EXTREMOS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE: UNA METODOLOGÍA DE ENSEÑANZA CON SOPORTE INFORMÁTICO

Daniel Veiga. Samira Abdel Masih.
dveiga@gmail.com - abdel.masih@hotmail.com
Universidad Abierta Interamericana, Facultad de Tecnología Informática.
República Argentina.

Tema: Materiales y Recursos Didácticos para la Enseñanza y Aprendizaje de la
Modalidad: Comunicación breve
Nivel educativo: Terciario – Universitario
Matemática.
Palabras clave: Simulaciones. Cálculo de extremos. Funciones de una variable.

Resumen

Una de las aplicaciones más importantes del Cálculo Diferencial son los problemas de optimización, en los cuales se nos pide la manera óptima de lograr algo. Por ejemplo: ¿Qué forma deberá tener una lata para minimizar sus costos de fabricación? ¿Cuál es la aceleración máxima de un trasbordador espacial? ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, de modo que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre?

El primero en abordar matemáticamente este tipo de preguntas fue el matemático francés Pierre Fermat (1601 – 1665), quien redujo estos problemas a encontrar los valores máximo y mínimo de una función.

En la actualidad, los programas informáticos brindan una valiosa ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.

El presente trabajo propone una metodología de enseñanza del concepto de máximos y mínimos de funciones de una variable mediante el uso de un software como el Wolfram Mathematica. Además, se mostrarán los comandos necesarios para llevar a cabo las simulaciones correspondientes a los ejemplos de aplicación que se expondrán.

La utilización de esta herramienta informática para la enseñanza de estos temas, se viene implementando en la asignatura de Cálculo Infinitesimal I con resultados altamente satisfactorios.

1. Antecedentes y metodología

1.1 El problema de la tangente a una curva plana

La idea central en el estudio de extremos de funciones es la noción de derivada. Al igual que la integral, la derivada surgió por un problema de geometría: el problema de hallar la recta tangente en un punto a una curva.

La palabra tangente proviene del vocablo latino *tangens*, que significa "tocar". De este modo, una tangente es una recta que "toca a la curva" y que se parece a ella en las proximidades del punto donde la toca. Para una circunferencia, podríamos seguir la idea de Euclides (330 a.C.- 275 a.C.) y afirmar que una tangente es una recta que interseca dicha circunferencia sólo una vez (Figura 1 a).Este concepto puede aplicarse también a las elipses. Sin embargo, para otras curvas, la definición de Euclides es inadecuada. Si observamos la Figura 1 b), las rectas **r** y **s** pasan por un punto **P** de una curva **C**. La recta **r** toca a **C** sólo una vez, pero resulta evidente que no se parece a lo que consideramos una tangente. Por otra parte, la recta **s** se parece a una tangente, pero toca a **C** dos veces.

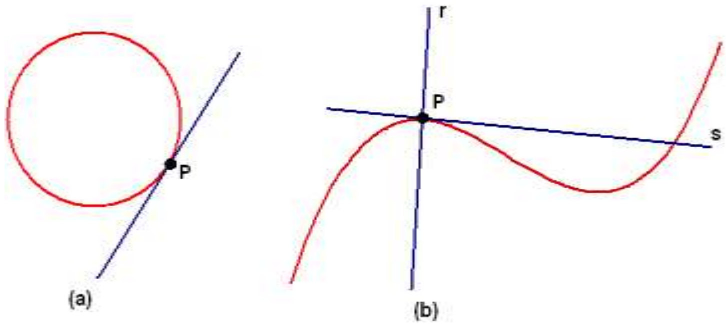

Figura 1. Ejemplo de rectas que "tocan" a una curva.

Gottfried Leibniz (1646-1716), en su primer trabajo sobre el Cálculo (1684) describió la recta tangente a la gráfica de una función de una variable del siguiente modo:

Dada una función continua y= f(x) y P = (x_0, f(x_0)) un punto de su gráfica, podremos hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto P, tan pronto conozcamos su pendiente ***m***. Para ello, calcularemos una aproximación para ***m*** eligiendo un punto cercano a P, por ejemplo, el punto Q = (x_0+h, f(x_0+h)), donde h es un número pequeño. De este modo, la pendiente $\boldsymbol{m_{PQ}}$ de la recta secante que une P con Q sería una primera aproximación de ***m***. Es decir,

$$m_{PQ} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

 ISSN 2301-0797

Mientras más cerca está Q de P, más se parecerá $\boldsymbol{m_{PQ}}$ a $\boldsymbol{m}$. Diremos entonces que la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes. Simbólicamente expresamos esto al escribir

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

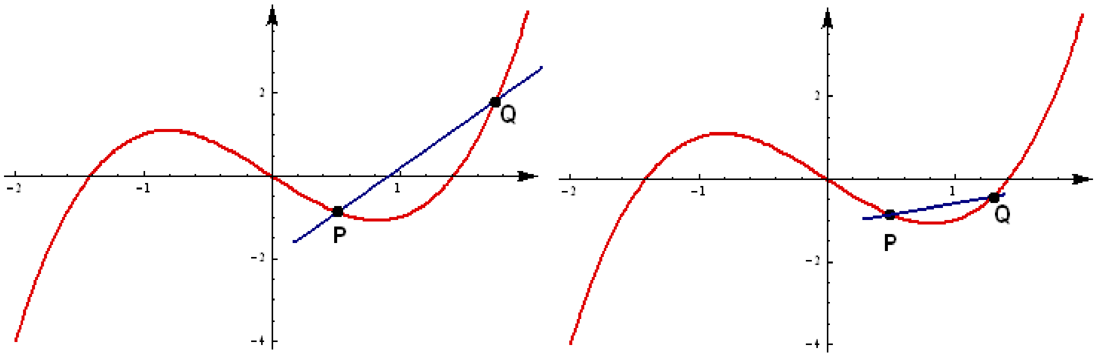

Figura 2. Rectas secantes que unen P con Q.

Pero que Q se acerque a P significa que h tiende a 0. En consecuencia,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Leibniz llamó a este límite "la derivada de la función f en x_0", y la designó por:

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

Como Isaac Newton (1643-1727) había llegado al mismo resultado, aunque con un enfoque distinto, se suscitó una gran controversia, ya que ambos se adjudicaron la autoría de este descubrimiento.

Por otro lado, unos años antes, el matemático francés Pierre Fermat (1601 – 1665), había intentado determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones. Fermat observó que en aquellos puntos donde la gráfica de una función tiene un máximo o un mínimo, la recta tangente ha de ser horizontal. Esta idea, a pesar de ser tan simple, fue la base teórica que condujo a uno de los teoremas fundamentales del Cálculo: "Los extremos de una función sólo pueden ocurrir en los puntos donde la derivada se anula o bien donde no es derivable".

1.2 Simulación del problema de la recta tangente

En la siguiente simulación, diseñada mediante el software Wolfram Mathematica 8.0, se puede comprobar cómo la pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente. La Figura 3 muestra el correspondiente código fuente.

```
Interpretation[{f = 0, min = 0, max = 0, rxmin = -3, rxmax = 3, rymin = -3, rymax = 3},
 Panel[Grid[{{Style["Ingrese la expresión de la función", Bold], SpanFromLeft}, {"f(x)=", InputField[Dynamic[f]]},
    {Style["Ingrese el intervalo donde graficar", Bold], SpanFromLeft},
    {"Extremo izquierdo del intervalo:", InputField[Dynamic[min]]}, {"Extremo derecho del intervalo:", InputField[Dynamic[max]]},
    {Style["Rango de los ejes", Bold], SpanFromLeft}, {"Rango mínimo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmin]]} ,
    {"Rango máximo del Eje x:", InputField[Dynamic[rxmax]]}, {"Rango mínimo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymin]]},
    {"Rango máximo del Eje y:", InputField[Dynamic[rymax]]} }]],
 Manipulate[Grafica = Plot[f, {x, min, max}, PlotStyle → {RGBColor[0.701961, 0, 0], Thickness[0.005]}];
  Secante = Plot[(f /. {x -> x0}) + (((f /. {x -> (x0 + h)}) - (f /. {x -> x0}))/h) (t - x0), {t, x0 - 0.5, x0 + 1}, PlotStyle → {Thickness[0.004]}];
  Derivada = D[f, x] /. {x → x0};
  P = Graphics[{PointSize[Large], Point[{x0, f /. {x -> x0}}], Text[Style["P", GrayLevel[0], Bold], {x0, (f /. {x → x0}) + 0.5}]}];
  Q = Graphics[{PointSize[Large], Point[{x0 + h, f /. {x -> (x0 + h)}}],
     Text[Style["Q", GrayLevel[0], Bold], {x0 + h, (f /. {x → (x0 + h)}) + 0.5}]}]; Pendiente = ((f /. {x -> (x0 + h)}) - (f /. {x -> x0}))/h;
  Show[Grafica, Secante, P, Q, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0}, AxesLabel → {"x", "y"}, AxesStyle → Arrowheads[0.04],
   PlotRange → {{rxmin, rxmax}, {rymin, rymax}}, ImageSize → {450, 400}],
  Panel["Interpretación geométrica de la derivada de la función f en x0" ], Delimiter, {{x0, min, "Valor de x0"}, min, max},
  Delimiter, {h, 1, 0.000001}, Delimiter, {Pendiente }, Delimiter, {Derivada },
  Panel["Referencias:   P= (x0,f(x0))      Q= (x0+h,f(x0+h))" ], ControlPlacement -> Left]]
```

Figura 3. Código fuente de la simulación del problema de la recta tangente.

Como se observa en la Figura 4, a través de un cuadro de diálogo se puede ingresar la expresión de la función y el intervalo donde se la desea graficar.

Ingrese la expresión de la función	
f(x)=	x^2
Ingrese el intervalo donde graficar	
Extremo izquierdo del intervalo:	−2
Extremo derecho del intervalo:	2
Rango de los ejes	
Rango mínimo del Eje x:	−3
Rango máximo del Eje x:	3
Rango mínimo del Eje y:	−1
Rango máximo del Eje y:	5

Figura 4. Ingreso dinámico de datos mediante un cuadro de diálogo.

La Figura 5 muestra cómo, haciendo uso de los controladores, para cualquier punto P de la gráfica, la recta tangente en dicho punto es el límite de las rectas secantes.

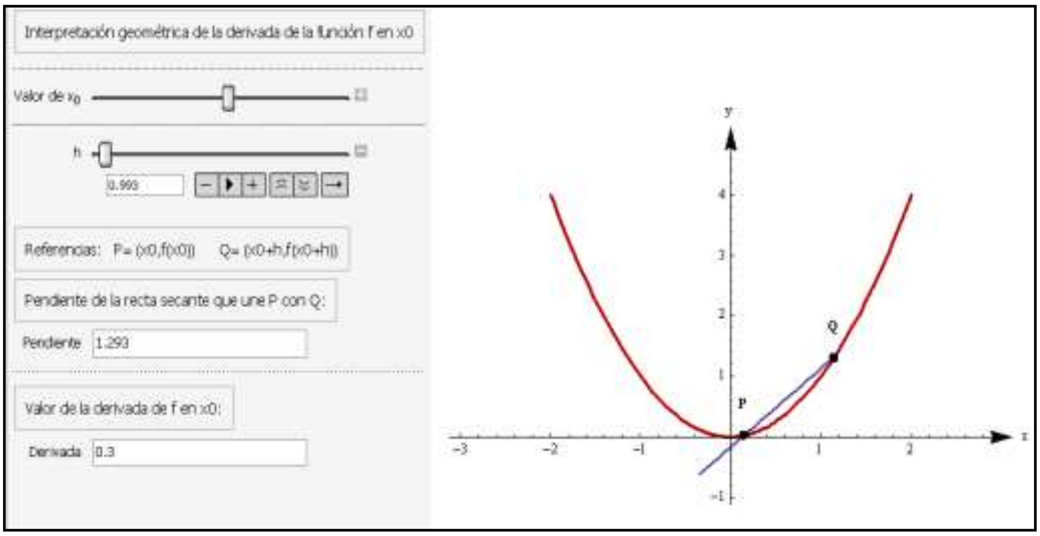

Figura 5. Simulación de la recta tangente a la gráfica de una función en cualquier punto P.

2. Ejemplos de aplicación

Al poco tiempo de haber definido la derivada, se comprobó que no sólo resolvía el problema de la tangente, sino que se la podía emplear para localizar los valores máximos y mínimos de funciones. En esta sección aplicaremos este concepto para resolver situaciones de la vida real que conducen a la resolución de problemas de optimización.

2.1 Determinación del área mínima

Una página rectangular debe contener "k" cm^2 de impresión. Los márgenes de la parte superior e inferior han de ser de "b" cm, mientras que los márgenes de la izquierda y derecha deben medir "a" cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?

<u>Solución</u>

El área A a minimizar es

$$A = (x + 2 a) (y + 2 b) \qquad [1]$$

El área impresa dentro del margen está dada por $x\, y = k$. Al despejar de esta ecuación "y", resulta $y = k / x$. Sustituyendo esta última ecuación en [1], se obtiene la siguiente función a minimizar: $A(x) = (x + 2 a) (k / x + 2 b) = k + 2 b x + 2 a k / x + 4 a b$.

Debido a que x debe ser positiva, consideramos sólo los valores $x > 0$. Para hallar el mínimo, calculamos los puntos críticos: $A'(x) = 0 \Rightarrow 2 b - \dfrac{2 a k}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{a k}{b}}$.

El criterio de la derivada segunda confirma que A tiene un mínimo cuando $x = \sqrt{\dfrac{a k}{b}}$.

De este modo, $y = \dfrac{k}{\sqrt{\dfrac{a\ k}{b}}}$. Luego, las dimensiones de la página deben ser:

Ancho = $\sqrt{\dfrac{a\ k}{b}} + 2\,a$. Alto = $\dfrac{k}{\sqrt{\dfrac{a\ k}{b}}} + 2\,b$.

2.1.1 Simulación del área mínima

La siguiente figura se muestra el código fuente que permite seleccionar el valor “k” del área de impresión, como así también los márgenes “a” y “b”. Asimismo, muestra las dimensiones que deberá tener la página y su correspondiente diseño.

```
Manipulate[text = Style[" Texto ", 9];
 x = Sqrt[Area a / b];
 y = Area / x;
 Ancho = x + 2 a;
 Alto = y + 2 b;
 Hoja = Graphics[{EdgeForm[{Thickness[0.004], RGBColor[0.501961, 0, 0]}], RGBColor[1, 1, 0.65098],
    Rectangle[{0, 0}, {x + 2 a, y + 2 b}]}];
 Escrito =
  Graphics[{Texture[text], Polygon[{{a, b}, {x + a, b}, {x + a, y + b}, {a, y + b}},
     VertexTextureCoordinates -> {{a, b}, {x + a, b}, {x + a, y + b}, {a, y + b}}]}];
 flecha1 = Graphics[{Arrowheads[{-.02, .02}], Arrow[{{x + 2 a + 1, 0}, {x + 2 a + 1, b}}], Text["b", {x + 2 a + 1.7, b / 2}]}];
 flecha2 = Graphics[{Arrowheads[{-.02, .02}], Arrow[{{x + 2 a + 1, b}, {x + 2 a + 1, y + b}}], Text["y", {x + 2 a + 1.7, (y + 2 b) / 2}]}];
 flecha3 = Graphics[{Arrowheads[{-.02, .02}], Arrow[{{x + 2 a + 1, y + b}, {x + 2 a + 1, y + 2 b}}], Text["b", {x + 2 a + 1.7, (2 y + 3 b) / 2}]}];
 flecha4 = Graphics[{Arrowheads[{-.02, .02}], Arrow[{{0, y + 2 b + 1}, {a, y + 2 b + 1}}], Text["a", {a / 2, y + 2 b + 1.7}]}];
 flecha5 = Graphics[{Arrowheads[{-.02, .02}], Arrow[{{a, y + 2 b + 1}, {x + a, y + 2 b + 1}}], Text["x", {(x + 2 a) / 2, y + 2 b + 1.7}]}];
 flecha6 = Graphics[{Arrowheads[{-.02, .02}], Arrow[{{x + a, y + 2 b + 1}, {x + 2 a, y + 2 b + 1}}], Text["a", {(2 x + 3 a) / 2, y + 2 b + 1.7}]}];
 Show[Hoja, Escrito, flecha1, flecha2, flecha3, flecha4, flecha5, flecha6, Axes -> True, AxesStyle -> Arrowheads[0.05],
  AxesLabel -> {"x (cm)", "y (cm)"}, AxesOrigin -> {0, 0}, ImageSize -> {450, 450}, PlotRange -> {{-1, 50}, {0, 50}}],
 Panel["Seleccione el valor del área de impresión (cm^2)"], {Area, 50, 400}, Panel["Margen izquierdo y derecho (cm):"],
 {a, 1, 10}, Panel["Margen superior e inferior (cm):"], {b, 1, 10}, Delimiter, Panel["Dimensiones de la página (cm):"],
 {Ancho}, Delimiter, {Alto}, ControlPlacement -> Left]
```

Figura 6. Código fuente para la simulación de la minimización de la cantidad de papel.

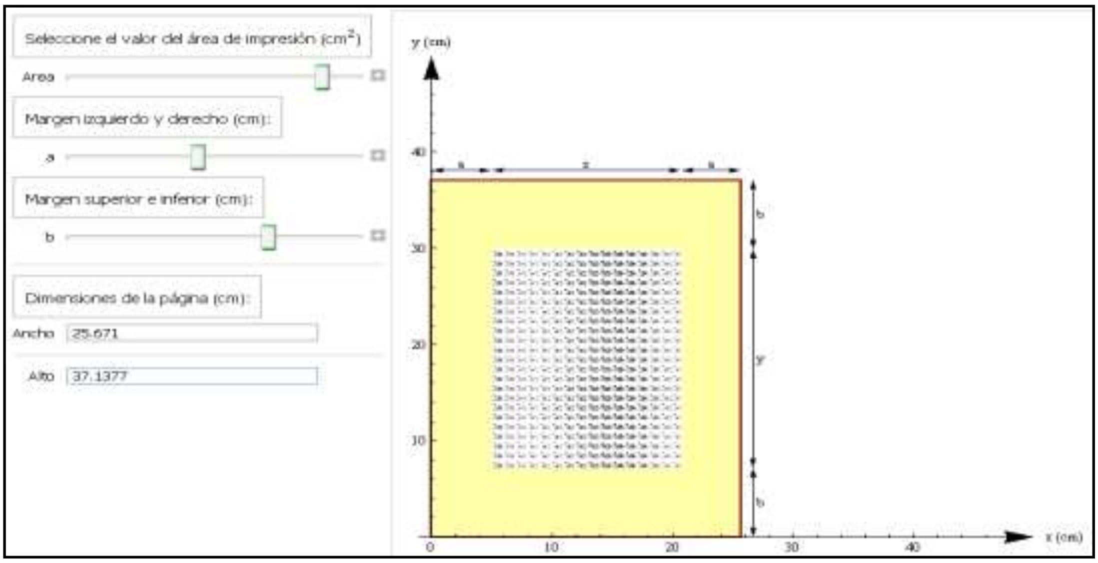

Figura 7. Simulación de la minimización de la cantidad de papel.

2.2 ¿Qué ángulo deben formar los vasos sanguíneos al ramificarse, a fin de minimizar la energía consumida por el corazón?

El sistema vascular consta de vasos (arterias, capilares y venas) que llevan la sangre desde el corazón hasta los órganos y de regreso a aquél. Este sistema tiene que trabajar de manera que se minimice la energía consumida por el corazón al bombear la sangre. En particular, esa energía se reduce cuando se baja la resistencia de la sangre. Una de las Leyes de Poiseuille establece que la resistencia R de la sangre es

$$R = C\,\frac{L}{r^4}$$

Donde L es la longitud del vaso sanguíneo, r es el radio y C es una constante positiva determinada por la viscosidad de la sangre (Poiseuille estableció esta ley a nivel experimental).

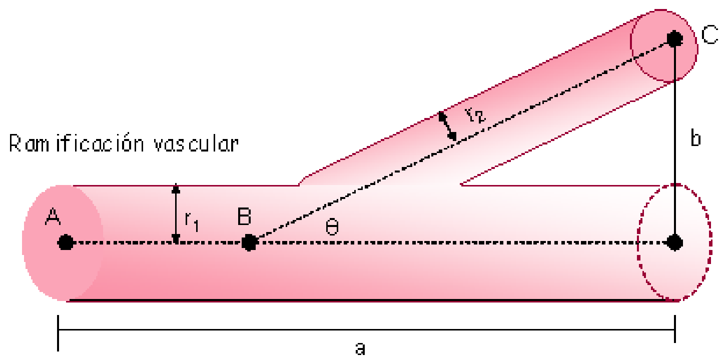

Figura 8. Representación gráfica de un vaso sanguíneo y su ramificación.

Si se aplica la Ley de Poiseuille a lo largo a lo largo de la trayectoria ABC del vaso sanguíneo, se puede demostrar que la resistencia total R de la sangre es

$$R(a\,,b\,,r_1\,,r_2\,,\theta) = C\left(\frac{a - b\,\mathrm{cotg}(\theta)}{r_1^4} + \frac{b\,\mathrm{cosec}(\theta)}{r_2^4}\right)$$

Donde a y b son las distancias que se ven en la figura 8 (se supone que $r_2 < r_1$). Considerando R sólo como función de θ, se prueba que la resistencia se minimiza cuando

$$\cos(\theta) = \frac{r_2^4}{r_1^4}$$

2.2.1 Simulación del ángulo óptimo de ramificación

La siguiente figura muestra la simulación llevada a cabo para determinar el ángulo óptimo de ramificación de un vaso sanguíneo. Para ello se introducen los siguientes datos:

L_1: longitud del vaso sanguíneo principal. R_1: radio del vaso sanguíneo principal

L_2: longitud del vaso ramificado. R_2: radio del vaso sanguíneo ramificado.

B: posición a partir del cual se ramifica el vaso sanguíneo.

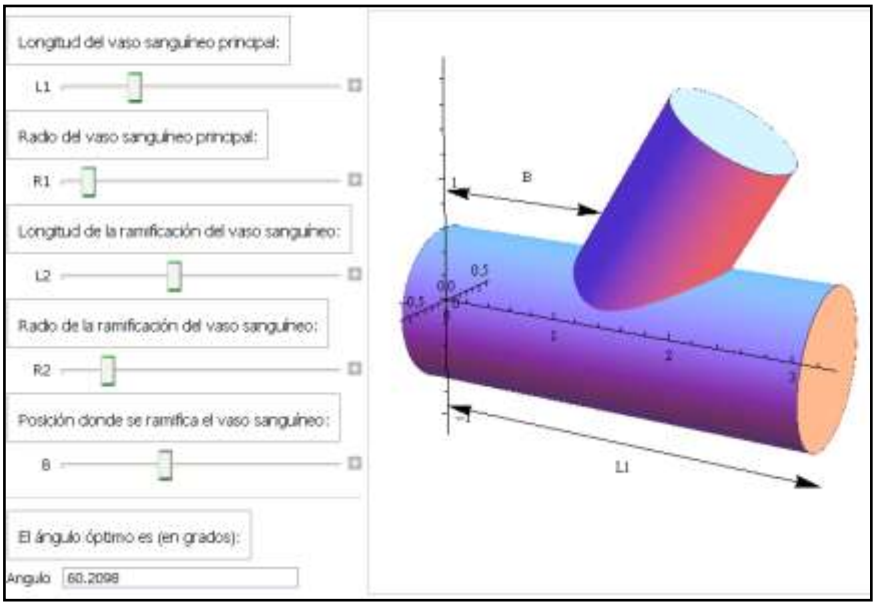

Figura 9. Simulación del ángulo óptimo con R_1= 0.6 y R_2= 0.5

3. Conclusiones

La implementación del uso de las simulaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las carreras vinculadas con la Matemática, permite al estudiante visualizar y comprender mucho mejor los conceptos teóricos. Por otro lado, reconcilia al alumno con la materia y le brinda la posibilidad de aplicarla inmediatamente, desmitificando el habitual prejuicio de que los contenidos no se ajustan a su realidad como profesional. Esta metodología de enseñanza se ha puesto en práctica en algunos cursos de Cálculo Infinitesimal en una variable, con resultados altamente favorables y una notable disminución de la deserción de alumnos en esta asignatura.

4. Bibliografía

Apóstol, T. M. (1965). *Cálculus. Volumen 1:Introducción, con vectores y Geometría Analítica*. Barcelona: Reverté.

Larson, R. Hostetler, R. Edwuards, B. (2009).*Cálculo I.* México: Mc Graw Hill.

Stewart, J. (2010). *Cálculo. México*: Thomson Learning.

Swokowski, E. (2008) .*Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Leithold, L. (2010). *El Cálculo*. México.:Oxford University Press.