



UTN.BA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

LAS SIMULACIONES COMO HERRAMIENTA DE ENSEÑANZA DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

Abdel Masih, Samira¹, Monferrato, Marcelo²

Universidad Abierta Interamericana, Facultad de Tecnología Informática.

Av. San Juan 951. Buenos Aires. Argentina.

¹E-mail: abdel.masih@hotmail.com

²E-mail: mmonferrato@yahoo.com.ar

RESUMEN

La idea central del Cálculo Diferencial es la noción de derivada. Al igual que la integral, la derivada surgió por un problema de geometría: el problema de hallar la recta tangente en un punto a una curva. Sin embargo, a diferencia de la integral, la derivada aparece muy tarde en la historia de las Matemáticas. Este concepto no se formuló hasta el siglo XVIII, cuando el matemático francés Pierre Fermat (1601-1665) trató de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones.

Aunque la derivada se introdujo inicialmente para el estudio del problema de la tangente, pronto se vio que proporcionaba también un valioso instrumento para el cálculo de velocidades y, en general, para el estudio de la variación de una función. Así, esta noción pasó a estar presente en todas las ramas de la ciencia.

En la actualidad, la tecnología informática ofrece una poderosa herramienta para el proceso de enseñanza- aprendizaje: el uso de simulaciones.

El presente trabajo desarrolla el concepto de derivada de funciones de una variable mediante los potentes pero sencillos recursos de simulación que brinda el software Wolfram Mathematica.

Además, se mostrarán ejemplos de aplicación provenientes de la Mecánica que, para su resolución, conducirán al cálculo de derivadas. Luego se ilustrará cómo efectuar las simulaciones de los mencionados ejemplos.

Este nuevo enfoque pedagógico ayudará al estudiante de ingeniería a comprender más fácilmente este concepto, aprovechando los recursos que brindan las computadoras en nuestros días.

Palabras Claves: Funciones de una variable – Simulaciones- Aplicaciones de la derivada.

1. INTRODUCCIÓN

La noción de derivada fue originada por dos problemas aparentemente no relacionados: cómo trazar una recta tangente a una curva y cómo calcular la velocidad de un cuerpo en movimiento. Estas cuestiones tienen sus orígenes en la antigua Grecia, pero fueron Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716) quienes descubrieron un método general para hallar la tangente a una curva de ecuación dada. Posteriormente, Isaac Newton descubrió la estrecha relación existente entre el cálculo de tangentes con el cálculo de velocidades, hecho que dio origen a la base del Cálculo Infinitesimal. En este trabajo comenzaremos abordando ambos problemas, utilizando las simulaciones como recurso didáctico. Luego se mostrarán ejemplos de aplicación que, para su resolución, conducirán al cálculo de derivadas. Finalmente se ilustrará, en cada ejemplo, cómo efectuar las correspondientes simulaciones.

1.1. El problema de la tangente a una curva plana.

La palabra tangente proviene de la palabra latina *tangens*, que significa “tocar”. De este modo, una recta tangente es una recta que “toca a la curva” y que se parece a ella en las proximidades del punto donde la toca. Para una circunferencia, podríamos seguir la idea de Euclides (330 a.C.- 275 a.C.) y afirmar que una tangente es una recta que interseca dicha circunferencia sólo una vez (Figura 1 a). Este concepto puede aplicarse también a las elipses. Sin embargo, para otras curvas, la definición de Euclides es inadecuada. Si observamos la Figura 1 b), las rectas *r* y *s* pasan por un punto *P* de una curva *C*. La recta *r* toca a *C* sólo una vez, pero resulta evidente que no se parece a lo que consideramos una tangente. Por otra parte, la recta *s* se parece a una tangente, pero toca a *C* dos veces.

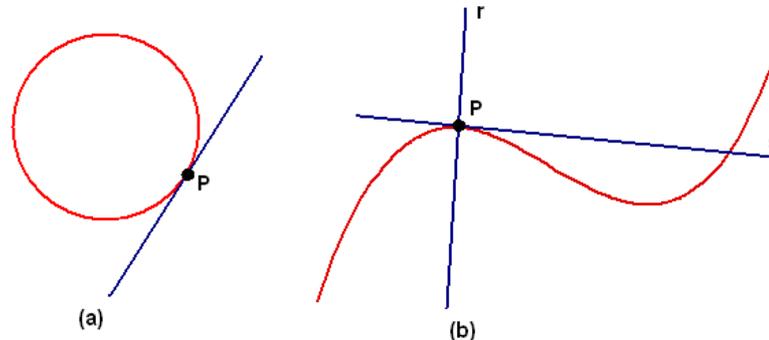


Figura 1 Ejemplo de rectas que “tocan” a una curva.

Leibniz, en su primer trabajo sobre el Cálculo (1684) describió la recta tangente a la gráfica de una función de una variable del siguiente modo:

Dada una función continua $y = f(x)$ y $P = (x_0, f(x_0))$ un punto de su gráfica, podremos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto *P*, tan pronto conozcamos su pendiente *m*. Para ello, calcularemos una aproximación para *m* eligiendo un punto cercano a *P*, por ejemplo, el punto $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, donde *h* es un número pequeño. De este modo, la pendiente m_{PQ} de la recta secante que une *P* con *Q* sería una primera aproximación de *m*. Es decir,

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Mientras más cerca está *Q* de *P*, más se parecerá m_{PQ} a *m*. Diremos entonces que la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes. Simbólicamente expresamos esto al escribir

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ}$$



UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

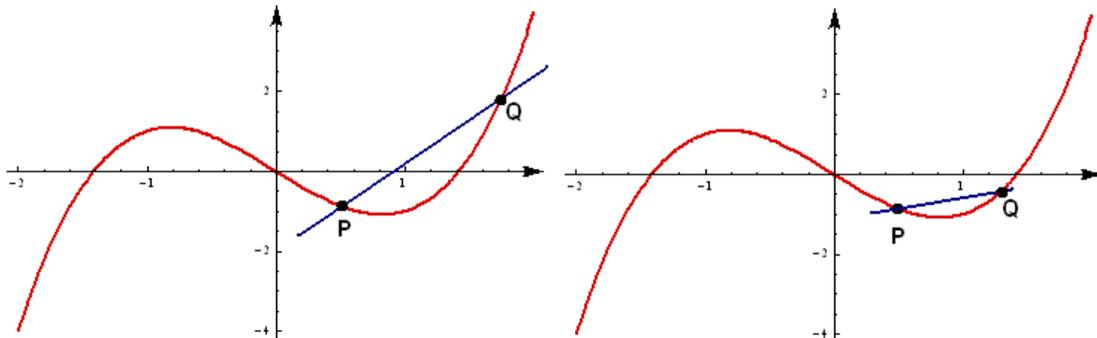


Figura 2 Rectas secantes que unen P con Q.

Pero que Q se acerque a P significa que h tienda a 0. En consecuencia,

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Leibniz llamó a este límite “la derivada de la función f en x_0 ”, y la designó por:

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

Por otro lado, Newton llegó al mismo resultado, pero de una manera independiente. Este hecho dio origen a una gran controversia, ya que ambos se adjudicaron la autoría de este descubrimiento que dio origen la invención del Cálculo Infinitesimal.

1.1.1 Simulación del problema de la recta tangente.

En la siguiente simulación, diseñada mediante el software Wolfram Mathematica, se puede comprobar cómo la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente. La Figura 3 muestra el correspondiente código fuente.

```

Interpretation[{f = 0, min = 0, max = 0, rxmin = -3, rxmax = 3, rymin = -3, rymax = 3},
Panel[Grid[{{Style["Ingrese la expresión de la función", Bold], SpanFromLeft}, {"f(x)=", InputField[Dynamic[f]]},
{Style["Ingrese el intervalo donde graficar", Bold], SpanFromLeft},
{"Extremo izquierdo del intervalo:", InputField[Dynamic[min]]}, {"Extremo derecho del intervalo:", InputField[Dynamic[max]]},
{Style["Rango de los ejes", Bold], SpanFromLeft}, {"Rango mínimo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmin]]},
{"Rango máximo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmax]]}, {"Rango mínimo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymin]]},
{"Rango máximo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymax]]} }],
Manipulate[Grafica = Plot[f, {x, min, max}, PlotStyle -> {RGBColor[0.701961, 0, 0], Thickness[0.005]}];
Secante = Plot[(f /. {x -> x0}) + ((f /. {x -> (x0 + h)}) - (f /. {x -> x0})) / h] (t - x0), {t, x0 - 0.5, x0 + 1}, PlotStyle -> {Thickness[0.004]}];
Derivada = D[f, x] /. {x -> x0};
P = Graphics[{PointSize[Large], Point[{x0, f /. {x -> x0}}], Text[Style["P", GrayLevel[0], Bold], {x0, (f /. {x -> x0}) + 0.5}]}];
Q = Graphics[{PointSize[Large], Point[{x0 + h, f /. {x -> (x0 + h)}]}],
Text[Style["Q", GrayLevel[0], Bold], {x0 + h, (f /. {x -> (x0 + h)}) + 0.5}]; Pendiente = ((f /. {x -> (x0 + h)}) - (f /. {x -> x0})) / h;
Show[Grafica, Secante, P, Q, Axes -> True, AxesOrigin -> {0, 0}, AxesLabel -> {"x", "y"}, AxesStyle -> Arrowheads[0.04],
PlotRange -> {{rxmin, rxmax}, {rymin, rymax}}, ImageSize -> {450, 400}],
Panel["Interpretación geométrica de la derivada de la función f en x0"], Delimiter, {{x0, min, "Valor de x0"}, min, max},
Delimiter, {h, 1, 0.000001}, Delimiter, {Pendiente}, Delimiter, {Derivada},
Panel["Referencias: P = (x0,f(x0)) Q = (x0+h,f(x0+h))"], ControlPlacement -> Left]]
    
```

Figura 3 Código fuente de la simulación del problema de la recta tangente.

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica III CAIM 2012



Como se observa en la Figura 4, a través de un cuadro de diálogo se puede ingresar la expresión de la función y el intervalo donde se la desea graficar.

Ingrese la expresión de la función

f(x)=

Ingrese el intervalo donde graficar

Extremo izquierdo del intervalo:

Extremo derecho del intervalo:

Rango de los ejes

Rango mínimo del Eje x:

Rango máximo del Eje x:

Rango mínimo del Eje y:

Rango máximo del Eje y:

Figura 4 Ingreso dinámico de datos mediante un cuadro de diálogo.

La Figura 5 muestra cómo, haciendo uso de los controladores, para cualquier punto P de la gráfica, la recta tangente en dicho punto es el límite de las rectas secantes.

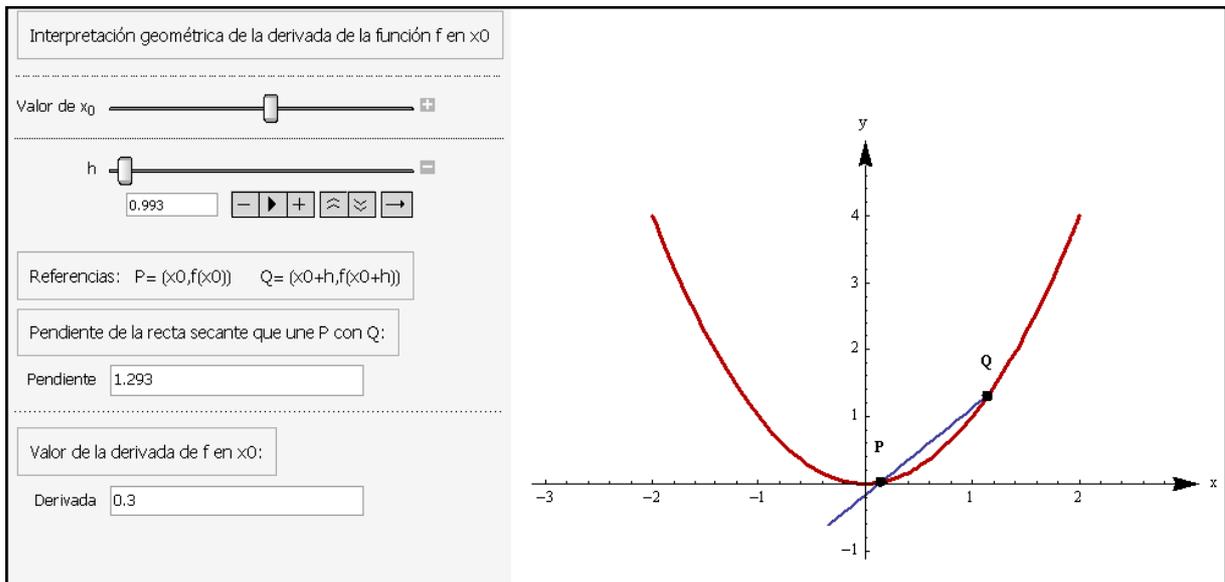


Figura 5 Simulación de la recta tangente a la gráfica de una función en cualquier punto P de su gráfica.

1.2. El problema de la velocidad.

Al observar el velocímetro de un coche en movimiento, comprobamos que la aguja no permanece inmóvil y que, a través de su lectura, podemos averiguar el valor de la velocidad en cada instante. Pero ¿cómo se define la “velocidad instantánea”? Para responder a esta pregunta, Newton estudió el movimiento de un proyectil que es lanzado verticalmente desde el suelo a una velocidad de v_0 m/seg. Para ello aplicó las experiencias físicas descubiertas por Galileo Galilei (1564 – 1642) que indicaban que, si se desprecia la fuerza de rozamiento del aire, la altura o posición del proyectil en cualquier instante t viene dada por la fórmula

$$f(t) = v_0 t - 4.9 t^2 \quad (1)$$



Para determinar la velocidad del proyectil en un instante t_0 de su movimiento, introdujo la noción de velocidad media durante un intervalo de tiempo, desde $t = t_0$ hasta $t = t_0 + h$, donde h representa un valor de tiempo. De este modo, la velocidad media desde el instante t_0 al $t_0 + h$ la definió como el siguiente cociente:

$$\frac{\text{variación de la posición en el intervalo de tiempo}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{t_0 + h - t_0} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = v_0 - 9.8 t_0 - 4.9 h$$

Al dibujar la gráfica de la función posición del proyectil y considerar los puntos $P = (t_0, f(t_0))$ y $Q = (t_0 + h, f(t_0 + h))$, pudo comprobar que la velocidad media es la pendiente de la recta secante que une P con Q .

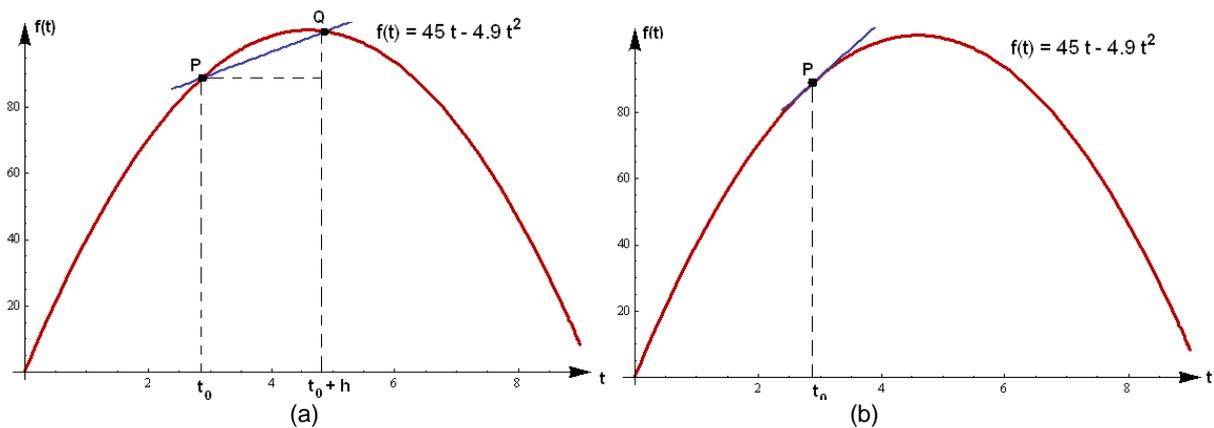


Figura 6 (a) La velocidad media en el período $[t_0, t_0 + h]$ es la pendiente de la recta secante que une P con Q . (b) La velocidad instantánea en t_0 es la pendiente de la recta tangente en P .

Tomando valores de h cada vez más pequeños, esta velocidad media se acercará más y más al valor $v_0 - 9.8 t_0$. Newton describió este hecho diciendo que la velocidad media tiende al límite $v_0 - 9.8 t_0$ cuando h tiende a 0. Le pareció natural entonces llamar al valor de este límite como la “velocidad instantánea” en el instante t_0 . Designando a dicha velocidad por $v(t)$, definió

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

De este modo, la velocidad instantánea en el tiempo $t = t_0$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función posición en el punto $P = (t_0, f(t_0))$.

Así, Newton llegó a la conclusión de que la velocidad instantánea en el tiempo $t = t_0$ es la derivada de la función posición del proyectil, valuada en dicho instante de tiempo.

La expresión obtenida de la velocidad para el caso de un objeto lanzado verticalmente, adquirió un sentido más amplio y permitió definir la velocidad para cualquier cuerpo que se mueve a lo largo de una recta, siempre y cuando se conozca su función posición f .

1.2.1 Simulación del problema de la velocidad.

La siguiente simulación comprueba los resultados teóricos y experimentales obtenidos por Newton. Allí se muestra la trayectoria que sigue el proyectil, la gráfica de su función posición y su velocidad, a partir del instante en que es lanzado con una velocidad inicial v_0 , hasta que cae al piso. En la Figura 7 se expone su código fuente.

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

```

canon = ;

Manipulate[
  Grid[
    {{Show[Graphics[Inset[canon, {-15, -11}, Center, {40, 40}]],
      Graphics[{RGBColor[0.458824, 0, 0.917647], Disk[{0, v0 t - 4.9 t^2}, 2.5]}], Axes -> True,
      PlotRange -> {{-50, 140}, {-30, 150}}, ImageSize -> {220, 220}},
      Plot[Which[u <= t, v0 u - 4.9 u^2], {u, 0, 2 v0 / 9.8},
      PlotStyle -> {RGBColor[0.501961, 0, 1], Thickness[0.01]}, AxesLabel -> {"t", "f(t)"},
      PlotLabel -> "Gráfico de la función Posición", PlotRange -> {{0, 11}, {0, 150}}]},
      {Plot[Which[u <= t, v0 - 9.8 u], {u, 0, 2 v0 / 9.8}, PlotLabel -> "Gráfico de la velocidad",
      AxesLabel -> {"t", "v(t)"}, PlotStyle -> {RGBColor[0.807843, 0, 0], Thickness[0.01]},
      PlotRange -> {{0, 11}, {-50, 50}}]}, Frame -> All], Panel["La derivada como velocidad"],
      Delimiter, Panel["Función posición del proyectil: f(t) = v0 t - 4.9 t^2"], Delimiter,
      Panel["Tiempo que tarda subir y bajar"], Delimiter, {{t, 0, "Tiempo"}, 0, 2 v0 / 9.8, ControlType -> Trigger},
      Panel["Velocidad con que es lanzada el proyectil"], Delimiter, {v0, 30, 50}, SaveDefinitions -> True,
      ControlPlacement -> Left]
  ]

```

Figura 7 Código fuente de la simulación del problema de la velocidad.

En la Figura 8 se puede observar que se emplearon dos controladores durante el proceso de simulación: el tiempo, que se inicia en el instante en que es lanzado el proyectil hasta que cae al piso, y la velocidad inicial que, en este ejemplo, la hicimos variar entre 30 m/seg. y 50 m/seg.

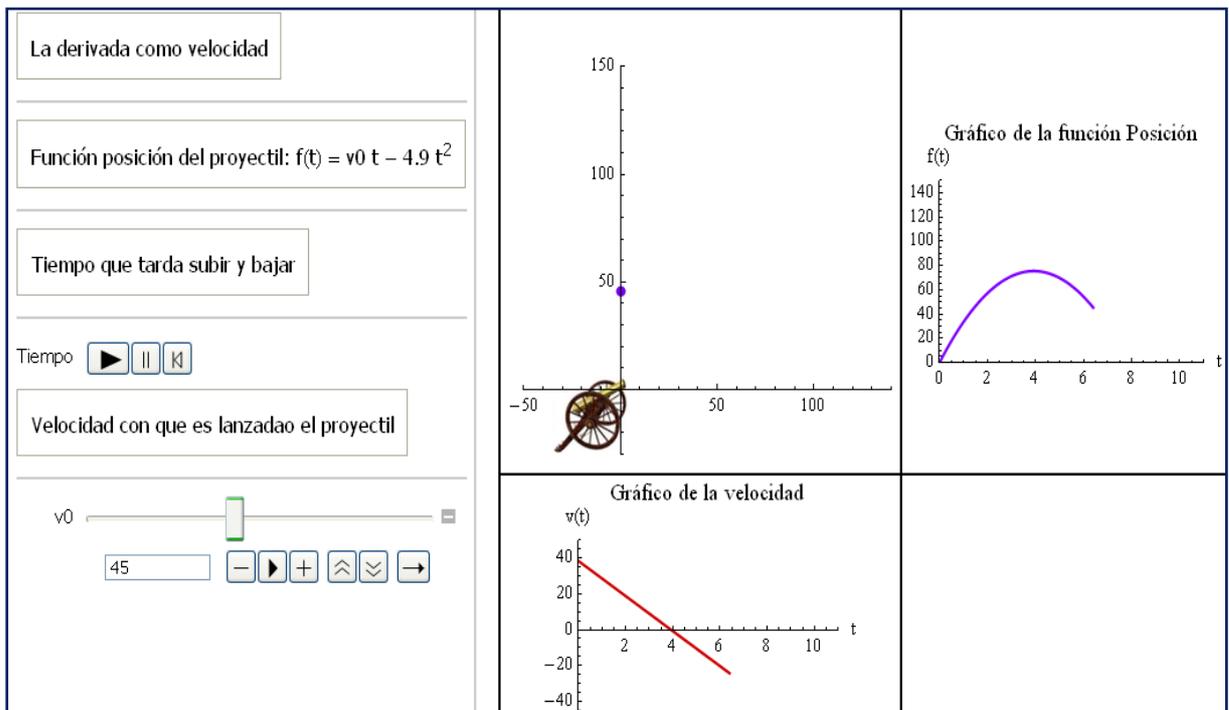


Figura 8 La simulación del problema de la velocidad a través del análisis de la función posición del proyectil.

Como mencionamos anteriormente, pronto se comprobó que la derivada no sólo resolvía el problema de la tangente o permitía calcular velocidades de cuerpos con movimiento rectilíneo, sino que se la podía emplear en el estudio de la variación de una función y para resolver problemas de optimización. En la siguiente sección presentaremos algunos ejemplos de aplicación, que ayudarán al estudiante a comprender el alcance y la importancia de este concepto.

2. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA DERIVADA DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE.

2.1 El problema de la velocidad de Newton, considerando la fuerza de rozamiento del aire.

La fórmula empírica obtenida por Galileo que permitía hallar, en cada instante, la altura de un objeto lanzado verticalmente, era válida siempre y cuando no se considerara la presencia del aire. Este hecho se pudo comprobar en el año 1650, cuando se inventó la bomba de vacío. Pero ¿qué ocurre si se tiene en cuenta la resistencia del aire? ¿En qué cambia la expresión de la altura obtenida por Galileo? Pues bien, cuando un cuerpo se mueve a una rapidez moderada, resultados experimentales conducen a expresar la fuerza de rozamiento del aire como

$$\vec{F}_r(t) = -c \vec{v}(t)$$

Donde

$\vec{v}(t)$ = velocidad del cuerpo en el instante "t".

c = constante de rozamiento del cuerpo. Tiene la siguiente fórmula:

$$c = \frac{\rho A \delta}{2}$$

En este caso,

ρ = Densidad del aire. Aunque varía con la altura, se utilizará su valor a nivel del mar de 1.29 kg/ m³.

A = Área del cuerpo expuesta al aire.

δ = Coeficiente de arrastre, que depende de la forma del objeto.

El coeficiente de arrastre δ es un número que mide cuánta resistencia ofrece el cuerpo cuando éste se mueve dentro del aire. Cuanto menor sea δ , el objeto será más aerodinámico, es decir, se desplazará más rápido por el aire. En la siguiente tabla se proporcionan los coeficientes de arrastre de algunos objetos:

Forma del objeto	Valor aproximado de δ
Disco circular	1.2
Esfera	0.4
Avión	0.06
Caja rectangular	0.9
Cuerpo humano	0.8

Tabla 1 Coeficiente de arrastre de algunos objetos.



Consideremos el caso de un proyectil de masa m kg, que es lanzado verticalmente desde el suelo a una rapidez inicial de v_0 m/seg.

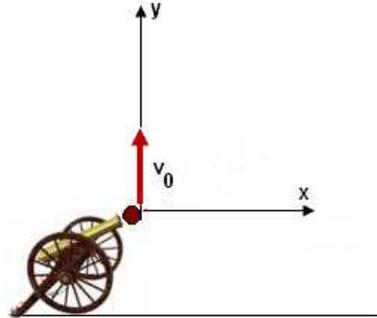


Figura 9 Sistema de coordenadas elegido para determinar la posición y las fuerzas que actúan sobre el proyectil.

Supondremos que el proyectil tiene forma esférica, con lo cual su coeficiente de arrastre es $\delta = 0.4$ y su área es $A = 4 \pi r^2$, donde r es el radio de la esfera, medida en metros. De este modo, la constante de rozamiento del cuerpo es $c = \frac{\rho A \delta}{2} = 3.24 r^2$. Si llamamos

$$f(t) = (x(t), y(t))$$

a la función posición del proyectil en un instante t , entonces la velocidad y aceleración que adquiere en cualquier instante son, respectivamente,

$$\vec{v}(t) = \vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t)), \quad \vec{a}(t) = \vec{f}''(t) = (x''(t), y''(t))$$

De acuerdo al sistema de coordenadas elegido (véase Figura 9), las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

Fuerza Peso:

$$\vec{P} = (0, -mg) \quad \text{con } g = 9.8 \text{ m/seg}^2$$

Fuerza de rozamiento del aire:

$$\vec{F}_r(t) = -c \vec{v}(t) = -3.24 r^2 (x'(t), y'(t)) = (-3.24 r^2 x'(t), -3.24 r^2 y'(t))$$

Por otro lado, en el instante inicial $t = 0$, la posición y velocidad inicial del proyectil son, respectivamente,

$$f(0) = (x(0), y(0)) = (0, 0)$$

$$\vec{v}(0) = \vec{f}'(0) = (x'(0), y'(0)) = (0, v_0)$$

Al aplicar la Segunda Ley de Newton, resulta

$$\vec{P} + \vec{F}_r(t) = m \vec{a}(t)$$

Es decir,

$$(0, -mg) + (-3.24 r^2 x'(t), -3.24 r^2 y'(t)) = m (x''(t), y''(t))$$

Luego,

$$(-3.24 r^2 x'(t), -mg - 3.24 r^2 y'(t)) = (m x''(t), m y''(t))$$

Al igualar las correspondientes componentes de estos vectores, resulta el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, cuyas incógnitas son $x(t)$ e $y(t)$:

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



$$\begin{cases} -3.24 r^2 x'(t) = m x''(t) \\ -m g - 3.24 r^2 y'(t) = m y''(t) \end{cases}$$

Con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x(0) = 0, y(0) = 0 \\ x'(0) = 0, y'(0) = v_0 \end{cases}$$

Si aplicamos los siguientes comandos para resolver este sistema:

g = 9.8;

DSolve [{ - 3.24 r² x' [t] = = m x '' [t] , - m g - 3.24 r² y' [t] = = m y '' [t] , x [0] = = 0 , y [0] = = 0 , x' [0] = = 0 , y' [0] = = v₀ } , { x [t] , y [t] } , t }

Se obtienen las siguientes soluciones:

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = \frac{m(0.93m + r^2(-3.024t + 0.308v_0)) + e^{-\frac{3.2r^2t}{m}}(-0.93m - 0.308r^2v_0)}{r^4} \end{cases}$$

De aquí concluimos que la función posición del proyectil es

$$f(t) = \left(0, \frac{m(0.93m + r^2(-3.024t + 0.308v_0)) + e^{-\frac{3.2r^2t}{m}}(-0.93m - 0.308r^2v_0)}{r^4} \right)$$

Así, la altura $y(t)$ del proyectil, que depende ahora de la masa y de su radio, no es una función cuadrática, como ocurría en el caso en que no se consideraba el efecto de la resistencia del aire (véase ecuación (1)). Por otro lado la velocidad vertical, $y'(t)$, deja de ser una función lineal.

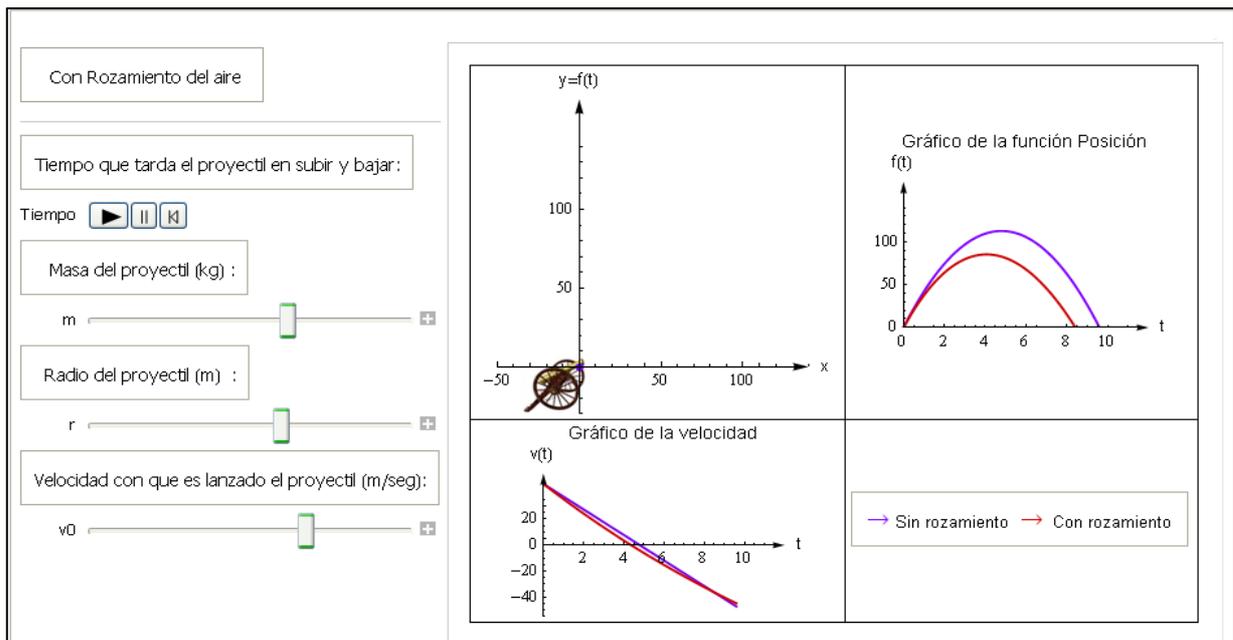


Figura 10 Simulación del movimiento del proyectil, con y sin rozamiento.



La figura 10 muestra la simulación asociada a este problema. Se utilizaron como controladores a la masa, el radio y la velocidad inicial del proyectil. Claramente se observa cómo, al aumentar el radio o la masa, disminuye la altura máxima alcanzada, cayendo antes al piso. En este ejemplo, el uso de las simulaciones permite averiguar de una manera sencilla qué valor debería tener la masa o el radio para que el proyectil llegue a una determinada altura h . Sin la ayuda de dicha herramienta, esta pregunta no sería sencilla de responder, ya que se debería resolver la ecuación $y(t) = h$, que no tiene solución analítica.

2.2 Un problema de optimización: ¿Cuál es la longitud de la escalera más larga?

Se desea averiguar la longitud de la escalera más larga que se puede pasar por la esquina de un corredor, según las dimensiones indicadas en la siguiente figura, llevándola paralelamente al piso.

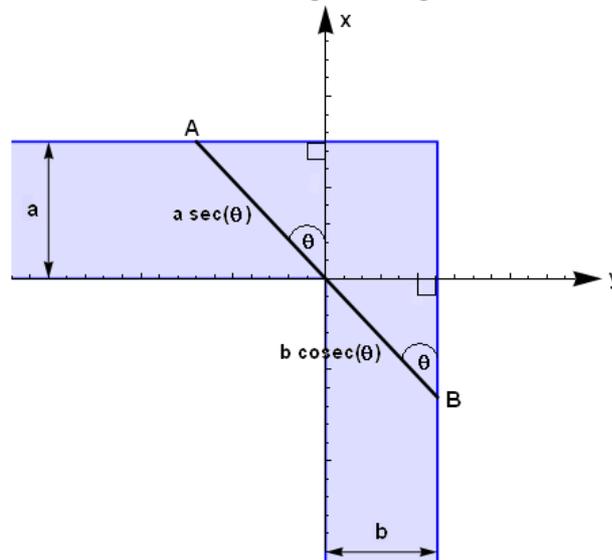


Figura 11 Corredor por donde se desea pasar la escalera de longitud AB.

De acuerdo a la figura, la longitud de la escalera AB es

$$L = a \sec(\theta) + b \operatorname{cosec}(\theta)$$

Para hallar la longitud máxima, igualamos a cero su derivada:

$$\frac{dL}{d\theta} = a \sec(\theta) \operatorname{tg}(\theta) - b \operatorname{cosec}(\theta) \operatorname{cotg}(\theta) = 0$$

Es decir,

$$a \operatorname{sen}^3(\theta) = b \operatorname{cos}^3(\theta) \quad \text{o equivalentemente, } \operatorname{tg}(\theta) = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

Luego

$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{a^{1/3}}, \quad \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$

Con lo que

$$L = a \sec(\theta) + b \operatorname{cosec}(\theta) = \left(a^{2/3} + b^{2/3}\right)^{3/2}$$

Geométricamente resulta evidente que ésta es la máxima longitud, pero se puede demostrar

analíticamente que $\frac{d^2L}{d\theta^2} < 0$ para $\theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$.

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica III CAIM 2012



La siguiente simulación comprueba cómo efectivamente se puede hacer pasar por la esquina del corredor a la escalera de longitud máxima $L = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$. Se utilizaron como controladores a las dimensiones a y b del corredor.

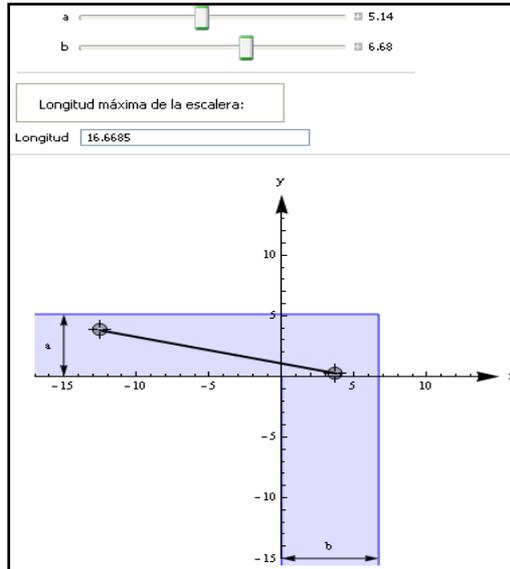


Figura 12 Simulación del movimiento de la escalera por el corredor.

El correspondiente código fuente se muestra a continuación.

```
Manipulate[
  Recta = Graphics[{{Thick, Line[{{(3*a^2 + 3*b^2)^(3/2) * p1 / EuclideanDistance[p1, p2], (3*a^2 + 3*b^2)^(3/2) * p2 / EuclideanDistance[p1, p2]}}]}];
  flecha1 = Graphics[{{Arrowheads[{-0.03, 0.03]}, Arrow[{-15, 0}, {-15, a}], Text["a", {-16, a/2}]}];
  flecha2 = Graphics[{{Arrowheads[{-0.03, 0.03]}, Arrow[{0, -15}, {b, -15}], Text["b", {b/2, -14}]}]; Longitud = (3*a^2 + 3*b^2)^(3/2);
  Show[Graphics[{{EdgeForm[Directive[Thickness[0.004], Blue]], RGBColor[0.866667, 0.866667, 1], Polygon[{{-20, 0}, {-20, a}, {b, a}, {b, -30}, {0, -30}, {0, 0}]}]}, Recta, flecha1, flecha2, Axes -> True,
  AxesStyle -> Arrowheads[0.05], AxesLabel -> {"x", "y"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {{-17, 15}, {-15, 15}}],
  {a, 1, 10, Appearance -> "Labeled"}, {b, 1, 10, Appearance -> "Labeled"}, Delimiter, {{p1, {-a*3^(b/a), a}}, Locator},
  {{p2, {b, -b/3^(b/a)}}, Locator}, Delimiter, Panel[" Longitud máxima de la escalera: "], {Longitud}
]
```

Figura 13 Código fuente del movimiento de la escalera por el corredor.

2.3 ¿Cómo se puede minimizar la cantidad de cable a utilizar?

Dos postes, uno de h_1 pies y el otro de h_2 pies, se encuentran a d pies de distancia. Se sostienen por dos cables, conectados a una sola estaca, desde el nivel del suelo hasta la parte superior de cada poste. ¿Dónde debe colocarse la estaca para que se utilice la menor cantidad de cable?

Si observamos la figura 14 y aplicando el Teorema de Pitágoras, la longitud del cable a minimizar puede expresarse en términos de la función

$$f(x) = \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (d - x)^2}$$

Tercer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica

III CAIM 2012



FORO
DOCENTE
DEL ÁREA
MECÁNICA
DE LAS
INGENIERÍAS

FoDAMI

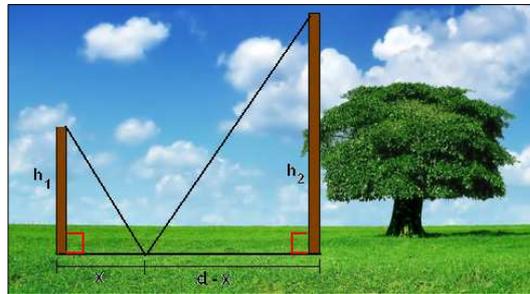


Figura 14 Dos postes de longitud h_1 y h_2 , separados a una distancia d .

De este modo, igualando a cero la derivada de f , se obtiene

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x}{2\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{2(d-x)}{2\sqrt{h_2^2 + (d-x)^2}} = 0. \text{ De aquí resulta que } x = \frac{h_1 d}{h_1 + h_2}. \text{ Se puede concluir}$$

entonces que la estaca debe colocarse a $\frac{h_1 d}{h_1 + h_2}$ pies del poste de altura h_1 . La figura 15 muestra la simulación diseñada para este ejemplo, donde se utilizaron como controladores a las alturas de los postes y la distancia entre ambos.

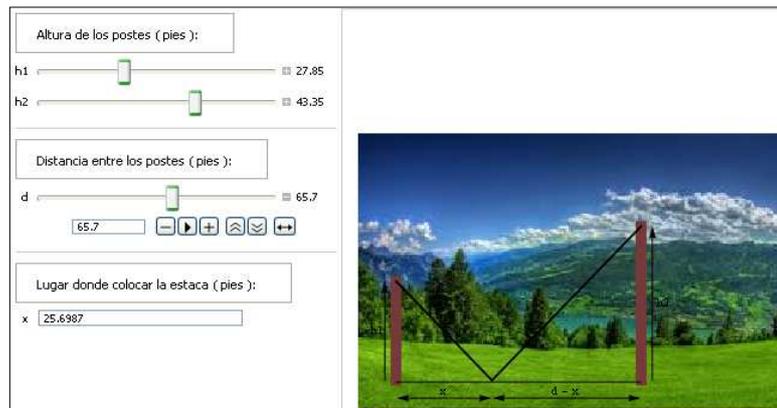


Figura 15 Simulación de la longitud mínima de cable a utilizar.

3. CONCLUSIONES.

La implementación del uso de las simulaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las carreras de ingeniería, permite al estudiante visualizar y comprender mucho mejor los conceptos teóricos. Por otro lado, lo motiva a crear sus propios modelos matemáticos para luego verificarlos, de una manera sencilla, si responden o no a la realidad. Esta metodología de enseñanza se ha puesto en práctica en algunos cursos de Cálculo Infinitesimal en una variable, con resultados altamente favorables, ya que disminuyó notablemente la deserción de alumnos en esta asignatura.

4. REFERENCIAS.

- [1] Apóstol, Tom M. (1965). *Cálculus. Volumen 1: Introducción, con vectores y Geometría Analítica*. Barcelona. (tercera edición). Reverté.
- [2] Larson, Ron. Hostetler, Robert. Edwards, Bruce. (2009). *Cálculo I*. México. (décima edición). Mc Graw Hill.
- [3] Stewart, James. (2010). *Cálculo. México*. (octava edición). Thomson Learning.