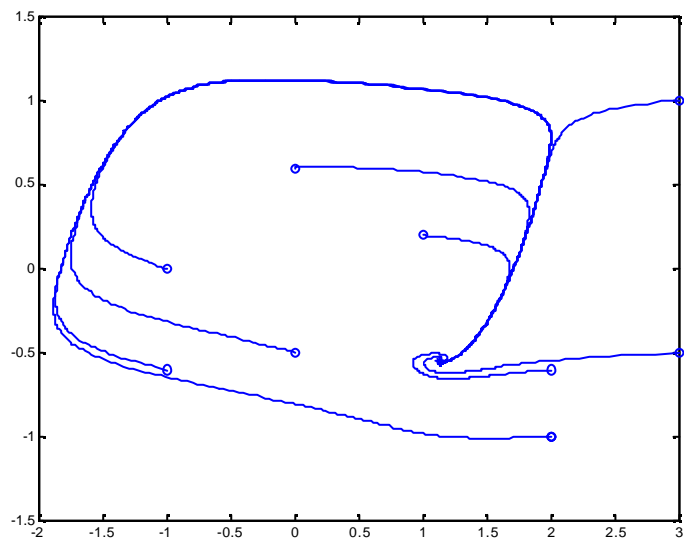


Figura 25 Trayectorias para  $z = -0.1$

Se observa (fig. 25) que las trayectorias se acercan al punto crítico (asterisco). En este caso, el punto crítico es un foco. En la siguiente figura (fig 26) se observa un acercamiento a la zona del punto crítico.

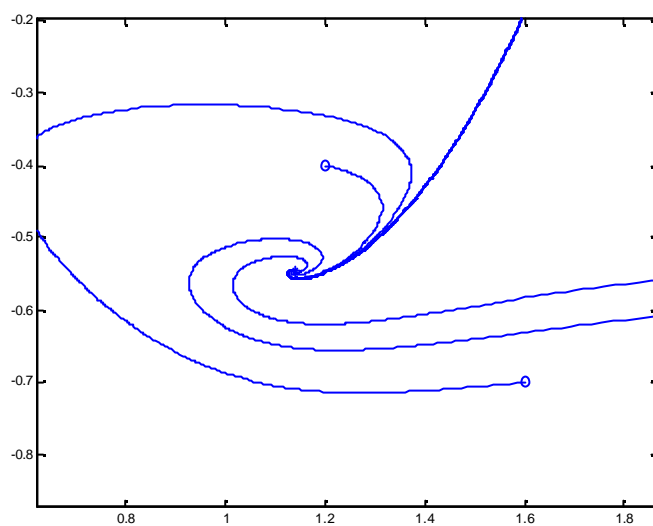


Figura 26 Trayectorias alrededor del punto crítico, para  $z = -0.1$

## **5. Conclusión**

A partir del modelo físico de Fitzhugh-Nagumo correspondiente al mecanismo de transferencia iónica de la membrana neuronal y de la diferencia de potencial eléctrico entre su medio interno y externo se realizó el análisis de las ecuaciones involucradas para determinar para diferentes grados de excitación de la neurona proveniente del medio externo su comportamiento desde el punto de vista de la propia generación de potenciales de acción o de una condición refractaria a la excitación. Para ello, se analizó el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y se estudió la naturaleza y comportamiento de los puntos críticos.

Se analizaron dichos puntos siguiendo dos criterios, uno, analizando el plano traza-determinante y el otro, considerando la relación entre los puntos críticos y los valores propios del sistema linealizado.

Se observó que el comportamiento de las trayectorias depende del valor de un parámetro, que mide fisiológicamente la excitación externa de la membrana neuronal.

La justificación teórica de la estabilidad y tipo de punto crítico que presenta el modelo, se validó con la resolución numérica del sistema, obteniéndose trayectorias que tienden al punto crítico (estable), que se alejan del punto crítico (inestable) y que tienden a una órbita cerrada (ciclo límite).

Además, para demostrar la existencia de un ciclo límite, se utilizó el teorema de Poincarè-Bendixon, encontrando una región de atrape que justifique la existencia de dicho ciclo límite.

Este tipo de investigación puede ser extendido a un conjunto de neuronas interconectadas donde es posible determinar la trayectoria dinámica de dicha red a partir de la conformación y resolución de una matriz compuesta por las ecuaciones de solución del modelo utilizado para cada una de las neuronas pertenecientes a dicha red.

# ***ANEXO***

### Resolución de la ecuación cúbica

La ecuación general cúbica es  $a^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Para el caso estudiado:  $a = 1/3$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1/4$  y  $d = -z - 7/8$

Cálculos auxiliares:

$$-b^2 + 3ac = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Llamo  $A = -2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2}$

$$\text{Entonces, } A = -27 \cdot \frac{1}{9} \left( -z - \frac{7}{8} \right) + \sqrt{4 \left( 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right)^3 + \left( -27 \cdot \frac{1}{9} \left( -z - \frac{7}{8} \right) \right)^2}$$

$$A = 3z + \frac{21}{8} + \sqrt{\frac{1}{16} + \left( 3z + \frac{21}{8} \right)^2}$$

$$A = 3z + \frac{21}{8} + \sqrt{\frac{1}{16} + 9z^2 + \frac{63}{4}z + \frac{445}{64}}$$

$$A = 3z + \frac{21}{8} + \sqrt{\frac{576z^2 + 1008z + 445}{64}}$$

$$A = 3z + \frac{21}{8} + \frac{1}{8} \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}$$

$$A = \frac{1}{8} \left( 24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445} \right)$$

Aplicando la fórmula resolvente para encontrar las raíces reales y complejas de la ecuación cúbica, obtengo:

$$x_{\text{real}} = -\frac{b}{3a} - \frac{\sqrt[3]{2}(-b^2 + 3ac)}{3aA^{1/3}} + \frac{A^{1/3}}{3\sqrt[3]{2}a}$$

$$x^1_{\text{compleja}} = -\frac{b}{3a} + \frac{(1+i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{3\sqrt[3]{2^2} \cdot a \cdot A^{1/3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})A^{1/3}}{6\sqrt[3]{2}a}$$

$$x^2_{\text{compleja}} = -\frac{b}{3a} + \frac{(1-i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{3\sqrt[3]{2^2} \cdot a \cdot A^{1/3}} - \frac{(1+i\sqrt{3})A^{1/3}}{6\sqrt[3]{2}a}$$

Cálculo de la  $x_{\text{real}}$

$$\begin{aligned}
x_{\text{real}} &= \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{A^{1/3}}{3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{3}}}{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot A^{1/3}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2} + \frac{A^{1/3}}{\sqrt[3]{2}}}{A^{1/3}} = \frac{-\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^5} + \sqrt[3]{2^4} \cdot (A^{1/3})^2}{\sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}} \\
&= \\
&= \frac{-\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2^6} + \sqrt[3]{2^4} \cdot A^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}} = \frac{-\frac{1}{4} \cdot 4 + \sqrt[3]{2^4} \cdot A^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}} = \\
&= \frac{-1 + \sqrt[3]{2^4} \cdot \left( \frac{1}{8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}) \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot \left( \frac{1}{8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}) \right)^{1/3}} = \\
&= \frac{-1 + 2 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{4} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot \frac{1}{2} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}} = \\
&= \frac{-1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot \frac{1}{2} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}} = \\
x_{\text{real}} &= \frac{-2 + \sqrt[3]{2} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}}
\end{aligned}$$

Cálculo de  $x^1_{\text{compleja}}$

$$\begin{aligned}
x^1_{\text{compleja}} &= -\frac{b}{3a} + \frac{(1+i\sqrt{3})(-b^2+3ac)}{3 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot a \cdot A^{1/3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})A^{1/3}}{6 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot a} = \\
&= \frac{(1+i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4}}{3 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot A^{1/3}} - \frac{(1-i\sqrt{3})A^{1/3}}{6 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{3}} = \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^6} \cdot \frac{1}{4} (1+i\sqrt{3}) - \sqrt[3]{2^7} (1-i\sqrt{3}) A^{2/3}}{2 \cdot \sqrt[3]{2^8} \cdot A^{1/3}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{4} (1+i\sqrt{3}) - 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} (1-i\sqrt{3}) A^{2/3}}{2 \cdot \sqrt[3]{2^8} \cdot A^{1/3}} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2 + 2i\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2}(1 - i\sqrt{3}) \left( \frac{1}{8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}) \right)^{2/3}}{2\sqrt[3]{2^8} \cdot \left( \frac{1}{8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445}) \right)^{1/3}} =$$

$$= \frac{2 + 2i\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2}(1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{2\sqrt[3]{2^8} \cdot \frac{1}{2} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}} =$$

$$= \frac{2 + 2i\sqrt{3} - \sqrt[3]{2}(1 - i\sqrt{3}) (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{\sqrt[3]{2^8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}} =$$

$$= \frac{2 + 2i\sqrt{3} - (-i)\sqrt[3]{2}(i + \sqrt{3}) (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{\sqrt[3]{2^8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}} =$$

$$x^1_{\text{compleja}} = \frac{2 + 2i\sqrt{3} + i\sqrt[3]{2}(i + \sqrt{3}) (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{2/3}}{\sqrt[3]{2^8} (24z + 21 + \sqrt{576z^2 + 1008z + 445})^{1/3}}$$

Cálculo de la  $x^2_{\text{compleja}}$

$$x^2_{\text{compleja}} = -\frac{b}{3a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{3\sqrt[3]{2^2} \cdot a \cdot A^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3})A^{1/3}}{6\sqrt[3]{2} \cdot a} =$$

$$\frac{(1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4}}{3\sqrt[3]{2^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot A^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3})A^{1/3}}{6\sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{(1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot A^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3})A^{1/3}}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2^6}(1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4} - \sqrt[3]{2^7} \cdot A^{2/3}(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2^8} \cdot A^{1/3}} =$$

$$= \frac{8(1 - i\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{4} - \sqrt[3]{2^7} \cdot A^{2/3}(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2^8} \cdot A^{1/3}} = \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 4\sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3}(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2^8} \cdot A^{1/3}} =$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2-2i\sqrt{3}-4\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{8}\left(24z+21+\sqrt{576z^2+1008z+445}\right)\right)^{\frac{2}{3}}(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2^8}\left(\frac{1}{8}\left(24z+21+\sqrt{576z^2+1008z+445}\right)\right)^{\frac{1}{3}}} = \\
&= \frac{2-2i\sqrt{3}-4\sqrt[3]{2}\cdot\frac{1}{4}\left(24z+21+\sqrt{576z^2+1008z+445}\right)^{\frac{2}{3}}(1+i\sqrt{3})}{2\sqrt[3]{2^8}\cdot\frac{1}{2}\left(24z+21+\sqrt{576z^2+1008z+445}\right)^{\frac{1}{3}}} = \\
\hline
x_{\text{compleja}}^2 &= \frac{2-2i\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}\left(24z+21+\sqrt{576z^2+1008z+445}\right)^{\frac{2}{3}}(1+i\sqrt{3})}{\sqrt[3]{2^8}\left(24z+21+\sqrt{576z^2+1008z+445}\right)^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

### Análisis del plano traza determinante

Traza = 0

$$\begin{aligned}
\tau_{(x_{\text{real}})} &= \frac{41}{15} - 3 \left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2}\left(21+24z+\sqrt{445+1008z+576z^2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2^5}\left(21+24z+\sqrt{445+1008z+576z^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 \\
\frac{41}{15} - 3 \left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2}\left(21+24z+\sqrt{445+1008z+576z^2}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2^5}\left(21+24z+\sqrt{445+1008z+576z^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)^2 &= 0
\end{aligned}$$

Llamo  $A = 21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2}$

Entonces

$$-3 \left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2}A^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2^5}A^{\frac{1}{3}}} \right)^2 = -\frac{41}{15}$$

$$\left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2}A^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2^5}A^{\frac{1}{3}}} \right)^2 = -\frac{41}{15} : (-3)$$

$$\left| \frac{-2 + \sqrt[3]{2}A^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{2^5}A^{\frac{1}{3}}} \right| = \sqrt{\frac{41}{45}}$$

• Para  $\sqrt{\frac{41}{45}}$

$$-2 + \sqrt[3]{2A}^{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{41}{45}} \cdot \sqrt[3]{2^5 A}^{\frac{1}{3}}$$

$$-2 + \sqrt[3]{2A}^{\frac{2}{3}} - \sqrt[6]{\frac{41^3}{45^3} \cdot 2^{10} A}^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$-2 + \sqrt[3]{2A}^{\frac{2}{3}} - \sqrt[6]{\frac{41^3}{(3^2 \cdot 5)^3} \cdot 2^{10} A}^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$\sqrt[3]{2A}^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt[6]{\frac{41^3}{5^3} \cdot 2^4 A}^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{2A}^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \sqrt[6]{\frac{41^3}{5^3} \cdot 2^4 A}^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{2A}^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \frac{\sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4}}{\sqrt{5}} A^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{5} A}^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4 A}^{\frac{1}{3}} - 6 \cdot \sqrt{5} = 0$$

$$3 \cdot \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^3 A}^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4 A}^{\frac{1}{3}} - 6 \cdot \sqrt{5} = 0$$

Sea  $A^{\frac{1}{3}} = R$

Entonces  $3 \cdot \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^3} R^2 - 2 \cdot \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} R - 6 \cdot \sqrt{5} = 0$

$$R_{1,2} = \frac{2 \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} \pm \sqrt{\left(-2 \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4}\right)^2 - 4 \cdot 3 \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} \cdot (-6 \sqrt{5})}}{2 \cdot 3 \cdot \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{2 \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} \pm \sqrt{4 \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} + 72 \sqrt[6]{5^6 \cdot 2^2}}}{6 \cdot \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{2 \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} \pm \sqrt{4 \left(\sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} + 90 \sqrt[3]{2}\right)}}{6 \cdot \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{2 \sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} \pm 2 \cdot \sqrt{\left(\sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} + 90 \sqrt[3]{2}\right)}}{6 \cdot \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{\sqrt[6]{41^3 \cdot 2^4} \pm \sqrt{\left(\sqrt[3]{41^3 \cdot 2^4} + 90 \cdot \sqrt[3]{2}\right)}}{3 \cdot \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{10,16432615 \pm 14,720951176}{8,451807342}$$

$$R_1 = 2,944373471 \quad y \quad R_2 = -0,539130251$$

⇒ Para  $R_1$

$$A^{1/3} = 2,944373471$$

$$A = (2,944373471)^3 = 25,52576039$$

$$21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2} = 25,52576039$$

$$\sqrt{445 + 1008z + 576z^2} = 4,52576039 - 24z$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = (4,52576039 - 24z)^2$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = 20,48250709 - 217,2364987z + 576z^2$$

$$1008z + 217,2364987z = 20,48250709 - 445$$

$$1225,236499z = -424,5174929$$

$$\boxed{z_1 = -0,346478}$$

⇒ Para  $R_2$

$$A^{1/3} = -0,539130251$$

$$A = (-0,539130251)^3 = -0,156704368$$

$$21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2} = -0,156704368$$

$$\sqrt{445 + 1008z + 576z^2} = -21,156704368 - 24z$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = (-21,156704368 - 24z)^2$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = 447,6061397 + 1015,52181z + 576z^2$$

$$1008z - 1015,52181z = 447,6061397 - 445$$

$$-7,52181z = 2,6061397$$

$$\boxed{z_1 = -0,346478}$$

- Para  $-\sqrt{\frac{41}{45}}$  siguiendo el análisis anterior, se obtienen  $R_1 = -2,944373471$  y  $R_2 = 0,539130251$ , resultando para estos valores  $z_2 = -1.403523$

Determinante = 0

$$\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5} \left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \left( 21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2} \right)^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \left( 21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2} \right)^{1/3}} \right)^2 + \frac{1}{5} = 0$$

Llamo  $A = 21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2}$

Entonces

$$\frac{4}{5} \left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}} \right)^2 = -\frac{1}{5}$$

$$\left( \frac{-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}} \right)^2 = -\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\frac{-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3}}{\sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}} = \sqrt{-\frac{1}{4}}$$

a- Para  $\frac{1}{2}i$

$$-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3} = \frac{1}{2}i \cdot \sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}$$

$$-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3} - \frac{1}{2}i \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot A^{1/3} = 0$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3} - i \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot A^{1/3} - 2 = 0$$

Sea  $A^{1/3} = R$

$$\sqrt[3]{2} \cdot R^2 - i \sqrt[3]{2^2} \cdot R - 2 = 0$$

$$R_{1,2} = \frac{\sqrt[3]{2^2} i \pm \sqrt{\left(-i \sqrt[3]{2^2}\right)^2 - 4 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot (-2)}}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{\sqrt[3]{2^2} i \pm \sqrt{-2 \sqrt[3]{2} - 8 \sqrt[3]{2}}}{2 \sqrt[3]{2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{\sqrt[3]{2^2} i \pm \sqrt{6 \sqrt[3]{2}}}{2 \sqrt[3]{2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{1.587401052i \pm 2.74945927}{2.5198421}$$

$$R_1 = 1.091123634 + 0.629960524i$$

$$R_2 = -1.091123634 + 0.629960524i$$

⇒ Para  $R_1$

$$A^{1/3} = 1.091123634 + 0.629960524i$$

$$A = (1.091123634 + 0.629960524i)^3$$

$$A = 1.299038099 + 2.249999999i - 1.299038099 - 0.249999999i$$

$$A = 1.9i = 2i$$

$$\Rightarrow 21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2} = 2i$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = (2i - 21 - 24z)^2$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = -4 - 42i - 48iz - 42i + 441 + 504z - 48iz + 504z + 576z^2$$

$$48iz + 48iz = -4 - 84i + 441 - 445$$

$$96iz = -8 - 84i$$

$$-96z = 84 - 8i$$

$$z = -\frac{84}{96} + \frac{8}{96}i \quad \Rightarrow \quad \underline{z_1 = -\frac{7}{8} + \frac{1}{12}i}$$

⇒ Para  $R_2$

$$A^{1/3} = -1.091123634 + 0.629960524i$$

$$A = (-1.091123634 + 0.629960524i)^3$$

$$A = -1.299038099 + 2.249999999i + 1.299038099 - 0.249999999i$$

$$A = 1.9i = 2i \quad \therefore \underline{\mathbf{z_2 = z_1}}$$

b- Para  $-\frac{1}{2}i$

$$-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3} = -\frac{1}{2}i \sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3}$$

$$-2 + \sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3} + \frac{1}{2}i \sqrt[3]{2^5} \cdot A^{1/3} = 0$$

$$\sqrt[3]{2} \cdot A^{2/3} + i \sqrt[3]{2^2} \cdot A^{1/3} - 2 = 0$$

Sea  $A^{1/3} = R$

$$\sqrt[3]{2} \cdot R^2 + i \sqrt[3]{2^2} \cdot R - 2 = 0$$

$$R_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{2^2}i \pm \sqrt{\left(i\sqrt[3]{2^2}\right)^2 - 4\sqrt[3]{2}(-2)}}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{2^2}i \pm \sqrt{-2\sqrt[3]{2} - 8\sqrt[3]{2}}}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{-\sqrt[3]{2^2}i \pm \sqrt{6\sqrt[3]{2}}}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$R_{1,2} = \frac{-1.587401052i \pm 2.74945927}{2.5198421}$$

$$R_1 = 1.091123634 - 0.629960524i$$

$$R_2 = -1.091123634 - 0.629960524i$$

$\Rightarrow$  Para  $R_1$

$$A^{1/3} = 1.091123634 - 0.629960524i$$

$$A = (1.091123634 - 0.629960524i)^3$$

$$A = 1.299038099 - 2.249999999i - 1.299038099 + 0.249999999i$$

$$A = -1.9i = -2i$$

$$\Rightarrow 21 + 24z + \sqrt{445 + 1008z + 576z^2} = -2i$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = (-2i - 21 - 24z)^2$$

$$445 + 1008z + 576z^2 = -4 + 42i + 48iz + 42i + 441 + 504z + 48iz + 504z + 576z^2$$

$$-48iz - 48iz = -4 + 84i + 441 - 445$$

$$-96iz = -8 + 84i$$

$$96z = -84 - 8i$$

$$z = -\frac{84}{96} - \frac{8}{96}i \quad \Rightarrow \quad \underline{z_1 = -\frac{7}{8} - \frac{1}{12}i}$$

$\Rightarrow$  Para  $R_2$

$$A^{1/3} = -1.091123634 - 0.629960524i$$

$$A = (-1.091123634 - 0.629960524i)^3$$

$$A = -1.299038099 - 2.249999999i + 1.299038099 + 0.249999999i$$

$$A = -1.9i = -2i \quad \therefore \underline{z_2 = z_1}$$

### Cálculo de los valores propios del polinomio característico

La ecuación del polinomio característico de la linealización es  $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$

donde  $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$  son los valores propios.  $\tau$  = traza de  $\mathbf{P}$  y  $\Delta$  = det. de

$\mathbf{P}$ .

Entonces,  $\tau = \frac{41}{15} - 3x^2$  y  $\Delta = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x^2$  con  $\Delta > 0$

siempre

$$\tau^2 - 4\Delta = \left(\frac{41}{15} - 3x^2\right)^2 - 4\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}x^2\right)$$

$$\tau^2 - 4\Delta = \frac{1681}{225} - \frac{246}{15}x^2 + 9x^4 - \frac{4}{5} - \frac{16}{5}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1051}{225} - \frac{98}{5}x^2 + 9x^4 > 0$$

$$\begin{aligned} & \pm \sqrt{\frac{\frac{98}{5} \pm \sqrt{\frac{9604}{25} - 4 \cdot 9 \cdot \frac{1051}{225}}}{2 \cdot \frac{1051}{225}}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{98}{5} \pm \sqrt{216}}{\frac{2102}{225}}} = \\ & = \pm \sqrt{\frac{\frac{98}{5} \pm 14.69693846}{8.942}} = \pm \sqrt{3.835393218} = \pm 1.958416 \quad y \\ & \pm \sqrt{0.548304595} = \pm 0.740475924 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} & (x + 1.958416)(x - 1.958416)(x + 0.740475924)(x - 0.740475924) > 0 \\ & (x^2 - 3.835393218)(x^2 - 0.548304595) > 0 \\ & (x + 1.958416)(x - 1.958416) > 0 \quad \wedge \quad (x + 0.740475924)(x - 0.740475924) > 0 \\ & (x + 1.958416) > 0 \quad \wedge \quad (x - 1.958416) > 0 \quad \wedge \quad (x + 0.740475924) > 0 \quad \wedge \\ & (x - 0.740475924) > 0 \end{aligned}$$

De donde

$$x > -1.958416 \quad \wedge \quad x > 1.958416 \quad \wedge \quad x > -0.740475924 \quad \wedge \quad x > 0.740475924$$

$$(1.958416; \infty) \qquad (0.740475924; \infty)$$

$$S = (1.958416; \infty)$$

Además, si

$$\begin{aligned} & (x + 1.958416)(x - 1.958416)(x + 0.740475924)(x - 0.740475924) > 0 \\ & (x^2 - 3.835393218)(x^2 - 0.548304595) > 0 \\ & (x + 1.958416)(x - 1.958416) < 0 \quad \wedge \quad (x + 0.740475924)(x - 0.740475924) < 0 \\ & (x + 1.958416) > 0 \quad \wedge \quad (x - 1.958416) < 0 \quad \wedge \quad (x + 0.740475924) > 0 \quad \wedge \\ & (x - 0.740475924) < 0 \end{aligned}$$

De donde

$$x > -1.958416 \quad \wedge \quad x < 1.958416 \quad \wedge \quad x > -0.740475924 \quad \wedge$$

$$x < 0.740475924$$

$$-(1.958416; 1.958416) \qquad (-0.740475924; 0.740475924)$$

$$S = (-0.740475924; 0.740475924)$$

Por lo tanto



- $\tau^2 - 4\Delta > 0$       si  $x \in (-0.740475924; 0.740475924)$   
 $x \in (1.958416; \infty)$
  
- $\tau^2 - 4\Delta = 0$       si  $x = -1.958416$   
 $x = 1.958416$   
 $x = -0.740475924$   
 $x = 0.740475924$
  
- $\tau^2 - 4\Delta < 0$       si  $x \in (-\infty; -0.740475924)$   
 $x \in (0.740475924; 1.958416)$

## **Bibliografía**

- Blanchard P, Devaney R y Hall G. (1999) *Ecuaciones Diferenciales* México. Internacional Thomson Editores SA:
- Brannan J. y Boyce W. (2007) *Ecuaciones diferenciales, una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones*. (1ra ed.) México. Grupo Editorial Patria.
- Fitzhugh R. (1961) *Impulses and Physiological status in Theoretic Models of Nerve Membranas*. *Bioophysics J*, 1, 445-466.
- Fitzhugh R. (1960) *Thresholds and Plateaus in the Hodgkin-Huxley Nerve Equations*. *The Journal of General Physiology*. Volumen 43. (pag. 867 a 896)
- Gennesar F. (2007) *Histología*, (3ra ed 7ma reimpresión.) Buenos Aires. Editorial Médica Panamericana
- Grossman S. (1988) *Algebra lineal*. (2da ed.) México: Grupo Editor Iberoamericano.
- Hernandez S., Robbio F. y Padín M. (2008), *Análisis Dinámico de un Modelo Neuronal*. En:IV Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería... Universidad de. Buenos Aires.
- Ruiz M. A. (1984). *Modelos Matemáticos en Biología*. Scientific American Revista Investigación y Ciencia Nro. 93 - Junio de 1984 (pag 99 a 108)
- Simmons G. (1993). *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas*. (2da ed.) España: Mc Graw Hill
- Strogatz S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Massachusetts: Perseus Books.
- Zill D. y Cullen M. (2006) *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. (6ta ed.). México. Internacional Thomson Editores SA: