Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior

Cristina Camós (1) – Mabel Rodríguez (2)

(1) cristina.camos@vaneduc.edu.ar -Universidad Abierta Interamericana[1]. Argentina

(2) mrodri@ungs.edu.ar – Universidad Nacional de General Sarmiento. Argentina

Introducción

Los estudiantes, mayoritariamente, consideran que los conceptos y propiedades trabajadas en un curso son parte de una verdad matemática que deben aprender por medio del docente, a quien conciben como el poseedor de esta verdad y el encargado de transmitírsela utilizando lenguaje natural y simbólico. El primero generalmente se usa en el medio oral, siendo pocas las veces que el docente lo utiliza por escrito en el pizarrón, opuesto a lo que ocurre con el lenguaje simbólico.

En un proyecto de investigación en curso[2] nos propusimos *explorar el uso -del docente- de los lenguajes natural y simbólico en sus medios oral y escrito al enseñar un recorte de la verdad matemática*. El recorte incluye conceptos y propiedades de límite, continuidad y derivabilidad pues demandan esfuerzo para su comprensión y conllevan notación simbólica compleja.

Para recolectar datos a partir de los cuales se pudiera obtener información de los lenguajes natural y simbólico en ambos medios (oral y escrito en el pizarrón), el instrumento elegido fue la observación no participante de clases de Análisis Matemático del primer año del nivel superior. Con el fin de captar la simultaneidad entre lo oral y escrito, se filmaron con audio dichas clases. Presentamos en este trabajo los primeros avances realizados en esta línea, limitando nuestros ejemplos –por cuestión de espacio- a conceptos vinculados con la noción de límite, previos a su enseñanza, que extrajimos de una de las clases observadas.

Marco teórico

El marco teórico utilizado toma centralmente a) elementos de las Teorías de la Verdad en Matemática y en la clase de Matemática ([7], [1], [12]); b) lenguajes y registros, y c)

---

[1] Parte de este trabajo cuenta con financiamiento de la Universidad Abierta Interamericana.

[2] Proyecto de tesis doctoral en curso "Un estudio sobre el uso del lenguaje natural y simbólico en la enseñanza y el aprendizaje de Matemática superior". Cristina Camós es alumna del Doctorado en Ciencias, Mención: Didáctica de las Ciencias Formales -Matemática- de la Universidad Nacional de Catamarca, Argentina.

conceptos del Enfoque Cognitivista que se muestran adecuados para estudiar cuestiones referidas a la enseñanza de los conceptos del análisis, en particular, del límite. Resumimos, por cuestiones de espacio, los dos últimos, sin embargo dejamos referencias bibliográficas sobre el primero.

Consideramos el *lenguaje simbólico* en Matemática constituido por *significantes matemáticos* que son el conjunto de signos, símbolos, representaciones que se utilizan para expresar los conceptos, propiedades, etc. matemáticas. La Matemática -como institución- tiene asociados a estos significantes, significados aceptados en ella. El buen uso del lenguaje simbólico implica conocer y utilizar adecuadamente los significantes matemáticos con el significado matemáticamente aceptado Cabe notar que el buen uso de los significantes no asegura la comprensión matemática de las nociones pues una buena escritura simbólica no garantiza que los significados que el estudiante asocia sean correctos (ver ejemplos en Falsetti et. al (2004)).

El *lenguaje natural* se define en contraposición al lenguaje simbólico. En particular, y en relación con las características comunicacionales (cercanía o distancia entre las partes), Halliday (1978) propone diferentes *registros* en los que se lleva a cabo el uso del lenguaje, desde el registro *vulgar*, *coloquial* o *informal* y el *formal*. En la clase de Matemática suele estar presente el registro formal y, algunos docentes utilizan el registro coloquial pues entienden que de ese modo tienen mayor llegada a sus estudiantes y que éstos comprenden más. Finalmente consideramos la noción de *medio* de Lyons, (1980). En particular, se considera el *medio oral* o el *medio escrito*. Estas nociones se refieren a los canales elegidos para establecer la comunicación.

Queremos también tomar en consideración, aunque debamos hacer una distinción en los nombres de los conceptos, las nociones presentadas por Duval (1993): *registros de representación semiótica* y *conversión de registros*. Los registros de representación semiótica que menciona Duval, y que han sido trabajados por gran cantidad de autores (por ejemplo Hitt (2003)) son: el numérico, algebraico, gráfico y coloquial. Como explica en el texto, un sistema semiótico es considerado un *registro de representación* si pueden darse tres actividades cognitivas: a) la formación de una representación identificable, b) el tratamiento de una representación y c) la conversión de una representación. Nuestro interés, orientado por los propósitos del trabajo, se centra en estudiar el uso que el docente hace en clases de la conversión entre el registro coloquial al simbólico y recíprocamente. Señalamos la distinción en el uso de las palabras “registro” y “coloquial” que se dan entre Duval y Halliday. Mientras no haya confusión, nos referiremos a ellas sin explicitar con qué significado la tomamos.

Respecto del Enfoque Cognitivista comenzamos considerando el artículo de Fusaro Pinto y Tall (1999) en el que los autores estudian la construcción de mano de estudiantes de teoría matemática. Tomamos de dicho trabajo las categorías que utilizan los autores, que les han permitido diferenciar dos modos en que los estudiantes operan cuando trabajan con definiciones teóricas: las que llaman *asignar significado* y *extraer significado*. Centralmente la diferencia radica en qué es lo que el estudiante tiene en mente cuando trabaja con un concepto, o bien apela a su imagen conceptual del mismo o bien la definición conceptual (nociones debidas a Tall y Vinner (1981)). Si un estudiante apela a la imagen conceptual que tenga construida de una noción, correcta o no, completa o no, y a partir de ella construye una definición, está *asignando significados*. Distinto es el caso en el que el estudiante parte de la definición conceptual de la noción. En este caso, *extrae significado* cuando intenta comprender cuestiones relativas a ella partiendo de una definición matemáticamente correcta. Es decir, la asignación de significados se construye a partir de ideas informales mientras que la extracción de significados de realiza partiendo de teoría formal.

Desarrollo y discusión

En el tipo de exploración que hemos comenzado a realizar, encontramos unas primeras caracterizaciones del uso de los lenguajes y sus registros por el docente, como las que describimos a continuación. Pueden incluso aparecer en distintos momentos de una misma clase, o en clases diferentes.

<u>Tipificación 1:</u> *Explicación clara y precisa en lengua natural (registro formal), en medio oral sin explicación intencional del lenguaje simbólico (medio escrito)*

El docente expresa oralmente *“dos números reales son iguales cuando la distancia entre ellos puede hacerse arbitrariamente chica”*.
Simultáneamente registra en el pizarrón:
Sean $a, b \in \mathbb{R}$.
$a = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$

Aquí el docente dice “la distancia es arbitrariamente chica” y no explica por qué se utiliza épsilon, por qué es para todo épsilon, enuncia una implicación y escribe una equivalencia, dice distancia y escribe el módulo de la diferencia, etc. La explicación oral puede resultar clara al alumno, pero no da explicación del uso de símbolos. En este caso, es probable que el estudiante entienda la explicación oral, copie del pizarrón y no incluya aclaraciones. Al estudiar fuera de la clase, como sus notas están en lenguaje simbólico, si no logra extraer significado de él, y no puede reconstruir lo ocurrido en clase, no comprendería el tema. La conversión entre el registro coloquial y el simbólico no es atendida desde la enseñanza.

<u>Tipificación 2:</u> *Explicación imprecisa en lengua natural (registro formal) en medio oral y en simultáneo poca atención al lenguaje simbólico (medio escrito). Al final del tema, correcto uso del lenguaje simbólico en el medio escrito.*

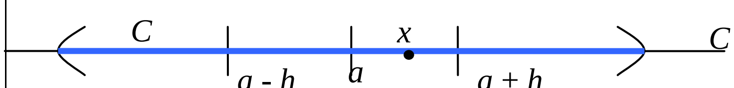
Extracción textual de la explicación de un profesor sobre el concepto de punto de acumulación previo a la enseñanza del concepto de límite funcional.

<u>Profesor:</u> *Este valor x* (señalando el del gráfico siguiente) *es punto de acumulación, ¿por qué? Porque pertenece al conjunto C, fíjense que el conjunto C abarca muchos más valores de los que están marcados en el entorno reducido, entonces este punto está incluido dentro del azul* (se refiere al conjunto C) *y también está incluido dentro del entorno reducido…. Y también está incluido dentro del entorno reducido. O sea que otra de las condiciones que también vamos a ver que después se puede anotar es que la intersección del conjunto C con el entorno reducido tiene que ser distinto del conjunto cero, o sea lo que podemos decir también es que la intersección del conjunto C, C intersección el entorno reducido de a tiene que ser distinto del conjunto vacío, o sea siempre tiene que haber un valor para que exista un punto de acumulación, ¿no?*

En el pizarrón queda escrito:

<u>Punto de acumulación</u>

a es punto de acumulación de C $\Leftrightarrow \exists\, E'(a) \,/\, (\, x \in C \wedge x \in E'(a)\,)$



$C \cap E'(a) \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ *punto de acumulación*

… En el libro de Rabufetti hay varios ejemplos y explica cómo demostrar y demás, yo les hago un comentario más o menos para que tengan una idea aproximada. Igual creo que con lo que estamos hablando alcanza y sobra para entender el concepto de por qué se habla de punto de acumulación en el caso de la definición de límite. Se habla de punto de acumulación, ¿por qué? Porque el punto de acumulación me permite considerar que yo excluya un punto que estoy analizando, porque puede ser el centro del entorno reducido, sin embargo en los costados, en las proximidades de ese punto va a haber alguno que satisface. Por eso es que cuando uno plantea el límite para x tendiendo al valor, el valor este no se considera pero si se consideran los valores que están en las proximidades. Bueno, por acá ya terminamos con esta parte ahora nos vamos a meter en lo que tiene que ver con límite de funciones.

Una alumna le pregunta por la notación

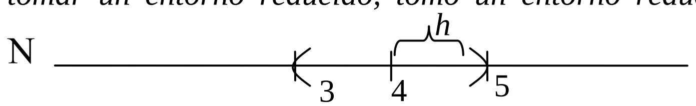
Bueno, lo que te puedo dar como otros ejemplos de anotación sería otra escritura como esta:

En el pizarrón queda escrito

a es punto de acumulación de C $\Leftrightarrow \forall\, h > 0\ \exists\, x \,/\, (x \in C \wedge 0 < |x - a| < h)$

Se observan aquí la serie de imprecisiones y errores que el docente expresa en lengua natural (afirma que el punto de acumulación debe pertenecer al conjunto, aparición confusa de los entornos, ninguna mención de los cuantificadores, etc.) y en simultáneo el docente utiliza de manera equivocada e imprecisa el lenguaje simbólico. El docente no pone atención a la explicación de la conversión entre registros. En este caso, es muy probable que el estudiante no haya comprendido el tema en clase a partir de la explicación oral y, al intentar extraer significado de las definiciones que copió, encontrará contradicciones –si las advierte-. Es altamente probable que al estudiar de los apuntes no pueda tampoco comprender el tema.

Tipificación 3: *Explicación correcta en lengua natural (registro formal) en medio oral casi sin presencia de lenguaje simbólico (medio escrito).*

> *Supónganse que quiero analizar si el punto* 4 *es punto de acumulación de los naturales, entonces voy a tomar un entorno reducido, tomo un entorno reducido* (y lo dibuja en el pizarrón)
>
> 
>
>
> *pero le aplico una pequeña condición, digo que el valor h tiene que ser menor que* 1*, h será mayor que cero y menor que* 1. Escribe*:* $0 < h < 1$
> *…el punto* 4 *no lo considero, tengo que considerar que dentro del entorno reducido de radio h tiene que haber otro elemento que pertenezca al conjunto N. Si yo tomo que el radio es menor que* 1 *no me toma el próximo número natural, ¿no? …Entonces si yo tomo el entorno reducido, esto es un artificio que uno hace ¿no?, tomo un entorno reducido de un radio menor que* 1 *entonces me aseguro que no va a entrar otro número, no va a entrar ni por este extremo natural, el* 5 *ni tampoco va a entrar el* 3*,* (y señala nuevamente en la recta) *en consecuencia el* 4 *no puede ser punto de acumulación del conjunto de los naturales.*

Es probable que este ejemplo, correcto en su explicación oral no permita directamente al alumno asignar significados al concepto de punto de acumulación pues el docente presentó aquí la negación del concepto, explicando que un cierto valor no será de acumulación de un conjunto. Es claro que la negación de un concepto es parte importante a considerar para la comprensión del mismo y podría conformar parte de la imagen conceptual. En este contexto, la nula presencia del lenguaje simbólico probablemente no colabore con la construcción del concepto. Distinto sería si el docente hubiera planteado en lengua natural "para justificar que un cierto *c* no es punto de acumulación de *C* basta encontrar algún entorno reducido de *c* en el cual no exista ningún punto del conjunto *C*", escribiendo "*c* no es punto de acumulación de *C* si $\exists\, h > 0 \,/\, \forall\, x$ tal que $0 < |x - a| < h$ se verifica que $x \notin C$".

El trabajo se encuentra en una etapa inicial de análisis, con el trabajo de campo concluido. Las tipificaciones ejemplificadas son utilizadas en distintos momentos de una clase y en otras clases, pero advertimos que no son las únicas. Se manifiesta como problemática la poca atención dada a la conversión de registros y el escaso cuidado en el uso simultáneo de ambos lenguajes, descuidándose uno u otro, según el caso.

Bibliografía

[1] Cañón, C: (1993) *La Matemática: Creación o Descubrimiento*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid.

[2] Duval, R. (1993) *Registres de represéntation sémiotique et unctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, pág. 37-65, Irem de Strasbourg.

[3] Falsetti, M.; Marino, T.; Rodríguez, M.; (2004), *Validación en Matemática en situación de aprendizaje*. Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Bs. As. Formato CD.

[4] Fusaro, M.; Tall, D. (1999); *Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning*, Proc. of the 23rd Conference of PME, Israel, **3**, pp. 281-288.

[5] Halliday, M.A.K., (1978), *Language as Social Semiotic*. Arnold.

[6] Hitt, F. y Páez, R. (2003), *Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto*. Revista Uno, No. 32, pp. 97-108.

[7] Lizcano, E. (1993) *Imaginario colectivo y creación matemática*, Gedisa.

[8] Lyons, J., (1980), *Semántica*. Teide.

[9] Margolinas, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques* La pensée sauvage.

[10] Tall, D.; Vinner, S.; (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2). 151-169.

[11] Tall, D.; (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. *Proceedings of the fourth international Conference for the Psycology of Mathematics Education*. Berkley, 170-176.

[12] Tarski, A. (1944); *The Concept of Truth in Formalized Languages* en Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford University Press.