

**Universidad Abierta Interamericana**



**Carrera: Licenciatura en Matemáticas**

***“ILUMINACIÓN DE POLÍGONOS ESCALERA  
CON LUCES DE ALCANCE LIMITADO”***

**Autor: Mazzei, Fabian Nicolas**

Director de Tesis:            Esp. Lic. Kranewitter, José Nicolás

**Tesis para la Licenciatura en Matemáticas**

**- Diciembre de 2017-**

Firmas del Jurado:

Nota:

## Resumen

En el siguiente trabajo daremos respuesta a preguntas sobre la iluminación de polígonos escalera con luces-vértice de alcance limitado. Estas son:

- ¿Cuál es el alcance mínimo de iluminación para que, situando una luz en cada vértice de un polígono escalera, éste quede totalmente iluminado?
- ¿Cuáles son los alcances de iluminación que pueden tener las luces para que el polígono escalera quede completamente iluminado?
- ¿Cuál es el número mínimo de luces-vértice que ilumina todo el polígono, según el alcance de iluminación de las luces?

Para poder entender y comprender los estudios que se realizan en este trabajo, sugerimos las siguientes palabras clave:

- Visibilidad
- Iluminación
- Alcance de iluminación
- Polígono escalera
- Vértice cóncavo
- Vértices convexo
- Figura convexa
- Distancia Euclídea

## Índice

<i>Introducción</i> .....	3
 <b>CAPÍTULO I</b>	
<i>Definiciones</i> .....	4
<i>Alcance de visibilidad</i> .....	7
<i>Polígonos escalera</i> .....	9
 <b>CAPÍTULO II</b>	
<i>Iluminación de cuñas con tres luces de alcance <math>L = r/2</math></i> .....	35
<i>Iluminación de polígonos escalera con luces de alcance <math>L = r/2</math></i> .....	45
<i>Iluminación de cuñas con dos luces de alcance <math>L = r/2</math></i> .....	46
<i>Los vértices <math>V</math>, <math>a_1</math> y <math>a_m</math> son necesarios en algunos casos para iluminar al polígono escalera</i> .....	48
 <b>CAPÍTULO III</b>	
<i>Iluminación de polígonos escalera con luces de alcance <math>L \geq r</math></i> .....	51
<i>Iluminación de polígonos escalera con <math>\lfloor n/4 \rfloor + 1</math> luces de alcance <math>L = r - \varepsilon</math></i> .....	55
<i>Iluminación de polígonos escalera con <math>\lfloor n/4 \rfloor + 2</math> luces de alcance <math>L = r - \varepsilon</math></i> .....	62
<i>Iluminación de polígonos escalera con <math>\lfloor n/4 \rfloor + 1</math> luces de alcance <math>L = r/2</math></i> .....	65
<i>Iluminación de polígonos escalera con <math>\lfloor n/4 \rfloor + 4</math> luces de alcance <math>L = r/2</math></i> .....	70
<i>Iluminación de cualquier polígono escalera dependiendo del alcance de Iluminación <math>L</math></i> .....	97
<i>Conclusiones</i> .....	98
<i>Referencias</i> .....	99

## Introducción

El problema original de la galería de arte propuesto por V. Klee, que preguntaba por el mínimo número de guardias necesarios para vigilar el interior de una galería de arte con  $n$  paredes, donde dichos guardias debían estar inmóviles, no podían ver a través de los muros y tenían un radio de visibilidad de  $360^\circ$ ; abrió un nuevo campo de la Geometría Computacional. En este nuevo campo se engloban todos los problemas que, de alguna manera, están relacionados con la iluminación o vigilancia de cualquier estructura o elemento geométrico, en nuestro caso, los polígonos escalera.

La visibilidad o iluminación clásica no utiliza el concepto de limitación en el alcance para la vigilancia (o iluminación) de guardias (o luces). Esta situación no es en absoluto real, pues los mecanismos de iluminación que se utilizan no tienen un alcance ilimitado. Por tanto, tiene sentido introducir un concepto de visibilidad o iluminación donde el alcance esté limitado a una distancia  $L$ . Formalizaremos luego estos conceptos que evidentemente estarán relacionados con el alcance de iluminación  $L$ , alcance que será medido siempre con la distancia euclídea.

En este trabajo esperamos determinar una cota que nos diga la cantidad de luces que vamos a necesitar para poder iluminar completamente a los polígonos escalera, dependiendo, de la cantidad de vértices que tenga el polígono y del alcance de iluminación  $L$  que tengan las luces. Para poder llegar a eso hay que considerar varias Propiedades, Proposiciones y Lemas que involucran a cuñas y peldaños que se forman en los polígonos escalera, ya que son de suma importancia para poder llegar a construir la cota.

El lugar donde se coloca la luz es crucial, ya que podría generarse un aumento en la cantidad de luces necesarias, y no es lo esperado. Se trabajó minuciosamente, y llegamos, a que si tenemos un alcance de iluminación muy grande, vamos a necesitar una sola luz para poder iluminar todo el polígono escalera. Si el alcance es muy pequeño, no podremos iluminar ninguno completamente, pero para otros casos encontraremos una cota de luces necesarias y suficientes para iluminar íntegramente los polígonos escalera, las cuales, deben ir colocadas en los vértices cóncavos en forma alternada.

## Capítulo I

### Definiciones

En este apartado se detallarán algunas definiciones que utilizaremos en el recorrido del trabajo.

#### Definición 1.1:

Visibilidad: Sea  $S$  un conjunto incluido en  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que dos puntos  $x, y \in S$  son visibles en  $S$ , si y sólo si el segmento que los une está íntegramente contenido en  $S$ .

Decimos que un punto ve a otro en  $S$ , si ambos son visibles en  $S$ .

En símbolos:

- $x$  ve a  $y$  si y sólo si  $[x, y] \subset S$

El concepto de visibilidad guarda una extrema relación con el concepto geométrico de convexidad.

#### Definición 1.2:

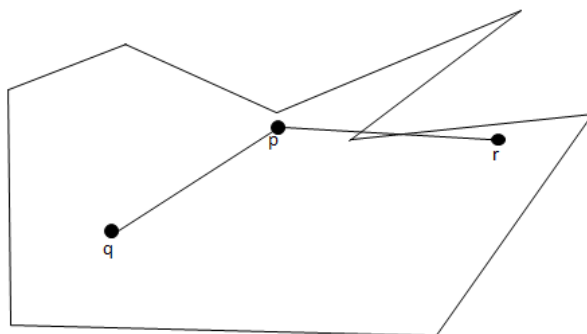
Conjuntos convexos: Decimos que un conjunto  $S$  es convexo cuando al elegir dos puntos distintos cualesquiera de él, el segmento que los une está totalmente contenido en conjunto.

- Un conjunto  $S$  es convexo si y sólo si para todo  $x \in S$  y para todo  $y \in S$ ,  $[x, y] \subset S$

En términos de visibilidad, podemos decir que un conjunto es convexo si y sólo si al elegir arbitrariamente dos puntos distintos de él, éstos siempre se ven.

Siguiendo esta definición, un conjunto  $S$  no es convexo si existen dos puntos distintos, tal que uno no ve al otro.

En el siguiente ejemplo  $p$  ve a  $q$ . Sin embargo  $r$  no ve a  $p$ . Es por esto último que decimos que éste polígono no es convexo.



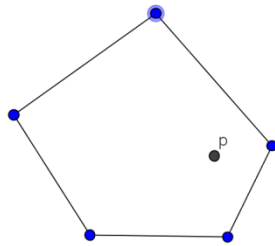
Definición 1.3:

Iluminación: Decimos que un punto  $x$  de un conjunto  $S$  ilumina a otro punto  $y$  de  $S$ , cuando  $x$  ve a  $y$ .

Como consecuencia de esto se desprende:

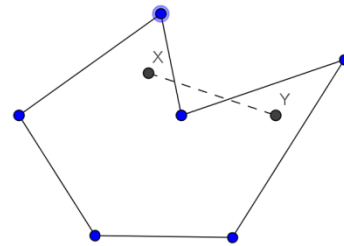
- En un conjunto convexo, cualquier punto ilumina a todo el conjunto.

Conjunto convexo



Conjunto no convexo

( $x$  no ilumina a todo el conjunto)



Hay que destacar que ver e iluminar tienen un significado estrechamente relacionado. Con lo cual puede ocurrir que en este trabajo se usen ambas definiciones como sinónimos.

Definición 1.4:

Distancia: Dados dos puntos cualesquiera  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , definimos la distancia entre ellos,  $d(p, q)$ , como la longitud del segmento que los separa.

Definición 1.5:

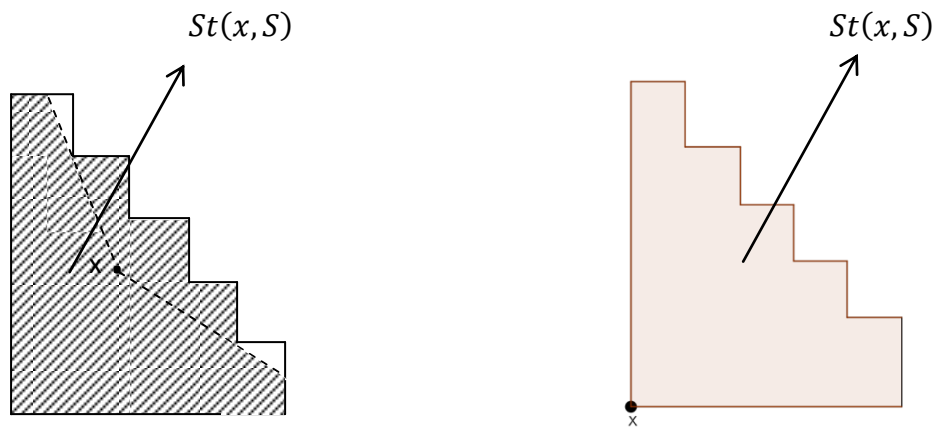
Distancia euclídea: Dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^n$ , se puede definir su distancia euclidiana o simplemente su distancia,  $d(p, q)$ , como la norma de su diferencia..

$$d(p, q) = |p - q|$$

Definición 1.6:

Estrella de un punto: Se denomina *estrella* de un punto  $x$  en un conjunto  $S$  al conjunto de todos los puntos de  $S$  que son visibles por  $x$ . Su notación es:  $St(x, S)$

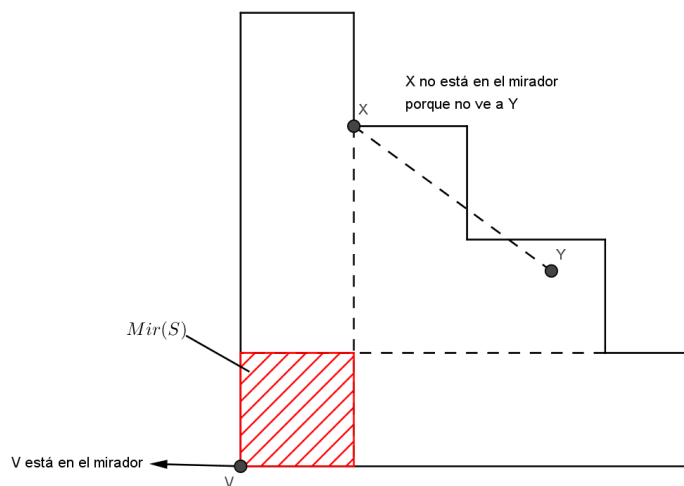
En símbolos:  $St(x, S) = \{y \in S / x \text{ ve a } y \text{ en } S\} = \{y \in S / [x, y] \subset S\}$



Un conjunto es *estrellado* si existe al menos un punto de él cuya estrella es dicho conjunto.

Definición 1.7:

Mirador de un conjunto estrellado: Se denomina *mirador* de un conjunto estrellado  $S$ , y lo denotamos como  $mir(S)$ , al conjunto de puntos que ven a  $S$ .



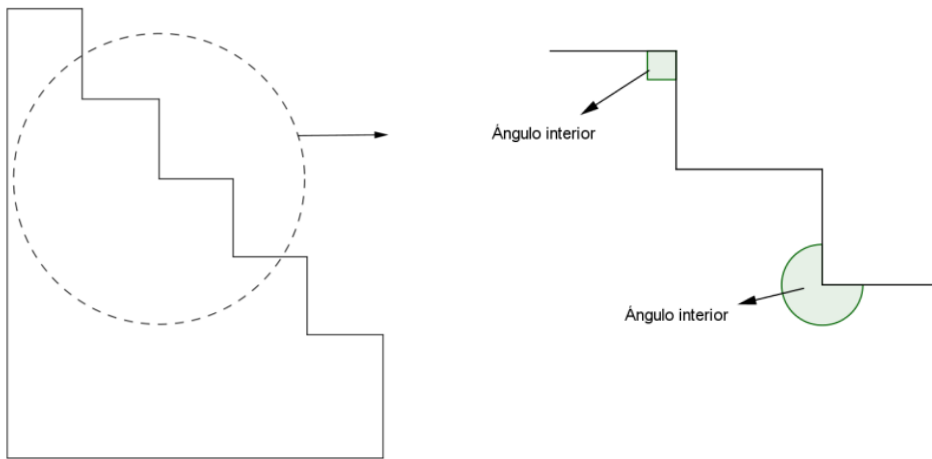
Definición 1.6:

Polígono: Un polígono  $P$  en el plano es un conjunto de  $n$  puntos  $\{p_1, \dots, p_n\}$  llamados vértices, y  $n$  segmentos de rectas  $\{l_1, \dots, l_n\}$  llamados lados tales que:

1. Los puntos extremos de los lados son vértices del polígono.
2. Todo vértice del polígono está en la intersección de exactamente dos lados.
3. Todo vértice del polígono tiene un ángulo externo e interno. El ángulo externo es adyacente al interno, y a su vez este último abarca la zona interior del



polígono. Es posible que solamente nos refiramos a ellos como simplemente ángulos. Si esto ocurre, asumiremos que nos referimos al ángulo interno.

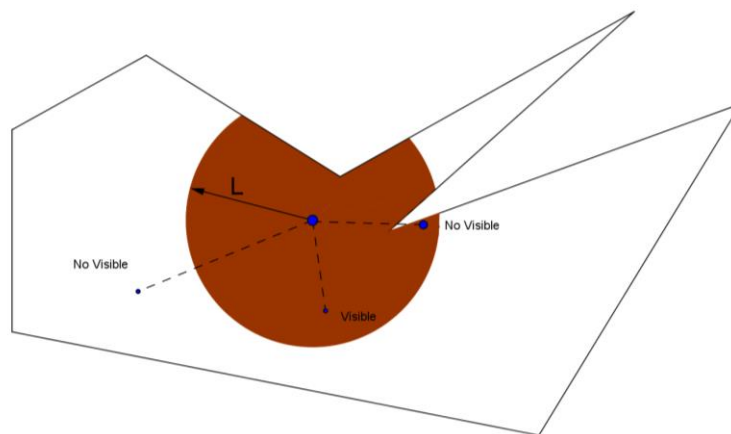


### Alcance de la visibilidad

Vamos a agregar una restricción a la iluminación y a la visibilidad: la misma será *el alcance de la visibilidad*. Este concepto de alcance condiciona a que el mismo sea limitado: es decir que la visibilidad llegue hasta una determinada distancia.

### Definición 1.7:

Visibilidad de alcance  $L$ : Dos puntos  $x$  e  $y$  de un conjunto  $P$  se dicen visibles con alcance  $L$ , si y sólo si, al colocar una luz de alcance  $L$  en  $x$  o en  $y$ , el segmento  $[x, y]$  está contenido completamente en  $P$  y la distancia entre los puntos es menor o igual a  $L$ .

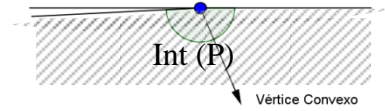
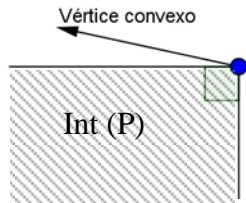


### Definición 1.8:

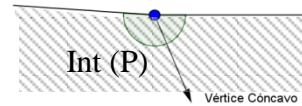
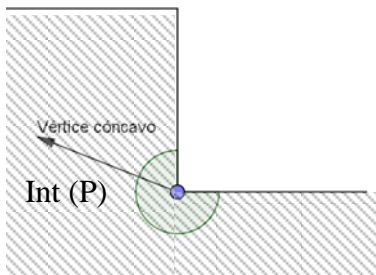
Alcance mínimo de iluminación  $L_{min}$ : Se define  $L_{min}$  como el valor más pequeño, donde al colocar luces de alcance  $L_{min}$  en los vértices de un polígono  $P$ , éste queda totalmente iluminado.

Definición 1.9:

Vértice convexo: Decimos que un vértice es convexo, si el ángulo interior del polígono determinado a partir de él tiene una amplitud menor que  $\pi$ .

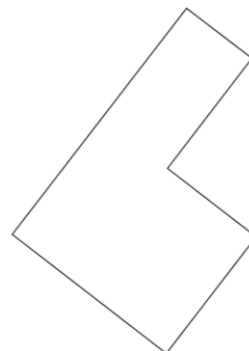
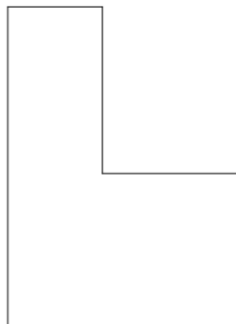


Vértice cóncavo: Decimos que un vértice "v" es cóncavo, si el ángulo interior del polígono determinado a partir de él tiene una amplitud mayor que  $\pi$ .



Definición 1.10:

Polígono ortogonal: Un polígono  $P$  se dice ortogonal, si los lados consecutivos son ortogonales entre sí. Es decir que sus ángulos interiores miden  $\frac{\pi}{2}$  o  $\frac{3}{2}\pi$ .



## Polígonos Escalera

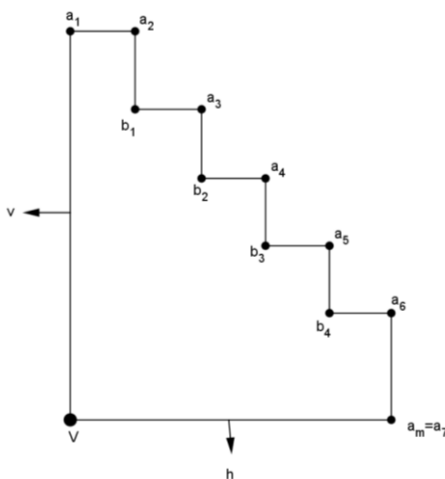
Como dijimos en la introducción, nuestro trabajo está encuadrado en el contexto de polígonos escalera. Por ende, vamos a definir a continuación todo lo necesario referenciado a este tipo de polígonos.

### Definición 1.11:

Polígono escalera: Se denomina polígono escalera a todo polígono ortogonal  $P$ , tal que existe un lado horizontal “h”, cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de los restantes lados horizontales, y un lado vertical “v”, cuya longitud es igual a la suma de las longitudes de los restantes lados verticales. Designaremos con la notación  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  al polígono escalera en el que  $V$  es un mirador formado por la intersección de “h” y “v”, y  $a_1, a_2, \dots, a_m$  son los vértices convexos.

Así si llamamos  $b_i, i = 1, 2, \dots, m - 3$  al vértice cóncavo, se tiene:

$$\overline{a_1 a_2} + \sum_{i=1}^{m-3} \overline{b_i a_{i+2}} = \overline{V a_m} \quad \text{y} \quad \overline{a_{m-1} a_m} + \sum_{i=1}^{m-3} \overline{b_i a_{i+1}} = \overline{V a_1}$$



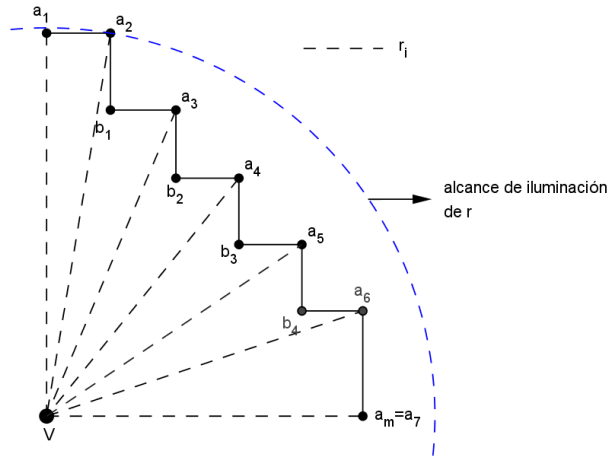
**Figura N°1**

### Definición 1.12:

Radio de un polígono escalera: Dado un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , se llaman radios exteriores de  $P$ , y se denotan por  $r_i$  a los segmentos  $\overline{V a_i} \forall i = 1, 2, \dots, m$ . Se denota por  $r$  al máximo de los radios exteriores de  $P$ .

$$r = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} r_i$$

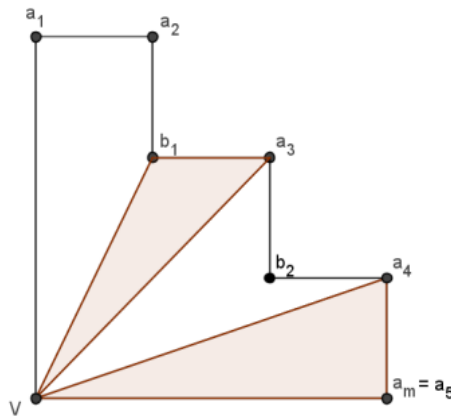
Para comprender bien la definición anterior podemos ver la Figura N°2 donde se dibujan los radios exteriores de un polígono escalera, y la visibilidad de alcance  $r$ .



**Figura N°2**

Definición 1.13:

Cuña del polígono escalera: Denominamos cuña de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , al triángulo formado por  $V$  y dos vértices consecutivos. Los lados del triángulo son los segmentos que se forman entre el vértice  $V$  y los dos vértices consecutivos, y el segmento que une los dos vértices en cuestión. Los vértices de la cuña siempre son  $V$  y otros dos vértices consecutivos de  $P$ . Durante el trabajo vamos a usar el término cuña y triángulo como sinónimos.

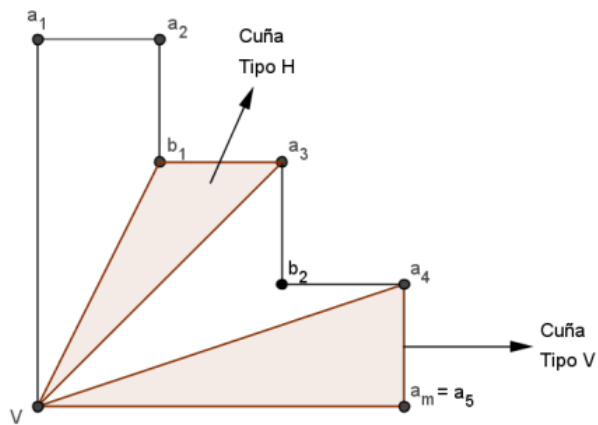


Definición 1.14:

Para el trabajo vamos a distinguir dos tipos de cuñas: Cuñas tipo V y cuñas tipo H.

Cuña tipo V: Decimos cuña tipo V a una cuña donde uno de sus lados es paralelo al segmento  $\overline{Va_1}$

Cuña tipo H: Decimos cuña tipo H a una cuña donde uno de sus lados es paralelo al segmento  $\overline{Va_m}$ .



Observación: Hay dos cuñas que encuadran en ambas definiciones. La cuña  $V, a_1, a_2$  y la cuña  $V, a_{m-1}, a_m$ .

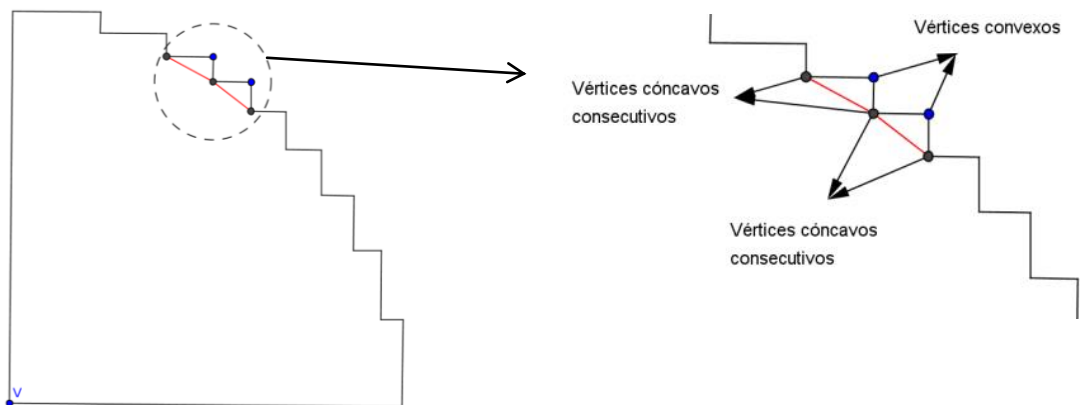
La cuña  $V, a_1, a_2$  es una cuña Tipo H

La cuña  $V, a_{m-1}, a_m$  es una cuña tipo V

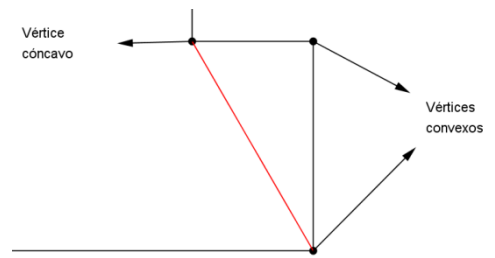
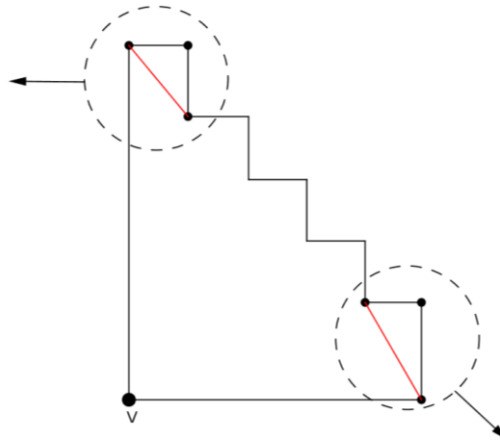
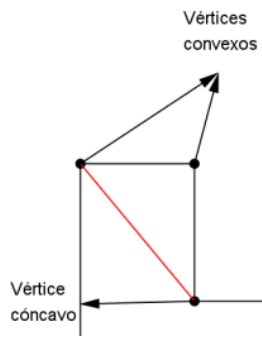
Definición 1.15:

Peldaño: Decimos que un peldaño es un triángulo rectángulo formado por:

- dos vértices cóncavos consecutivos y un vértice convexo de un polígono escalera. La hipotenusa de dicho triángulo rectángulo es el segmento que une los dos vértices cóncavos.
- $a_1, a_2, b_1$
- $b_{m-3}, a_{m-1}, a_m$



El primer peldaño y el último, son triángulos rectángulos que están formados por dos vértices convexos consecutivos y un vértice cóncavo. La hipotenusa de dichos triángulos es el segmento que une el vértice cóncavo con el convexo. Y éstos son los únicos.



## Capítulo II

### Iluminación de Cuñas y Polígonos escalera con luces de alcance $L = r/2$

Este trabajo está inspirado en el *problema de las galerías de arte*. Como ya adelantamos, vamos a trabajar en el contexto de iluminación con un tipo de polígono en particular: el polígono escalera. En lugar de usar luces dentro del polígono como en el problema original, las cuales pueden ver todo a su alrededor con un ángulo de  $360^\circ$  y sin límite de alcance, vamos a utilizar luces ubicadas en los vértices, que llamaremos luces-vértice, con la misma capacidad de visualización que los vigilantes de la galería, pero con alcance limitado ( $L$ ). En este trabajo, cuando propongamos luces, siempre serán consideradas luces-vértice; es decir siempre las luces estarán ubicadas en los vértices del polígono escalera.

En este Capítulo estudiaremos propiedades, proposiciones y lemas, que utilizaremos para poder encontrar el mínimo número de luces-vértice con alcance  $L$  necesarias para iluminar cualquier polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Algunas de ellas son:

1. El  $L_{min}$  para iluminar cualquier polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  no puede ser menor a  $r/2$ , donde  $r$  representa el radio del polígono.
2. Analizaremos el número de luces-vértice de alcance  $L = r/2$  necesario para iluminar las cuñas de cualquier polígono escalera.
3. Los polígonos escalera de  $n$  vértices se pueden iluminar completamente con  $n$  luces alcance  $L = r/2$ , cantidad que no es la mínima.
4. Ubicar luces en los vértices  $V, a_1$  y  $a_m$  es necesario en algunos casos para iluminar ciertos polígonos  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  con luces-vértice de alcance  $r/2$ .

### Visibilidad de Alcance Limitado en Polígonos Escalera

Antes de empezar a pensar en las luces de alcance  $L = r/2$ , nos vamos a plantear una pregunta.

#### *Enunciado de la pregunta*

Si colocáramos una luz en cada vértice de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ ,

¿Cuál sería el mínimo alcance de iluminación ( $L_{min}$ ) necesario para iluminar cualquier polígono escalera?

Vamos a dar la respuesta a ésta pregunta, y luego explicaremos los pasos que vamos a seguir para justificar lo dicho.

Si el alcance de iluminación  $L$  toma valores del intervalo  $[r/2, +\infty)$ , entonces se podrá iluminar cualquier polígono escalera con luces-vértice. Por ende  $L_{min} = r/2$ .

Para poder determinar que  $L$  debe tomar valores pertenecientes a  $[r/2, +\infty)$ , primero tenemos que demostrar que existe algún polígono escalera que no puede ser iluminado con luces de alcance  $L$  menor a  $r/2$ , cosa que haremos en la Propiedad 2.1. Luego demostraremos que podemos iluminar cualquier polígono escalera colocando luces de alcance  $r/2$ , y eso lo haremos en la Propiedad 2.10. Como podemos iluminar cualquier polígono escalera con luces de alcance  $r/2$ , entonces podremos iluminarlos con luces de mayor alcance. Por tales motivos  $L$  puede tomar valores entre  $[r/2, +\infty)$ .

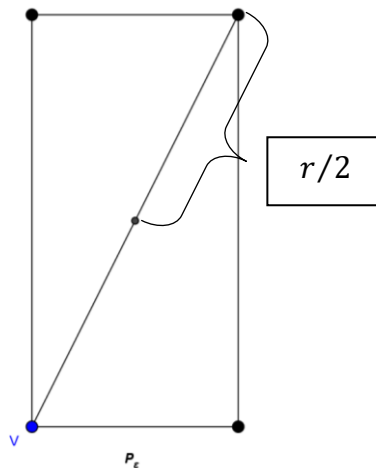
### Propiedad 2.1

Existen polígonos escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ , que no podremos iluminar si  $L_{min} < r/2$ .

#### Demostración:

Para la demostración vamos a mostrar que existe al menos un polígono  $P_\varepsilon$  de radio  $r$ , tal que si proponemos un alcance de iluminación  $L$  que sea menor que  $r/2$ , el polígono no quedará iluminado al ubicar luces con dicho alcance de iluminación en todos sus vértices. Esto significa que ese valor no podrá ser  $L_{min}$ .

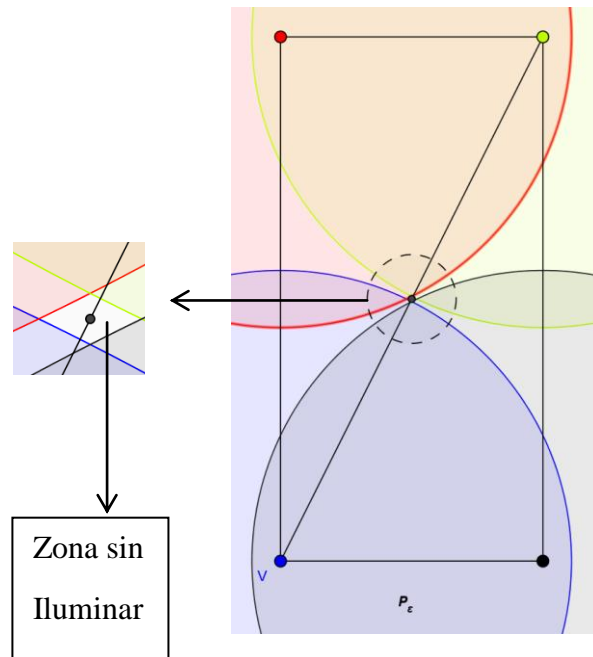
Sea  $P_\varepsilon$  el siguiente rectángulo, que es en particular un polígono escalera y consideremos  $L_{min} = (r/2) - \varepsilon$ , siendo  $0 < \varepsilon < r/2$ .



Veremos que si en  $P_\varepsilon$  colocamos luces-vértices de alcance  $L_{min}$  en todos sus vértices, ocurre que no se ilumina completamente.



En cada vértice ubicamos una luz. La zona iluminada del polígono será representada por la intersección entre: el polígono y la unión de todos los círculos con centro en los vértices, como se muestra a continuación:



Con lo cual, si el alcance de iluminación  $L$  es menor a  $r/2$ , entonces no podremos iluminar cualquier polígono escalera al poner luces en cada uno de sus vértices.

### **Iluminación de polígonos escalera colocando luces de alcance $L_{min} = r/2$ en todos sus vértices.**

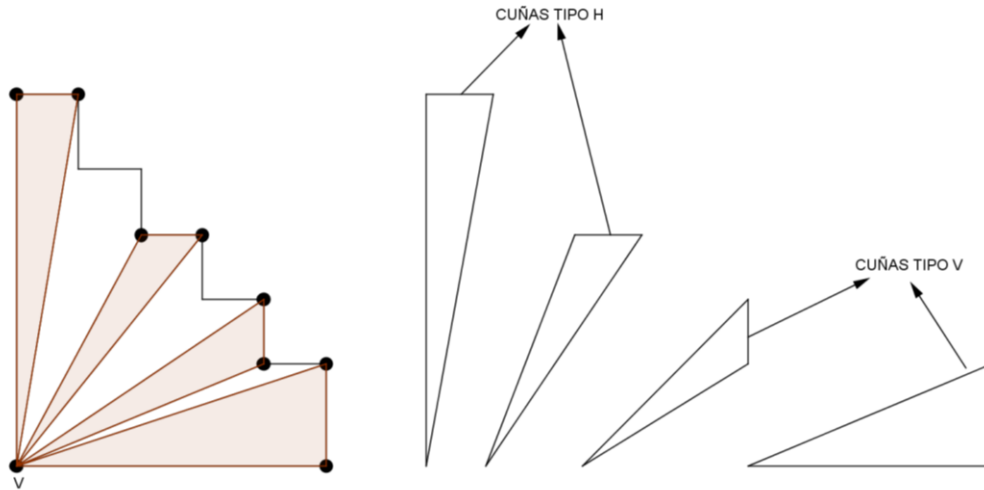
Ahora vamos a demostrar que podemos iluminar cualquier polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices colocando luces de alcance  $L_{min} = r/2$  en todos los vértices del mismo, es decir se lo va a poder iluminar con  $n$  luces. En el Capítulo III se estudiará el mínimo número de luces necesarias para iluminar cualquier polígono escalera, y vamos a mostrar que se los puede iluminar con menos.

Antes de estudiar la iluminación de polígonos escalera con luces de alcance  $r/2$ , vamos a analizar la iluminación de las cuñas que se forman en dichos polígonos. Los análisis serán de suma importancia para determinar si existe la posibilidad de iluminar dichos polígonos colocando luces en todos sus vértices.

### Observación 2.2

Las cuñas de cualquier polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  se pueden clasificar en dos tipos: Tipo V y Tipo H

En la siguiente figura se ejemplifican alguna de las cuñas mencionadas.



Tanto en cuñas de tipo H como en tipo V, la longitud del lado más largo de la cuña es como máximo  $r$ .

Todos los análisis que vamos a hacer sobre las cuñas los realizaremos sobre las tipo H, pero el mismo razonamiento vale para las cuñas tipo V, simplemente pensando en una simetría axial, que al final comentaremos.

Consideremos una cuña tipo H de  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  con vértices  $V, b_j, a_i$ , donde los  $a_i$ , con  $i=3, \dots, m-1$  son vértices convexos, y los  $b_j$ , con  $j=1, \dots, m-3$  son vértices cóncavos. A partir de éste se pueden deducir las Proposiciones 2.3 y 2.4 y las Propiedades 2.5, 2.6 y 2.7.

Hay que tener en cuenta que si la cuña es un triángulo rectángulo, los vértices de ésta serán  $V, a_1, a_2$ , si la cuña es tipo H, o  $V, a_{m-1}, a_m$  si la cuña es tipo V. Es por este motivo que consideramos  $i=3, \dots, m-1$ .

### Proposición 2.3

Consideremos un polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  con radio  $r$ . Si tomamos una cuña tipo H con  $\|\overline{Va_i}\| \leq r$ . Para cualquier  $i=2, \dots, m-1$  que tomemos, se cumple:

- Que la medida del lado horizontal de la cuña es menor a  $r$  y a  $\overline{Va_i}$ .
- Que la medida del lado  $\overline{Vb_j}$ , con  $j=i-2$ , es menor a  $r$  y a  $\overline{Va_i}$ . En caso de que la cuña sea un triángulo rectángulo la medida del lado  $\overline{Va_1}$  es menor a  $r$  y a  $\overline{Va_2}$ .

Esto significa tres cosas:

1. Que ni el lado H de la cuña, ni el lado  $\overline{Vb_j}$  pueden ser los lados de mayor medida de la cuña tipo H.
2. Que ni la medida del lado H de la cuña, ni la del lado  $\overline{Vb_j}$  pueden ser mayores o iguales a  $r$ .
3. En el caso de la cuña que sea un triángulo rectángulo, la medida del lado  $\overline{Va_1}$  no será mayor o igual  $r$ , ni el lado mayor de la cuña.

Demostración:

Los estudios de ésta y de algunas otras proposiciones y propiedades se van a dividir en dos partes para hacer más comprensibles las demostraciones. Primero vamos a estudiar al triángulo rectángulo y luego analizaremos los triángulos obtusángulos, los cuales son los dos tipo de cuñas que se pueden encontrar en cualquier polígono escalera.

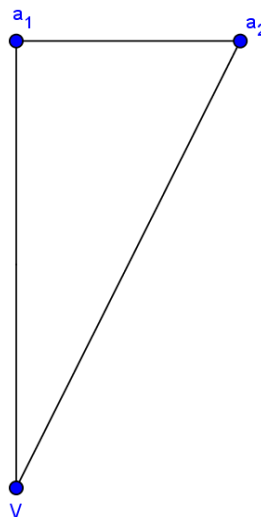
Vamos a analizar siempre la cuña tipo H, pero el mismo razonamiento vale para la cuña tipo V.

Cuando la cuña tipo H es un triángulo rectángulo

Dada una cuña tipo H, hay que ver dos cosas:

1. Que la medida de  $\overline{a_1a_2}$  es menor a  $r$ , y menor que la medida de  $\overline{Va_2}$
2. Que la medida de  $\overline{Va_1}$  es menor a  $r$ , y menor que la medida de  $\overline{Va_2}$ .

Como se dijo anteriormente en cualquier polígono escalera existe una única cuña tipo H que es triángulo rectángulo.

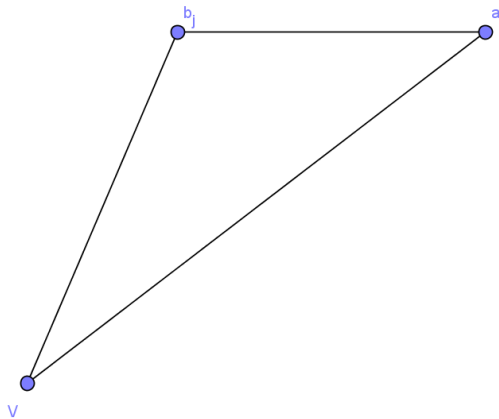


Con lo cual por ser  $\overline{Va_2}$  la hipotenusa del triángulo podemos asegurar que:

- $\|\overline{a_1a_2}\| < \|\overline{Va_2}\| \leq r$  y
- $\|\overline{Va_1}\| < \|\overline{Va_2}\| \leq r$ .

Cuando la cuña tipo H es un triángulo obtusángulo

Consideremos una cuña que resulte ser un triángulo obtusángulo:

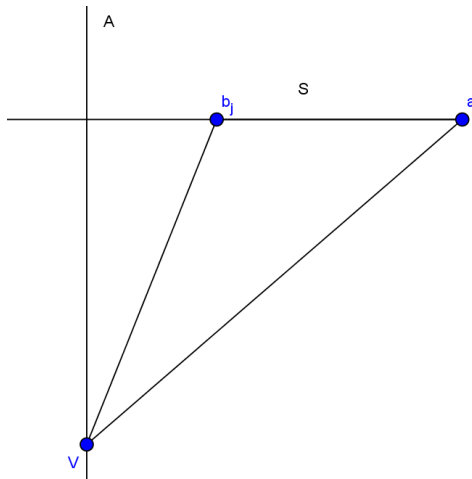


Hay que ver dos cosas:

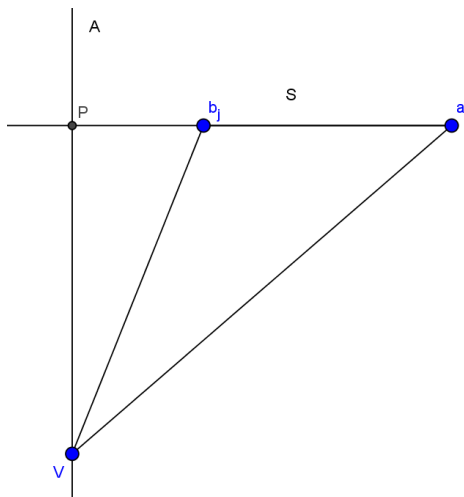
1. Que la medida de  $\overline{b_ja_i}$  es menor a  $r$ , y menor que la medida de  $\overline{Va_i}$
2. Que la medida de  $\overline{Vb_j}$  es menor a  $r$ , y menor que la medida de  $\overline{Va_i}$ .

Veamos que  $\overline{b_ja_i}$  es estrictamente menor que  $r$ , donde  $b_j$  es un vértice cóncavo y  $a_i$  es un vértice convexo.

Tracemos una semirrecta  $S$  con origen en  $a_i$  y que contenga a  $b_j$ , y una perpendicular a ésta que pase por  $V$ , a la cual la vamos a llamar  $A$ .



Llamemos P al punto intersección entre la perpendicular A y la semirrecta S.



Podemos formar dos triángulos rectángulos, el triángulo  $Pb_jV$  y el triángulo  $Pa_iV$ .

$$\|\overline{Pa_i}\| = \|\overline{Pb_j}\| + \|\overline{b_ja_i}\|$$

El lado  $\overline{Pa_i}$  es un cateto del triángulo rectángulo  $Pa_iV$ , con lo cual podemos afirmar por el Teorema de Pitágoras que  $\|\overline{Pa_i}\| < \|\overline{Va_i}\| \leq r$ .

$\|\overline{Pa_i}\| = \|\overline{Pb_j}\| + \|\overline{b_ja_i}\|$ . Si a esta igualdad le quitamos  $\|\overline{Pb_j}\|$  ésta dejaría de cumplirse, es decir que  $\|\overline{b_ja_i}\| < \|\overline{Pa_i}\|$ . Sabemos que:

$$\|\overline{b_ja_i}\| < \|\overline{Pa_i}\| < \|\overline{Va_i}\| \leq r, \text{ con lo cual:}$$

$$\|\overline{b_ja_i}\| < r \text{ y}$$

$$\|\overline{b_ja_i}\| < \|\overline{Va_i}\|.$$

Ahora bien, sabemos que  $\|\overline{Pa_i}\| = \|\overline{Pb_j}\| + \|\overline{b_ja_i}\|$ , entonces  $\|\overline{Pb_j}\| < \|\overline{Pa_i}\|$ .

Como  $Pa_iV$  y  $Pb_jV$  son triángulos rectángulos podemos deducir que  $\|\overline{Vb_j}\|^2 = \|\overline{Pb_j}\|^2 + \|\overline{VP}\|^2 < \|\overline{Pa_i}\|^2 + \|\overline{VP}\|^2 = \|\overline{Va_i}\|^2$ , entonces  $\|\overline{Vb_j}\| < \|\overline{Va_i}\|$ .

A su vez por hipótesis  $\|\overline{Va_i}\| \leq r$ , por ende  $\|\overline{Vb_j}\| < \|\overline{Va_i}\| \leq r \Rightarrow \|\overline{Vb_j}\| < r$

■

Con esto hemos visto que se cumple que la medida del lado horizontal de la cuña es menor a  $r$  y a  $\overline{Va_i}$ , y que la medida del lado  $\overline{Vb_j}$  es menor a  $r$  y a  $\overline{Va_i}$ , y en el caso de que la cuña sea un triángulo rectángulo la medida del lado  $\overline{Va_1}$  es menor a  $r$  y a  $\overline{Va_2}$ , sea cual fuere el polígono escalera.

### Proposición 2.4

Dada una cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  con radio  $r$ , si  $z$  es el punto medio del lado mayor de dicha cuña (que por la Proposición 2.3 siempre será  $\overline{Va_i}$  con  $i$  mayor o igual a 2 y menor que  $m - 1$ ) y  $p$  es el punto intersección entre el segmento horizontal y una perpendicular a éste que pasa por  $z$ , entonces se puede afirmar que  $\|\overline{b_jp}\| < \|\overline{a_i p}\|$  (o, en el caso de que la cuña sea un triángulo rectángulo  $\|\overline{a_1 p}\| = \|\overline{a_2 p}\|$ ).

#### Demostración:

Las dos posibles de cuñas que encuadran en las hipótesis de esta proposición tienen una forma como las representadas a continuación

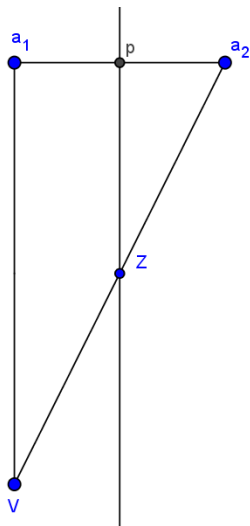


Figura 3a

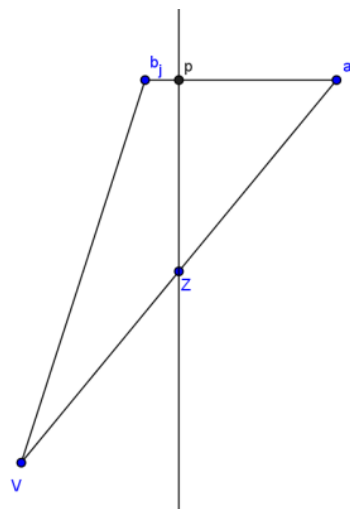


Figura 3b

Puede darse el caso en que  $p$  coincida con  $b_j$ .

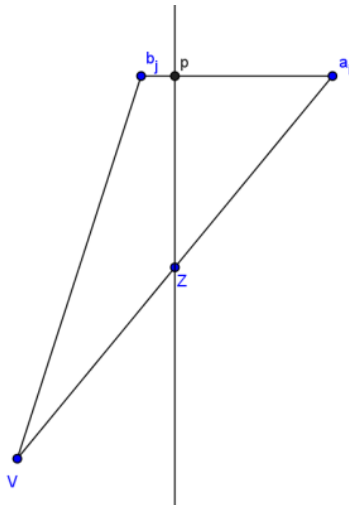
Si eso pasara, la distancia de  $b_j$  a  $p$  sería nula, con lo cual la solución es directa.

Cuando la cuña tipo  $H$  es un triángulo rectángulo

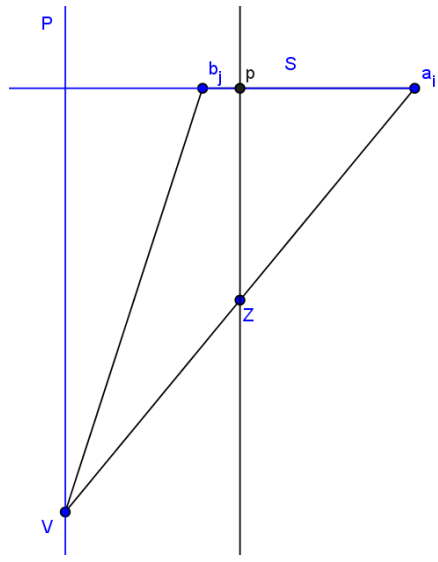
Tomemos el triángulo rectángulo  $Va_1a_2$ , Figura 3a, el cual pertenece a un polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  de radio  $r$ . En dicha cuña,  $z$  resulta ser el punto medio de la hipotenusa  $\overline{Va_2}$ . Por ende,  $p$  nos determina la mitad del lado  $\overline{a_1a_2}$ , por la semejanza de los triángulos  $Va_1a_2$  y  $zpa_2$ , con lo cual  $\|\overline{a_1p}\| = \|\overline{a_2p}\|$ .

Cuando la cuña tipo  $H$  es un triángulo obtusángulo

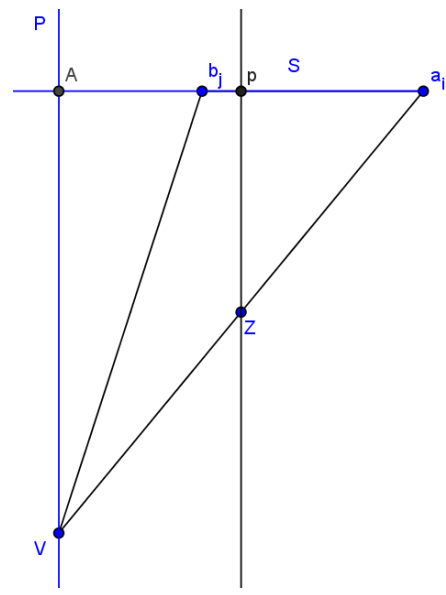
Si tenemos un triángulo obtusángulo cualquiera  $Vb_ja_i$ , donde  $z$  es el punto medio del lado  $\overline{Va_i}$ , y  $p$  pertenece al segmento  $[b_j, a_i]$  entonces  $\|\overline{b_jp}\| < \|\overline{a_ip}\|$ . Donde  $p$  es el punto intersección entre  $\overline{b_ja_i}$  y la perpendicular a éste que pase por  $z$ .



Tomemos un triángulo obtusángulo  $Vb_ja_i$  que cumple con las condiciones de la Proposición 2.4. Tracemos en él una semirrecta  $S$  con origen en  $a_i$  y que contenga a  $b_j$ , y una perpendicular a ésta que pase por  $V$ , a la cual la vamos a llamar  $P$ .

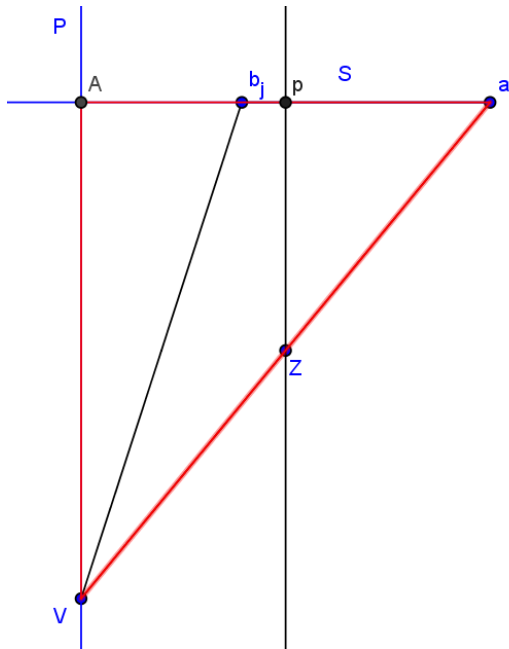


Llamemos A al punto intersección entre la perpendicular P y la semirrecta S.



Consideremos ahora el triángulo rectángulo  $Aa_iV$





Con esta construcción,  $z$  resulta ser el punto medio de la hipotenusa  $\overline{Va_i}$  y  $p$  nos determina la mitad del lado  $\overline{Aa_i}$ , por semejanza de los triángulos  $VAA_i$  y  $pza_i$ , con lo cual  $\|\overline{Ab_j}\| + \|\overline{b_jp}\| = \|\overline{pa_i}\| \Rightarrow \|\overline{b_jp}\| < \|\overline{pa_i}\|$ .

Resulta entonces que para toda cuña que verifica las hipótesis, se cumple que:

- $\|\overline{a_1p}\| = \|\overline{a_2p}\|$ , cuando la cuña es un triángulo rectángulo
- $\|\overline{b_jp}\| < \|\overline{pa_i}\|$ , cuando la cuña es un triángulo obtusángulo

Las Proposiciones 2.3 y 2.4 nos permitirán demostrar que la distancia de cada vértice de una cuña al punto  $z$ , es siempre menor o igual que  $r/2$  en la siguiente Propiedad.

### Propiedad 2.5

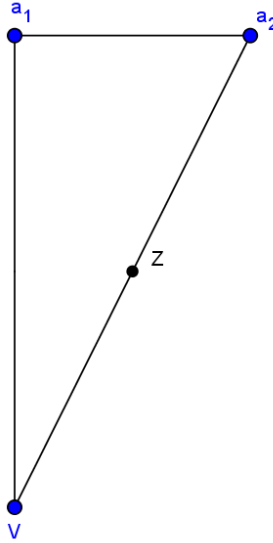
Dada una cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  con radio  $r$ , si  $z$  es el punto medio del lado mayor de dicho triángulo, entonces la distancia de cada vértice de la cuña al punto  $z$  es menor o igual que  $r/2$ .

#### Demostración:

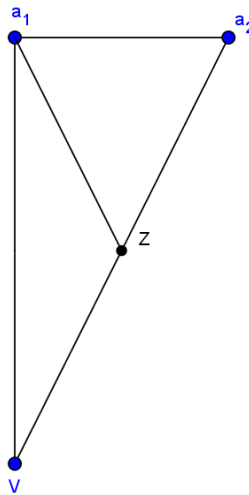
Nuevamente vamos a separar el análisis en dos casos: cuando la cuña es un triángulo rectángulo, y cuando es un triángulo obtusángulo. Nuestra demostración se hará para los casos de cuñas tipo H, pero con un razonamiento análogo se podrán hacer para cuñas tipo V.

Cuando la cuña tipo H es un triángulo rectángulo

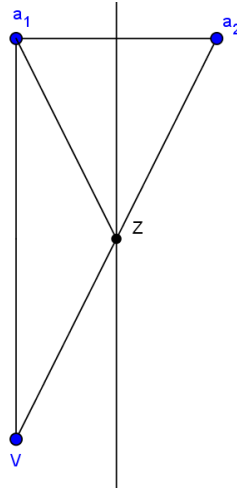
Sea el triángulo rectángulo  $Va_1a_2$  una cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  de radio  $r$ .  $\overline{Va_2}$  siempre es el lado mayor de la cuña por ser la hipotenusa del triángulo. Además éste será menor o igual a  $r$  por definición. Si  $z$  es el punto medio de  $Va_2$ , entonces  $\|\overline{a_2z}\| \leq r/2$  y  $\|\overline{Vz}\| \leq r/2$ .



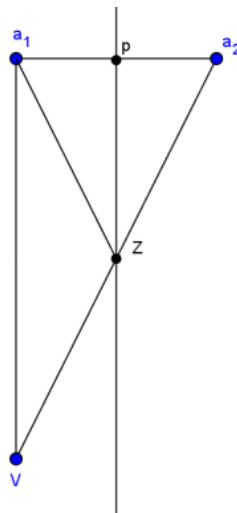
Sólo falta probar que  $\|\overline{a_1z}\|$  es menor o igual a  $r/2$ . Para ello, tracemos el segmento  $\overline{a_1z}$



Luego tracemos una perpendicular a  $\overline{a_1a_2}$  que pase por  $z$ .



Llamemos  $p$  al punto de la intersección entre  $\overline{a_1a_2}$  y esa perpendicular.



Ahora bien, con la perpendicular trazada podemos formar los triángulos rectángulos  $a_1pz$  y  $a_2pz$ .

Como el triángulo  $a_1pz$  es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras se verifica:

$$\|\overline{pa_1}\|^2 + \|\overline{pz}\|^2 = \|\overline{a_1z}\|^2.$$

A su vez, el triángulo  $pa_2z$  también es rectángulo, entonces:

$$\|\overline{pa_2}\|^2 + \|\overline{pz}\|^2 = \|\overline{a_2z}\|^2 \leq (r/2)^2$$

Por Proposición 2.4,  $\|\overline{pa_1}\| = \|\overline{pa_2}\| \Rightarrow \|\overline{pa_1}\|^2 = \|\overline{pa_2}\|^2$

En consecuencia:

$$\|\overline{a_1z}\|^2 = \|\overline{pa_1}\|^2 + \|\overline{pz}\|^2 = \|\overline{pa_2}\|^2 + \|\overline{pz}\|^2 \leq (r/2)^2$$

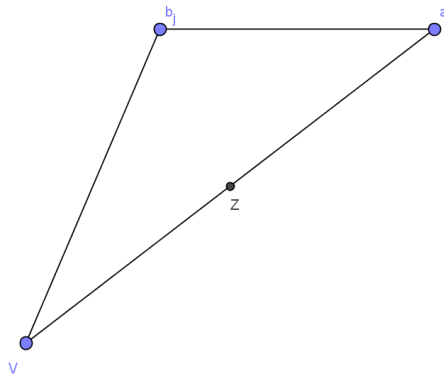
Quedando entonces:

$$\|\overline{a_1z}\|^2 \leq (r/2)^2$$

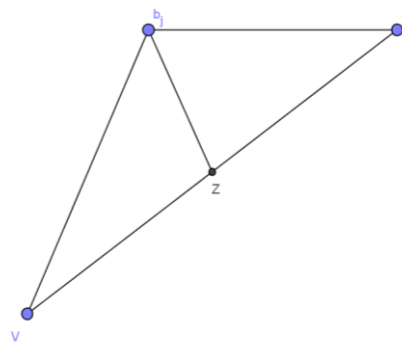
Por lo tanto resulta en este caso:  $\|\overline{a_1 z}\| \leq r/2$ .

Cuando la cuña tipo H es un triángulo obtusángulo

Sea el triángulo obtusángulo  $Vb_j a_i$  una cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, \dots, a_m)$  con radio  $r$ . Sabemos que  $\|\overline{V a_i}\| \leq r$ , y que a su vez es el lado mayor de dicho triángulo por la Proposición 2.3. Entonces, si  $z$  es el punto medio de  $\overline{V a_i}$ , resulta que:  $\|\overline{a_i z}\| \leq r/2$  y  $\|\overline{V z}\| \leq r/2$ .



Sólo falta probar que  $\overline{b_j z}$  es menor o igual a  $r/2$ . Tracemos el segmento  $\overline{b_j z}$



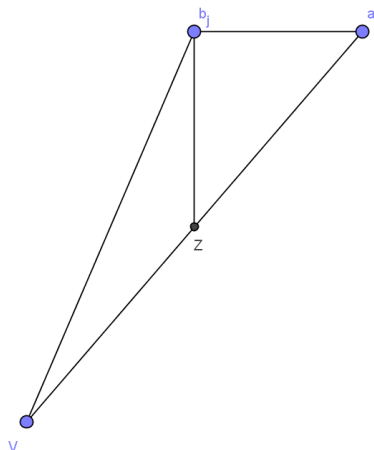
En los triángulos obtusángulos van a ocurrir tres casos:

- 1) Que el ángulo  $\widehat{z b_j a_i}$  sea rectángulo
- 2) Que el ángulo  $\widehat{z b_j a_i}$  sea agudo
- 3) Que el ángulo  $\widehat{z b_j a_i}$  sea obtuso

Con lo cual hay que demostrar para los tres casos que  $\overline{b_j z}$  es menor o igual a  $r/2$ .

Caso 1

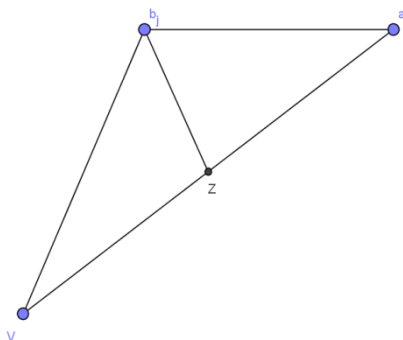
Analizaremos el caso en el que el ángulo formado por  $\widehat{z b_j a_i}$  es rectángulo, y llegaremos a la conclusión de que  $\overline{b_j z}$  es menor o igual a  $r/2$ .



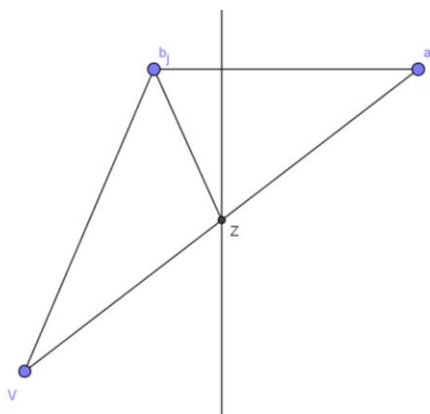
Dado que  $\overline{b_j z}$  es un cateto del triángulo rectángulo  $z\widehat{b_j}a_i$  y que  $\overline{z a_i}$  es la hipotenusa, resulta que  $\|\overline{b_j z}\| < \|\overline{z a_i}\| \leq r/2$  entonces  $\|\overline{b_j z}\| < r/2$ .

### Caso 2

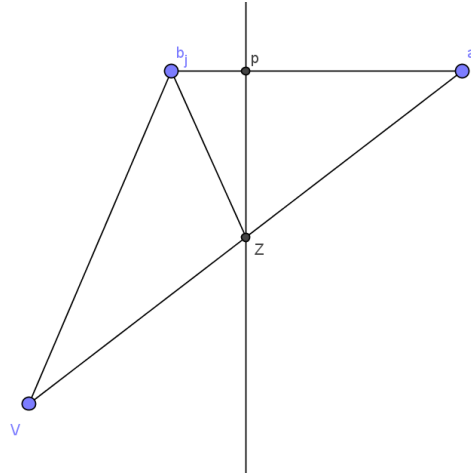
Ahora analizaremos el caso en el cual el ángulo formado por  $z\widehat{b_j}a_i$  es agudo, y llegaremos a la conclusión de que  $\overline{b_j z}$  es menor o igual a  $r/2$ .



Tracemos una perpendicular a  $\overline{b_j a_i}$  que pase por z.

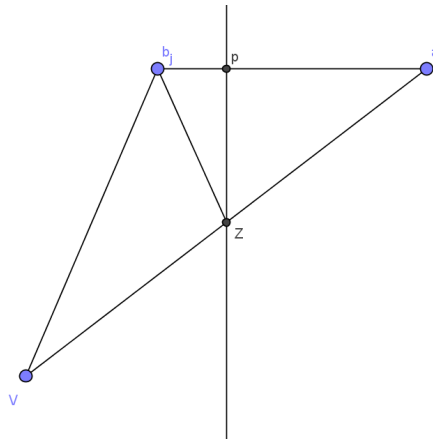


Llamemos  $p$  al punto de la intersección entre  $\overline{b_j a_i}$  y esa perpendicular.



Se forman los triángulos rectángulos:

$a_i p z$  y  $b_j p z$ .



Como el triángulo  $b_j p z$  es rectángulo, por el Teorema de Pitágoras:

$$\|\overline{p b_j}\|^2 + \|\overline{p z}\|^2 = \|\overline{b_j z}\|^2.$$

Por ser el triángulo  $p a_i z$  también rectángulo, y por ser  $z$  el punto medio de  $\overline{v a_i}$ , entonces:

$$\|\overline{p a_i}\|^2 + \|\overline{p z}\|^2 = \|\overline{a_i z}\|^2 \leq (r/2)^2$$

Por Proposición 2.4,  $\|\overline{p b_j}\| < \|\overline{p a_i}\|$ , entonces se verifica  $\|\overline{p b_j}\|^2 < \|\overline{p a_i}\|^2$ .

Resulta entonces:

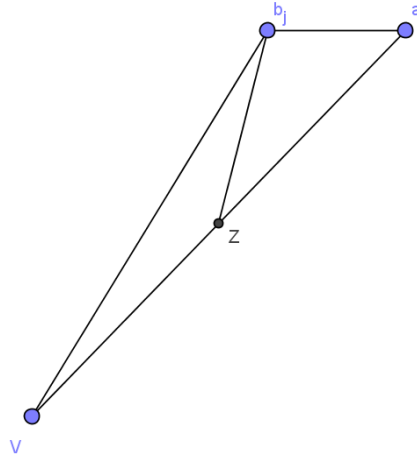
$$\|\overline{b_j z}\|^2 = \|\overline{p b_j}\|^2 + \|\overline{p z}\|^2 < \|\overline{p a_i}\|^2 + \|\overline{p z}\|^2 \leq (r/2)^2$$

Luego ocurre  $\|\overline{b_j z}\|^2 < (r/2)^2$ .

Para este caso también se verifica  $\|\overline{b_j z}\| < r/2$ .

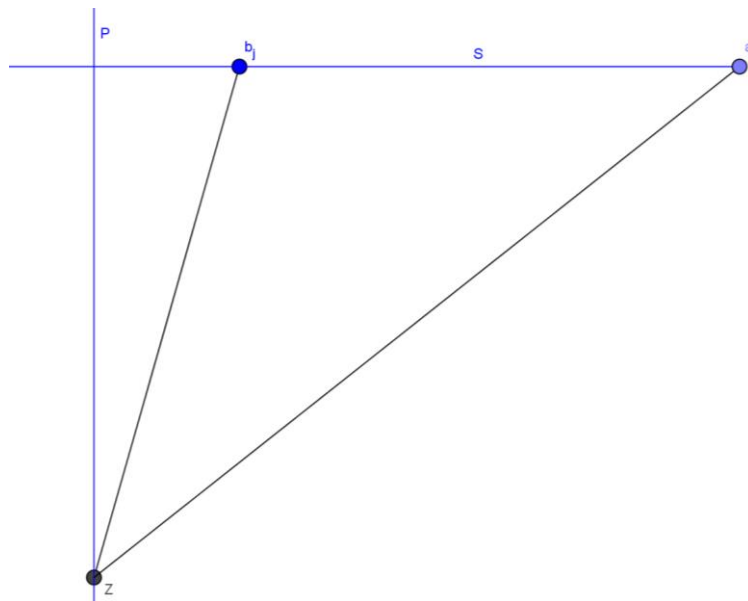
### Caso 3

En este caso, al trazar el segmento  $\overline{b_j z}$  el ángulo  $\widehat{z b_j a_i}$  es obtuso.

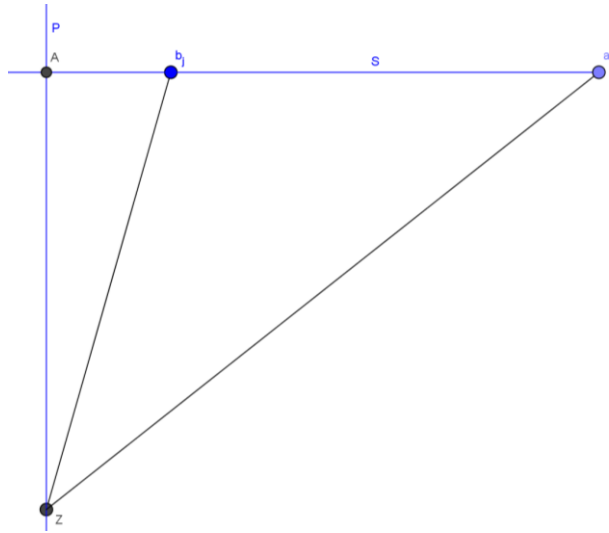


Analizaremos este caso, y llegaremos a la conclusión de que  $\|\overline{b_j z}\|$  es menor o igual a  $r/2$ .

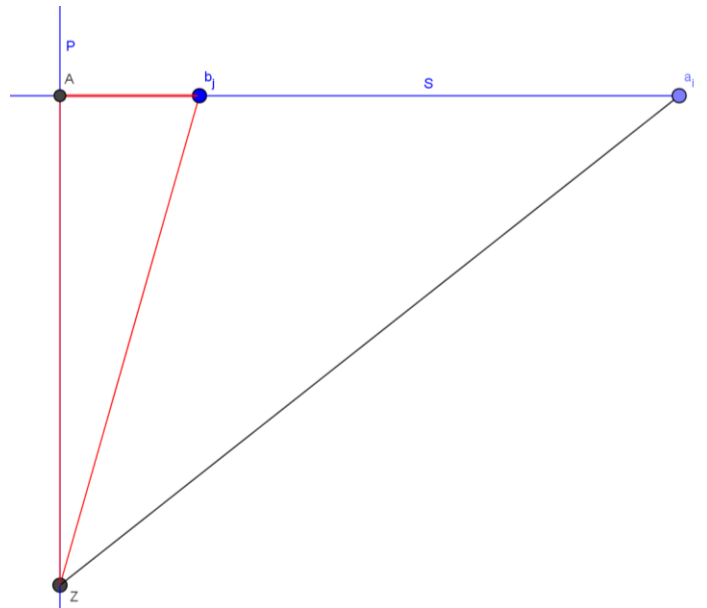
Tomemos el triángulo  $z b_j a_i$ . Tracemos una semirrecta  $S$  que contenga al segmento  $\overline{a_i b_j}$ , con origen en  $a_i$ , y luego una perpendicular  $P$  que pase por  $z$ , que interseque a la semirrecta.



Llamemos  $A$  al punto intersección entre la perpendicular  $P$  y la semirrecta  $S$ .



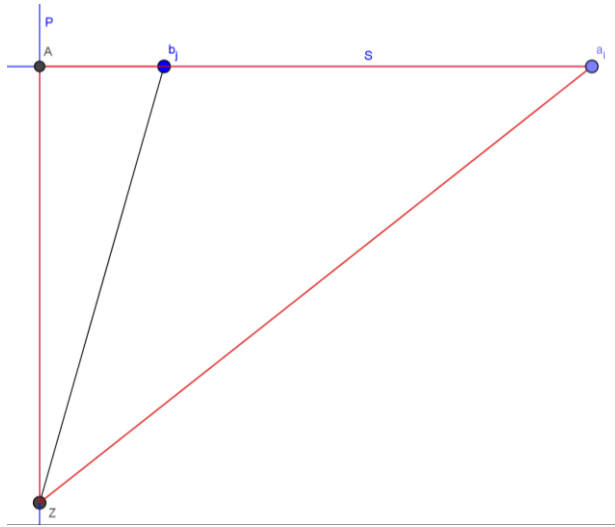
Ahora bien; se puede formar un triángulo rectángulo con  $Ab_jz$ .



Por el teorema de Pitágoras  $\|\overline{Ab_j}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 = \|\overline{b_jz}\|^2$ . (1)

A su vez,  $Aa_i z$  es otro triángulo rectángulo.





Entonces  $\|\overline{Aa_i}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 = \|\overline{za_i}\|^2$ . (2)

Como  $z$  es el punto medio del lado  $\overline{Va_i}$  el cual es menor o igual a  $r$ , entonces  $\|\overline{za_i}\|$  es menor o igual a  $r/2$ , por lo tanto  $\|\overline{za_i}\|^2 \leq (r/2)^2$ .

Podemos ver que  $\|\overline{Ab_j}\| + \|\overline{b_ja_i}\| = \|\overline{Aa_i}\|$ . Como  $\|\overline{b_ja_i}\| \neq 0$  se verifica:

$$\|\overline{Ab_j}\| < \|\overline{Aa_i}\| \Rightarrow \|\overline{Ab_j}\|^2 < \|\overline{Aa_i}\|^2.$$

Sumando miembro a miembro  $\|\overline{Az}\|^2$  la desigualdad se sigue manteniendo

$$\|\overline{Ab_j}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 < \|\overline{Aa_i}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2. \quad (3)$$

Por (1):

$$\|\overline{Ab_j}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 = \|\overline{b_jz}\|^2$$

y por (2):

$$\|\overline{Aa_i}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 = \|\overline{za_i}\|^2$$

A su vez  $\|\overline{za_i}\|^2 \leq (r/2)^2$ . Con lo cual se puede concluir que:

$$\begin{array}{ccc} \|\overline{b_jz}\|^2 = \|\overline{Ab_j}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 < \|\overline{Aa_i}\|^2 + \|\overline{Az}\|^2 = \|\overline{za_i}\|^2 \leq (r/2)^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (1) & (3) & (2) \end{array}$$

Con lo cual en este caso, también se verifica:  $\|\overline{b_jz}\| < r/2$

Completadas las pruebas de estos tres casos posibles, queda probada la Proposición 2.5.

Se demostró que la distancia de cada uno de los vértices de una cuña al punto  $z$  es siempre menor o igual a  $r/2$ . Gracias a esto podremos ver que se pueden iluminar las cuñas colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices, es decir que para cualquier punto que tomemos de la cuña, éste va a ser iluminado por alguna o algunas de las luces.

Como todos los polígonos escalera están formados por cuñas, al colocar luces de alcance  $r/2$  en todos los vértices del polígono, todas las cuñas quedarán iluminadas y por ende también el polígono.

Antes de demostrar lo anteriormente mencionado vamos a ver tres Propiedades importantes que nos ayudarán a hacer la demostración.

### Propiedad 2.6

Si  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  es un polígono escalera de radio  $r$ , y el triángulo  $Va_i b_j$  es una cuña tipo H cualquiera del polígono, entonces la distancia de los vértices  $V$  y  $b_j$  al punto medio del segmento  $\overline{Vb_j}$ , donde  $b_j$  es el vértice cóncavo, es menor a  $r/2$ .

#### Demostración:

Sea  $Va_i b_j$  una cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ ,  $D$  el punto medio del segmento  $\overline{Vb_j}$  y  $z$  el punto medio del segmento  $\overline{Va_i}$ . Hay que ver que los segmentos  $\overline{VD}$  y  $\overline{b_j D}$  tienen una medida menor que  $r/2$

Sabemos por Proposición 2.3 que  $\|\overline{Vb_j}\| < \|\overline{Va_i}\|$ , y por Propiedad 2.5 que

$$\|\overline{Vz}\| \leq r/2.$$

Entonces:

$$\|\overline{Vb_j}\|/2 = \|\overline{VD}\| \text{ y } \|\overline{Va_i}\|/2 = \|\overline{Vz}\|$$

Por ser  $\|\overline{Vb_j}\| < \|\overline{Va_i}\|$ , resulta:

$$\|\overline{VD}\| = \|\overline{Vb_j}\|/2 < \|\overline{Va_i}\|/2 = \|\overline{Vz}\| \leq r/2.$$

Queda finalmente:  $\|\overline{VD}\| < r/2$ .

También podemos ver que

$\|\overline{Vb_j}\|/2 = \|\overline{b_jD}\|$  y  $\|\overline{Va_i}\|/2 = \|\overline{Vz}\|$ , con lo cual tenemos:

$$\|\overline{b_jD}\| = \|\overline{Vb_j}\|/2 < \|\overline{Va_i}\|/2 = \|\overline{Vz}\| \leq r/2$$

Probamos también que  $\|\overline{b_jD}\| < r/2$ .

■

### Propiedad 2.7

Si  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  es un polígono escalera de radio  $r$ , y tomamos el triángulo rectángulo  $Va_1a_2$ , entonces la distancia de los vértices  $V$  y  $a_1$  al punto medio del segmento  $\overline{Va_1}$  es menor a  $r/2$ .

#### Demostración:

Sea el triángulo rectángulo  $Va_1a_2$  una cuña tipo H de un polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ ,  $D$  el punto medio del segmento  $\overline{Va_1}$  y  $z$  el punto medio del segmento  $\overline{Va_2}$ . Hay que ver que los segmentos  $\overline{VD}$  y  $\overline{a_1D}$  tienen una medida menor que  $r/2$

Sabemos por Proposición 2.3 que  $\|\overline{Va_1}\| < \|\overline{Va_2}\|$ , y por Propiedad 2.5 que

$$\|\overline{Vz}\| \leq r/2.$$

Entonces, como ocurre que

$\|\overline{Va_1}\|/2 = \|\overline{VD}\|$  y  $\|\overline{Va_2}\|/2 = \|\overline{Vz}\|$ , también se verifica:

$$\|\overline{VD}\| = \|\overline{Va_1}\|/2 < \|\overline{Va_2}\|/2 = \|\overline{Vz}\| \leq r/2$$

Obteniendo  $\|\overline{VD}\| < r/2$ .

Por otro lado, como  $\|\overline{Va_1}\|/2 = \|\overline{a_1D}\|$  y  $\|\overline{Va_2}\|/2 = \|\overline{Vz}\|$ , resulta:

$$\|\overline{a_1D}\| = \|\overline{Va_1}\|/2 < \|\overline{Va_2}\|/2 = \|\overline{Vz}\| \leq r/2.$$

Luego:  $\|\overline{a_1 D}\| < r/2$  ■

### Propiedad 2.8

Si  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  es un polígono escalera de radio  $r$ , y tomamos el lado horizontal de la cuña tipo H, entonces:

- La distancia de los vértices  $a_1$  y  $a_2$  al punto medio del lado  $\overline{a_1 a_2}$  es menor a  $r/2$ .  
Cuando la cuña es un triángulo rectángulo.
- La distancia de los vértices  $b_j$  y  $a_i$  al punto medio del lado  $\overline{b_j a_i}$  es menor a  $r/2$ .  
Cuando la cuña es un triángulo obtusángulo.

Demostración:

Cuando la cuña tipo H es un triángulo rectángulo

Sea  $E$  el punto medio del lado  $\overline{a_1 a_2}$  de la cuña  $V a_1 a_2$ , la cual pertenece al polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ . Las medidas de los segmentos  $\overline{a_1 E}$  y  $\overline{a_2 E}$  son menores a  $r/2$ , ya que por la Proposición 2.3 sabemos

$$\|\overline{a_1 a_2}\| < r \Rightarrow \frac{\|\overline{a_1 a_2}\|}{2} < \frac{r}{2}.$$

Lo que significa dos cosas:

1. Que  $\|\overline{a_1 E}\| < r/2$
2. Que  $\|\overline{a_2 E}\| < r/2$

Cuando la cuña tipo H es un triángulo obtusángulo

Sea  $E$  el punto medio del lado  $\overline{b_j a_i}$  de la cuña  $V b_j a_i$ , la cual pertenece al polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ . La medida de los segmentos  $\overline{b_j E}$  y  $\overline{a_i E}$  son menores a  $r/2$ , ya que por la Proposición 2.3 sabemos

$$\|\overline{b_j a_i}\| < r \Rightarrow \frac{\|\overline{b_j a_i}\|}{2} < \frac{r}{2}.$$

Lo que significa dos cosas:

1. Que  $\|\overline{b_j E}\| < r/2$
2. Que  $\|\overline{a_i E}\| < r/2$

Ahora sí ya estamos en condiciones de demostrar que se pueden iluminar las cuñas colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices. Y eso se hará en la siguiente Propiedad 2.9.

### Propiedad 2.9

Sea  $C$  una cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ . Si se colocan luces de alcance de iluminación  $r/2$  en todos los vértices de la cuña, entonces ésta quedará totalmente iluminada.

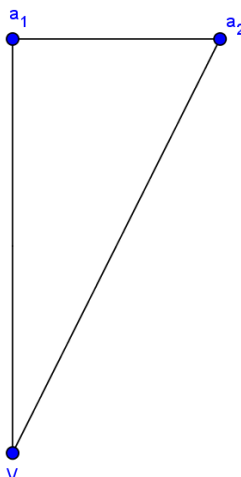
#### Demostración:

La demostración de la Propiedad 2.9 se va a hacer también en dos partes: primero vamos a estudiar una cuña tipo H, que sea un triángulo rectángulo. Luego haremos el mismo estudio pero con una cuña tipo H que sea un triángulo obtusángulo.

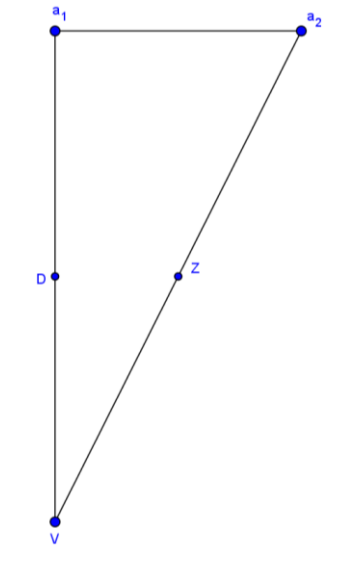
#### Cuando la cuña es un triángulo rectángulo

Para probar este caso tomaremos al triángulo rectángulo tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ , y construiremos distintos triángulos dentro de éste. Uno de los vértices de los triángulos que logremos formar, va a ser algún vértice de la cuña. Lo que vamos a demostrar es que cada triángulo se puede iluminar colocado una luz de alcance  $r/2$  en el vértice que comparte con la cuña, con lo cual si demostramos que podemos iluminar cada triángulo entonces vamos a poder iluminar toda la cuña.

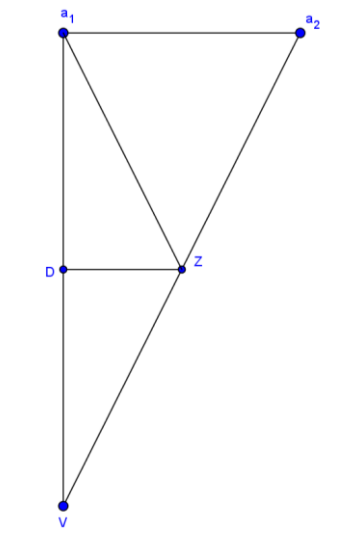
Esta cuña tipo H del polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , va a tener tres vértices: el vértice  $V$  y dos vértices consecutivos  $a_1$  y  $a_2$ , donde  $a_1$  y  $a_2$  son vértices convexos del polígono  $P$ .



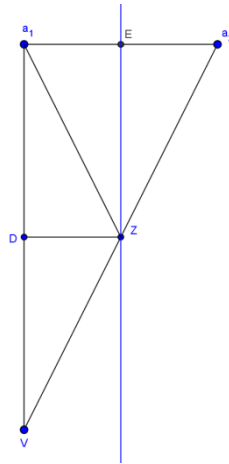
Vamos a usar los puntos medios de los lados consecutivos de  $V$  para dividir la cuña en triángulos, los cuales vamos a llamar  $D$  y  $Z$ .  $Z$  es el punto medio del lado  $\overline{Va_2}$  y  $D$  el punto medio del lado  $\overline{Va_1}$ .



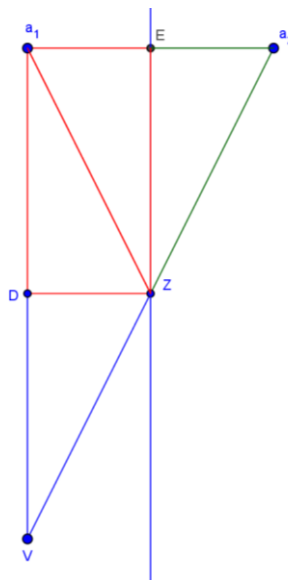
Tracemos el segmento  $\overline{DZ}$ , el cual es paralelo a  $\overline{a_1a_2}$  por la semejanza de los triángulos  $VDZ$  y  $Va_1a_2$ , y el segmento  $\overline{a_1Z}$ .



Tracemos una recta paralela a  $\overline{a_1D}$  que pase por  $Z$ . Ésta intersecta a  $\overline{a_1a_2}$  en su punto medio al cual llamaremos  $E$ .



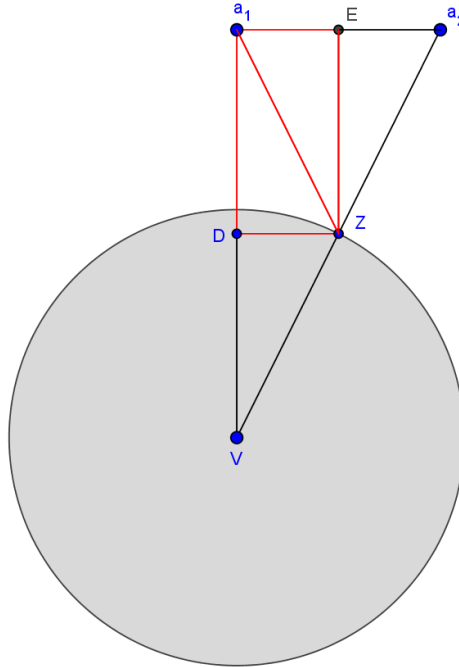
Se pueden formar el paralelogramo  $a_1DZE$ , el triángulo  $DZV$  y el triángulo  $ZEa_2$ .



Ya tenemos la cuña dividida en triángulos.

Consideremos un punto  $p$  de la cuña:

Si  $p$  está en el triángulo  $VDZ$ , éste será iluminado por  $V$  (cuyo alcance de iluminación es  $r/2$ ).  $\|VZ\| \leq r/2$  por Propiedad 2.5 y  $\|VD\| < r/2$  por Propiedad 2.7 y como el círculo es convexo, el triángulo  $VDZ$  va a estar incluido en el círculo de centro  $V$  y radio  $r/2$ , y por ende  $p$  va a pertenecer al círculo, con lo cual  $V$  ilumina a  $p$ .



Ahora nos queda demostrar que el resto de los triángulos de la cuña también quedan totalmente iluminados.

En el caso que  $p$  perteneciera al triángulo  $a_1EZ$ , o al triángulo  $a_1DZ$ , va ser iluminado por la luz que se encuentra en  $a_1$ , ya que:

$\|\overline{a_1z}\|$  es menor o igual a  $r/2$  por la Propiedad 2.5

$\|\overline{a_1D}\|$  es menor a  $r/2$  por la Propiedad 2.7

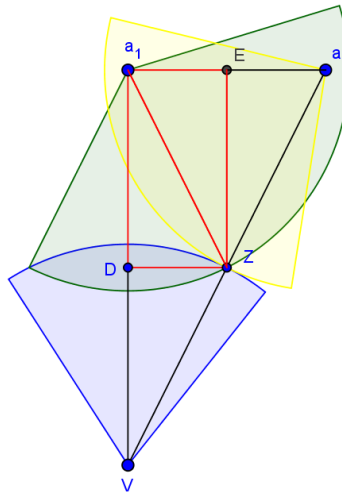
$\|\overline{a_1E}\|$  es menor a  $r/2$  por la Propiedad 2.8

Luego  $p$  está iluminado por la luz en  $a_1$ , por la convexidad del círculo.

Del mismo modo se puede ver que si el punto  $p$  pertenece al triángulo  $a_2EZ$  es iluminado completamente por la luz en  $a_2$ , ya que  $\|\overline{a_2E}\|$  es menor a  $r/2$  por Propiedad 2.8 y que  $\|\overline{a_2z}\|$  es menor o igual a  $r/2$  por Propiedad 2.5.

Tenemos a todos los triángulos auxiliares iluminados al colocar luces en los vértices  $V, a_1$  y  $a_2$ , con lo cual siempre podemos iluminar las cuñas tipo H colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices, en el caso de ser ésta un triángulo rectángulo.



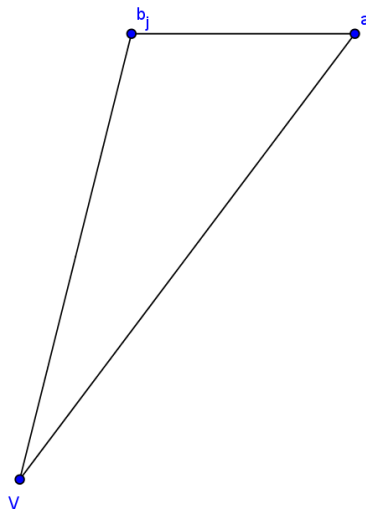


Se demostró que siempre podemos iluminar las cuñas que son triángulos rectángulos tipo H colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices.

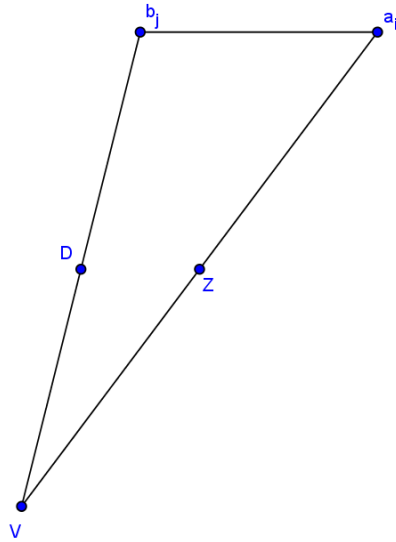
Cuando la cuña es un triángulo obtusángulo

La cuña tipo H de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  va a tener tres vértices: el vértice  $V$  y dos vértices consecutivos  $a_i$  y  $b_j$ , donde  $a_i$  es el vértice convexo del polígono  $P$  y  $b_j$  es el vértice cóncavo del polígono.

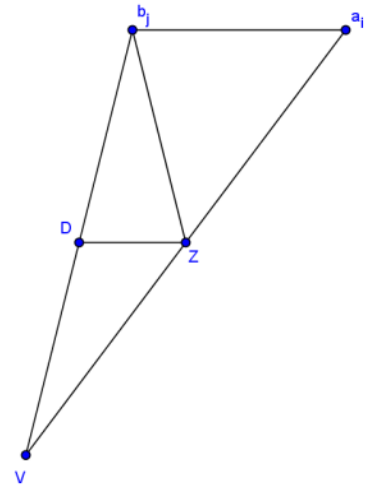
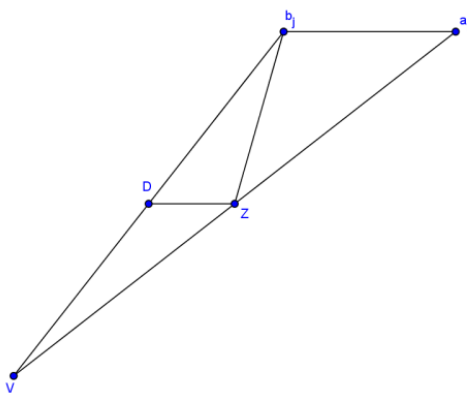
La demostración será análoga a la de la cuña tipo H que era un triángulo rectángulo.



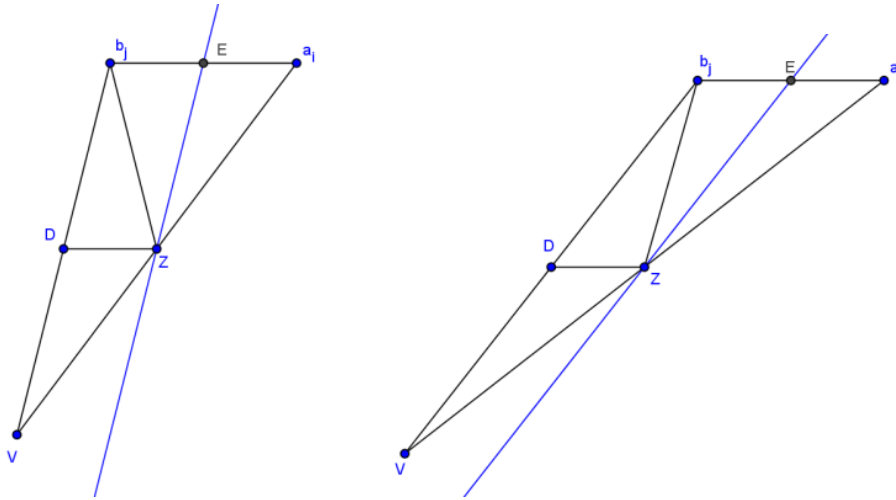
Para poder dividir la cuña en triángulos vamos a tener que usar los puntos medios de lados consecutivos de  $V$ , los cuales vamos a llamar  $D$  y  $Z$ .  $Z$  es el punto medio del lado  $\overline{Va_i}$  y  $D$  el punto medio del lado  $\overline{Vb_j}$ .



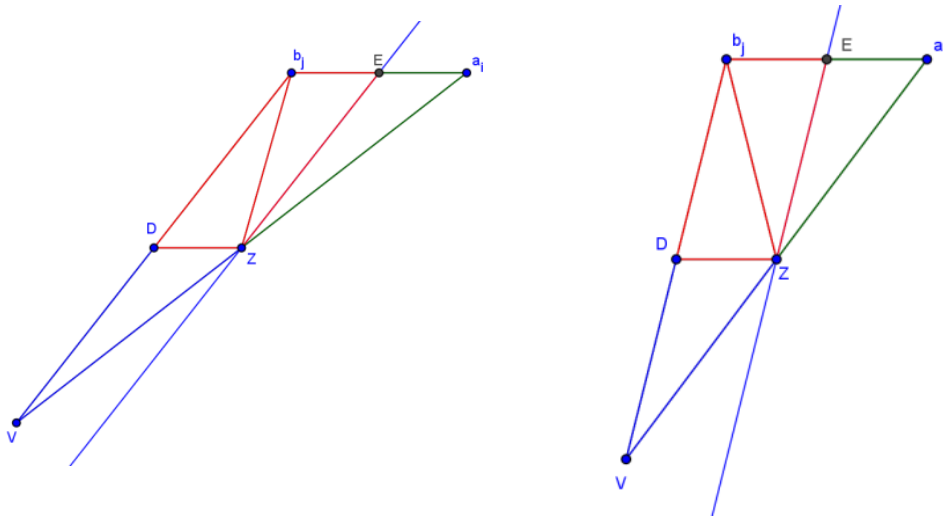
Tracemos el segmento  $\overline{DZ}$ , el cual es paralelo a  $\overline{b_ja_i}$ , por la semejanza de los triángulos  $Vb_ja_i$  y  $VDZ$ , y el segmento  $\overline{b_jZ}$



Tranzamos una recta paralela a  $\overline{b_jD}$  que pase por Z. Ésta interseca a  $\overline{b_ja_i}$  en su punto medio al cual llamaremos E, ya que  $a_iEZ$  y  $a_ib_jV$  son semejantes.



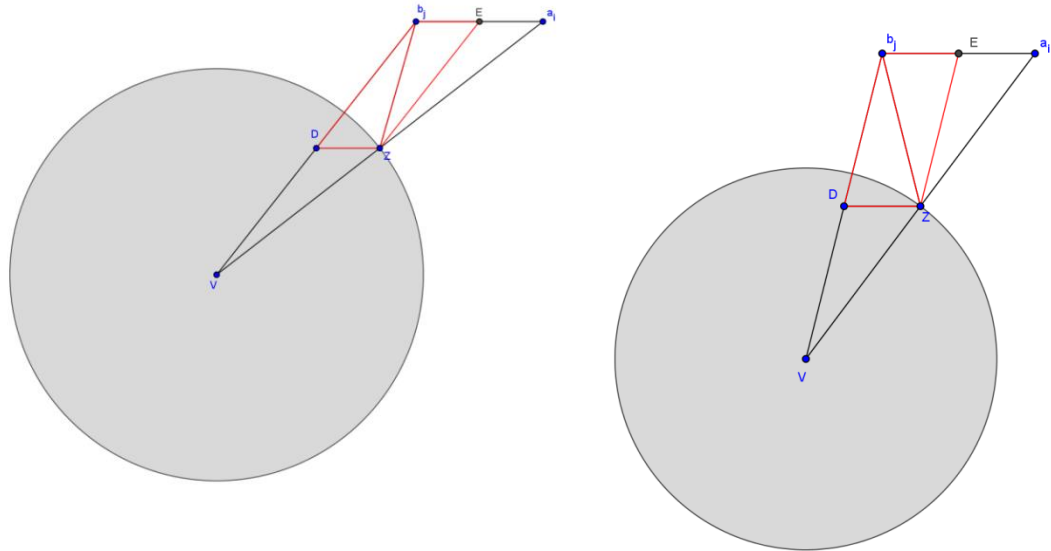
Se pueden formar el paralelogramo  $b_j D Z E$ , el triángulo  $D Z V$  y el triángulo  $Z E a_i$ .



Ya tenemos la cuña dividida en triángulos.

Consideremos un punto  $p$  de la cuña:

Si  $p$  está en el triángulo  $V D Z$ , éste será iluminado por la luz de  $V$ , cuyo alcance de iluminación es  $r/2$ , ya que  $\|\overline{VZ}\| \leq r/2$  por Propiedad 2.5 y  $\|\overline{VD}\| < r/2$  por Propiedad 2.6, con lo cual como el círculo es convexo, el triángulo  $V D Z$  va a estar incluido en el círculo de centro  $V$  y radio  $r/2$ , y por ende  $p$  va a pertenecer al círculo, con lo cual  $V$  ilumina a  $p$ .



Ahora nos queda demostrar que si  $p$  pertenece a alguno del resto de los triángulos de la cuña también quedará iluminado.

Si  $p$  pertenece al triángulo  $b_jEZ$  o  $b_jDZ$ , es iluminado al colocar una luz de alcance  $r/2$  en el vértice  $b_j$  porque:

$\|\overline{b_jZ}\|$  es menor a  $r/2$  por Propiedad 2.5

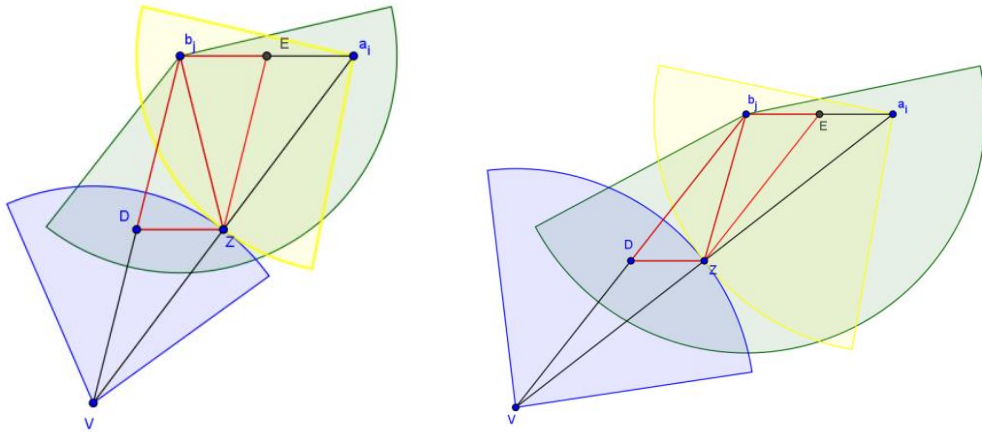
$\|\overline{b_jD}\|$  es menor a  $r/2$  por Propiedad 2.6

$\|\overline{b_jE}\|$  es menor a  $r/2$  por Propiedad 2.8

Luego  $p$  está iluminado por la luz en  $b_j$ , por la convexidad del círculo.

De modo similar, se puede ver que si el punto  $p$  pertenece al triángulo  $a_iEZ$  es iluminado por la luz en  $a_i$ , pues  $\|\overline{a_iE}\|$  es menor a  $r/2$  por propiedad 2.8 y  $\|\overline{a_iZ}\|$  es menor o igual a  $r/2$  por Propiedad 2.5.

Tenemos a todos los triángulos auxiliares nuevamente iluminados al colocar luces en los vértices  $V$ ,  $b_j$  y  $a_i$ , con lo cual siempre podemos iluminar las cuñas tipo H colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices.



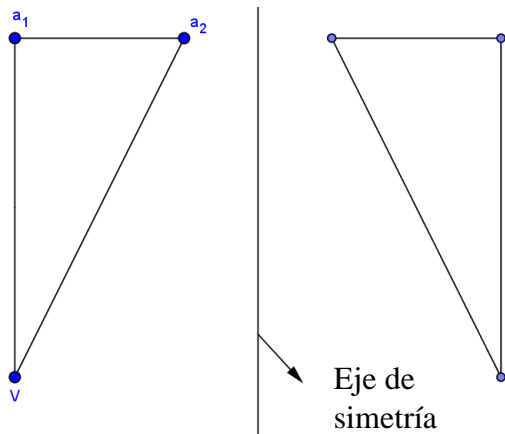
Se demostró que siempre podemos iluminar las cuñas tipo H colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices.

Como dijimos al principio, los mismos razonamientos valen para las cuñas tipo V, simplemente pensando en una simetría axial.

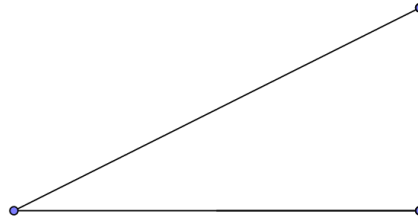
Veamos lo que acabamos de decir, primero en las cuñas que son triángulos rectángulos y luego en las que son triángulos obtusángulos.

Cuando la cuña es un triángulo rectángulo

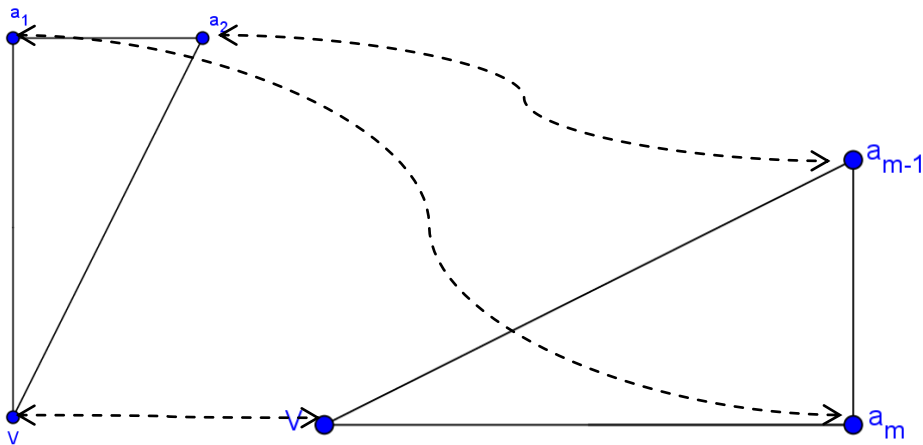
Primero hagamos una simetría axial con la cuña tipo H, tal como se muestra a continuación:



Luego al triángulo formado a través de la simetría vamos a rotarlo hasta lograr formar una cuña tipo V.

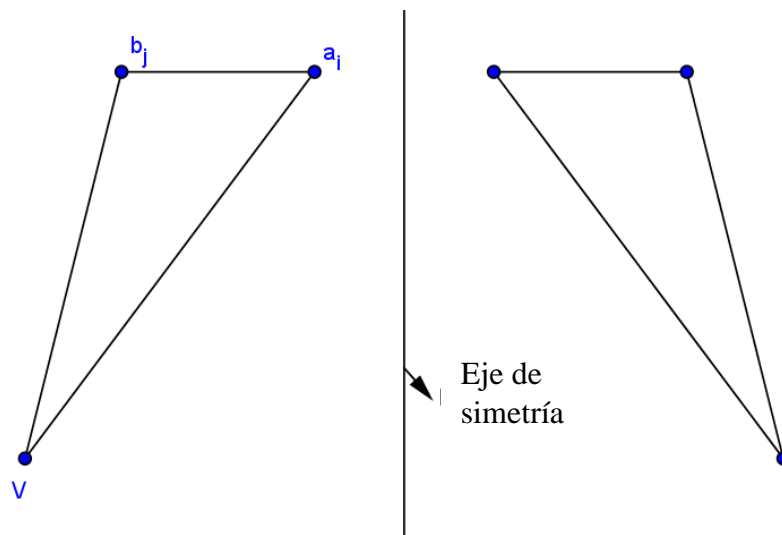


Para el caso de las cuñas tipo V que son triángulos rectángulos, se deberá usar  $a_m$  en lugar de  $a_1$  y  $a_{m-1}$  en lugar de  $a_2$  en cada demostración. V es el mismo.

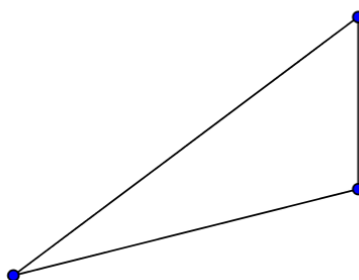


Cuando la cuña es un triángulo obtusángulo

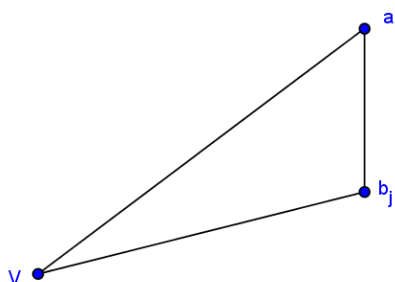
Para el caso de las cuñas que son triángulos obtusángulos hay que hacer también una simetría axial y una rotación para transformar la cuña tipo H en una tipo V.



Luego de la rotación, la figura final representa una cuña tipo V



Las demostraciones que se hicieron para las cuñas tipo H valen también para las cuñas tipo V, pero adaptando la demostración en este tipo de cuña.



Luego las Propiedades 2.5 a 2.9, y las Proposiciones 2.3 y 2.4 valen para cualquier cuña del polígono: sea tipo V o tipo H.

Vamos a concluir ahora que todo polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ , se ilumina colocando una luz de alcance  $r/2$  en cada vértice del mismo.

### Propiedad 2.10

Dado un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  con  $n$  vértices, si se colocan luces de alcance  $L = r/2$  en cada uno de sus vértices, entonces éste quedará totalmente iluminado.

#### Demostración:

Consideremos un punto  $p$  del polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ . Este punto va a pertenecer a alguna de las cuñas del polígono. Como  $P$  tiene luces en todos los vértices, la cuña tendrá entonces una luz en cada uno de sus vértices. Luego  $p$  está iluminado por Propiedad 2.9.

Como podemos iluminar cualquier polígono escalera colocando luces de alcance  $r/2$  en todos sus vértices, entonces también podemos iluminarlo con luces de mayor alcance. Por tal motivo  $L$  puede tomar valores del intervalo  $[r/2, +\infty)$ , tal como lo habíamos adelantado.

### Propiedad 2.11

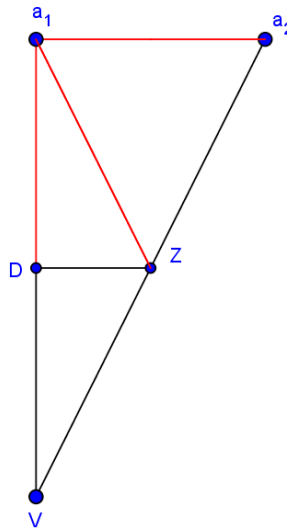
Las cuñas pueden ser iluminadas colocando una luz de alcance  $r/2$  en  $V$ , y otra en el vértice cóncavo (o recto, en el caso de que la cuña sea un triángulo rectángulo), siempre y cuando el lado horizontal, para las cuñas tipo H, o vertical, para las cuñas tipo V, del polígono sea menor o igual a  $r/2$ .

#### Demostración:

La demostración de la Propiedad 2.11 se va a hacer sobre una cuña tipo H, pero recordemos que también vale para las cuñas tipo V, ya que si a la cuña tipo H que vamos a analizar le aplicamos una simetría axial y la rotamos, la cuña que se forma es la misma que la tipo H, pero transformada en una tipo V. Con lo cual la demostración va a valer para esta última también.

#### Cuando la cuña es un triángulo rectángulo

Consideremos una cuña tipo H que sea un triángulo rectángulo. En ella construimos tres triángulos de vértices  $VZD$ ,  $a_1a_2Z$  y  $a_1DZ$ , siendo  $Z$  el punto medio de  $\overline{Va_2}$  y  $D$  el punto medio de  $\overline{Va_1}$  para poder analizarla.



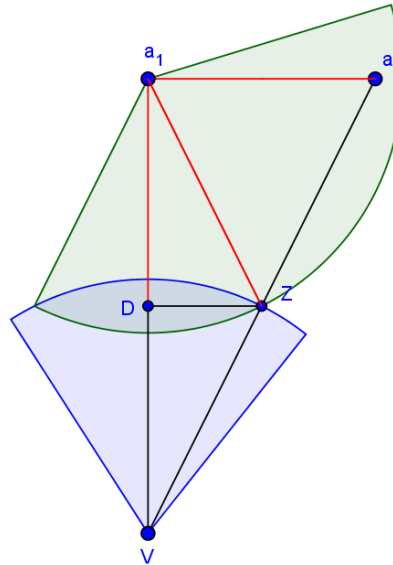
Para demostrar que podemos iluminar la cuña colocando dos luces de alcance  $r/2$ , una en  $V$  y otra en el vértice recto, primero vamos a afirmar que los segmentos  $\overline{a_1D}$ ,  $\overline{a_1Z}$  y  $\overline{a_1a_2}$  son menores o iguales a  $r/2$ . Luego aseguraremos que podemos iluminar los triángulos  $a_1a_2Z$  y  $a_1DZ$  colocando una luz en  $a_1$ . Y por último concluiremos que el triángulo  $VZD$  se puede iluminar colocando una luz en  $V$ .

Por Propiedad 2.7 sabemos que  $\|\overline{a_1D}\| < r/2$ . Por hipótesis  $\|\overline{a_1a_2}\| \leq r/2$ , y por la Propiedad 2.5  $\|\overline{a_1Z}\| \leq r/2$ . Luego los triángulos  $a_1a_2Z$  y  $a_1DZ$  quedan incluidos en el círculo de radio  $r/2$  y centro  $a_1$ , por la conexidad del círculo. En consecuencia, cualquier punto de ellos quedará iluminado al colocar una luz de alcance  $r/2$  en  $a_1$ .



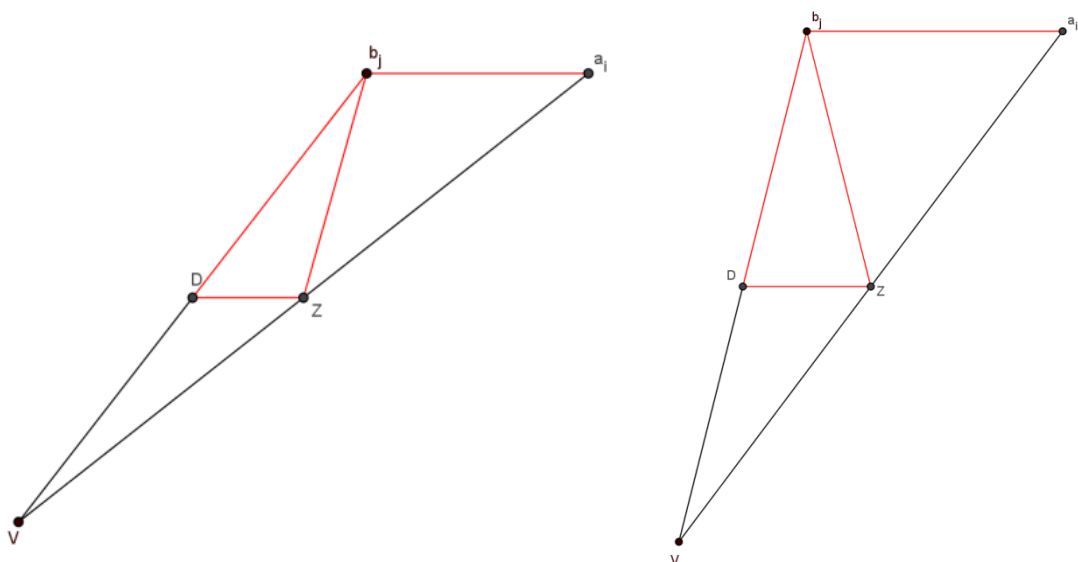
Por otro lado, el triángulo  $VZD$  queda totalmente iluminado por Propiedad 2.9.

Con lo cual se puede iluminar cualquier cuña tipo H en el caso de ser ésta un triángulo rectángulo colocando luces de alcance  $r/2$  en los vértices  $V$  y  $a_1$ , bajo las condiciones de la Propiedad 2.11.



Quando la cuña es un triángulo obtusángulo

Consideremos un triángulo obtusángulo tipo H, el cual puede formarse en cualquier polígono escalera. Dividámoslo en tres triángulos de vértices  $b_j a_i Z$ ,  $b_j Z D$  y  $V D Z$ , siendo  $Z$  el punto medio de  $V a_i$  y  $D$  el punto medio de  $V b_j$ .



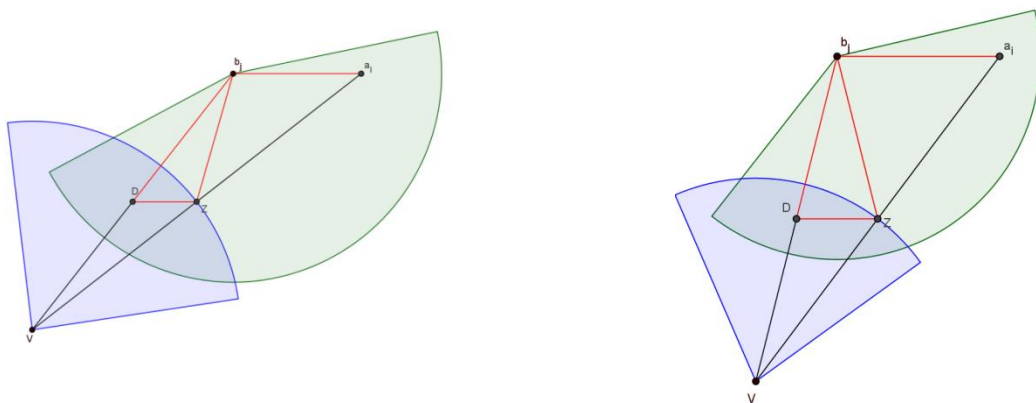
Para demostrar que podemos iluminar las cuñas colocando sólo dos luces de alcance  $r/2$ , una en  $V$  y otra en el vértice cóncavo  $b_j$ , primero afirmaremos que los segmentos

$\overline{b_j D}$ ,  $\overline{b_j a_i}$  y  $\overline{b_j z}$  son menores a  $r/2$ . Luego aseguraremos que podemos iluminar los triángulos  $b_j a_i z$  y  $b_j D z$  colocando una luz en  $b_j$ . Y por último concluiremos que el triángulo  $V z D$  se puede iluminar colocando una luz en  $V$ .

Por Propiedad 2.6 sabemos que  $\|\overline{b_j D}\| < r/2$ . Por hipótesis  $\|\overline{b_j a_i}\| \leq r/2$ , y por la Propiedad 2.5  $\|\overline{b_j z}\| < r/2$ . Luego los triángulos  $b_j a_i z$  y  $b_j D z$  quedan incluidos en el círculo de radio  $r/2$  y centro  $b_j$ . En consecuencia, cualquier punto de ellos quedará iluminado al colocar una luz de alcance  $r/2$  en  $b_j$ .

Por otro lado, el triángulo  $V z D$  queda totalmente iluminado por Propiedad 2.9.

Con lo cual se puede iluminar cualquier cuña tipo H colocando luces de alcance  $r/2$  en los vértices  $V$  y  $b_j$  bajo las condiciones de la Propiedad 2.11.



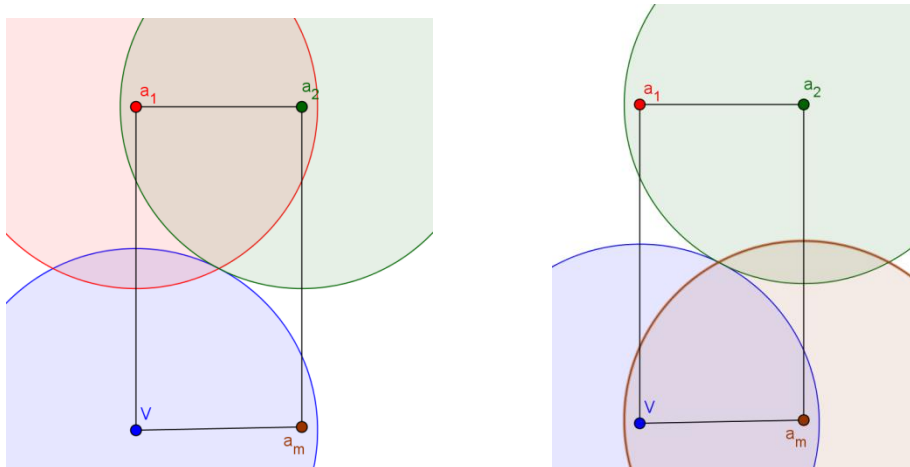
Se demostró que las cuñas tipo H pueden ser iluminadas colocando una luz de alcance  $r/2$  en  $V$ , y otra en el vértice cóncavo, o recto en el caso de que la cuña sea un triángulo rectángulo, siempre y cuando el lado horizontal de éstas sea menor o igual a  $r/2$ . Y como comentamos al principio de la demostración, esto también vale para las cuñas tipo V, con sólo aplicar una simetría axial y luego una rotación. Por lo tanto queda probada la Proposición 2.11.

### Lema 2.12

Los vértices  $V, a_1, a_m$  son necesarios en algunos casos para iluminar algún polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  con luces de alcance  $r/2$ .

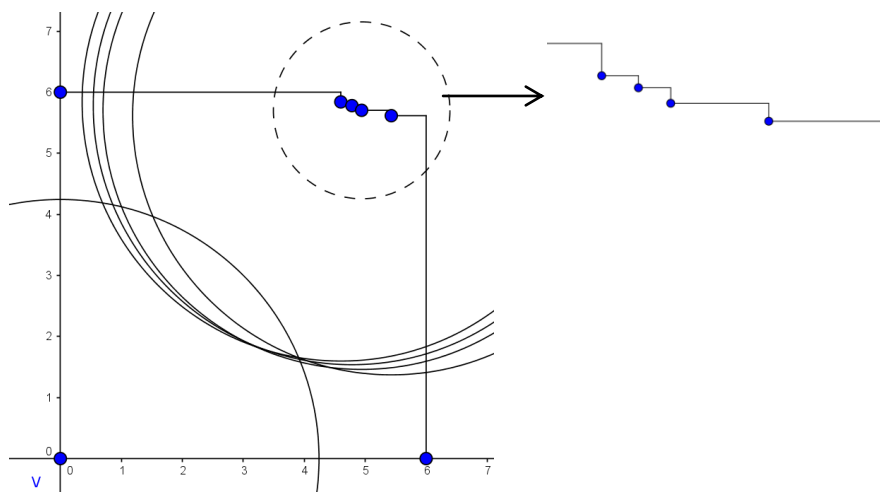
#### Demostración:

Vamos a proponer un rectángulo -Figura N° 4-. Para poder iluminarlo con luces de alcance  $r/2$  necesitamos colocar luces en los vértices  $V, a_1$  y  $a_m$ , ya que en otro caso el polígono no quedaría iluminado.



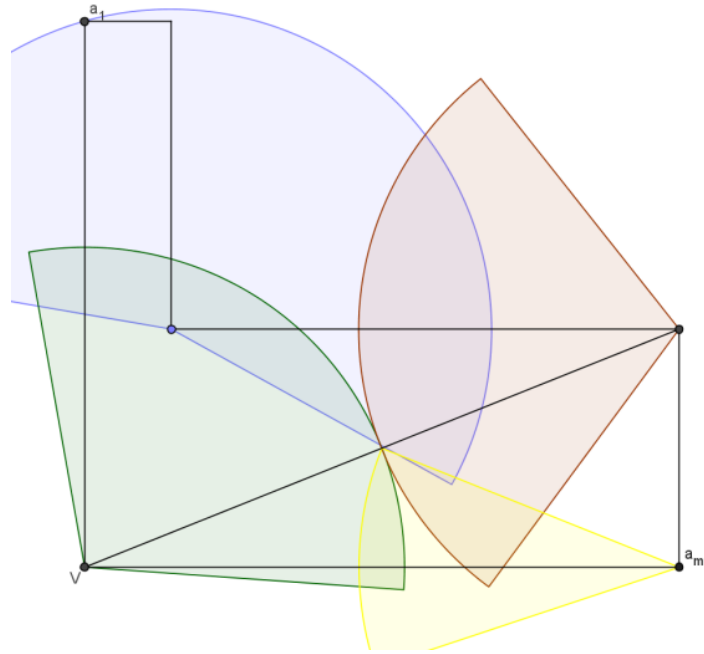
**Figura N°4**

Podemos encontrar una familia de polígonos que requieran considerar necesariamente luces en  $a_1$  y  $a_m$ . Podemos proponer la siguiente:



Esto muestra que existen polígonos de  $n$  vértices que precisan sí o sí luces en  $a_1$  y  $a_m$ . De otro modo no se podrían iluminar con luces de alcance  $L = r/2$ .

Simplemente como observación, el Lema dice que en algunos casos son necesarias luces en los vértices  $V, a_1$  y  $a_m$  para iluminar algún polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , y como se puede apreciar en la Figura N° 5, en el vértice  $a_1$  no hay necesidad de colocar una luz de alcance  $r/2$ , ya que el polígono  $P$  podrá iluminarse totalmente sin poner una luz en él.



**Figura N°5**

Determinamos el alcance  $L$  que pueden tomar las luces para poder iluminar a los polígonos escalera, y vimos que al colocarlas en todos los vértices del mismo, éste se iluminaba completamente. Pero luego mostramos que no es necesario poner todas esas luces. Eso permitió pensar en la existencia de algún tipo de cota que nos determinara la cantidad de luces necesarias para iluminar cualquier polígono escalera de  $n$  vértices, análisis que haremos en el siguiente Capítulo.

### Capítulo III

En este Capítulo daremos respuesta al problema principal de este trabajo, el cual consiste básicamente en estudiar el número mínimo de luces-vértice con alcance  $L$  necesarias para iluminar cualquier polígono escalera.

La pregunta principal sería: si consideremos un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices, radio  $r$  y luces con un alcance de iluminación  $L$ . ¿Cuál es el número mínimo de luces-vértice de alcance  $L$  necesarias para iluminar el polígono  $P$ ? Durante el recorrido del capítulo III esperamos dar una respuesta convincente.

#### Mínima cantidad de luces-vértice con alcance $L$ para iluminar polígonos escalera

La cantidad mínima de luces va a depender inevitablemente del alcance de iluminación  $L$ . Con esto queremos decir que no es lo mismo la cantidad de luces necesarias si el alcance es grande o chico. Veremos que si el alcance de iluminación  $L$  es suficientemente grande, cualquier polígono  $P$  se podrá iluminar con una sola luz. Así, si tomamos  $L \geq r$ , colocando una luz en el vértice  $V$  tendremos iluminado todo el polígono.

Pero si el alcance no llega a ser tan grande como  $r$ , esta cantidad de luces será necesariamente mayor y tal vez no sea necesario utilizar tantas luces-vértice como cantidad de vértices tenga el polígono, sino que una cantidad menor de luces podrían resultar suficientes.

#### Proposición 3.1

Sea  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  un polígono escalera de  $n$  vértices y radio  $r$ . Si  $L \geq r$ , entonces podemos iluminar todo el polígono colocando una luz en  $V$ .

En símbolos:

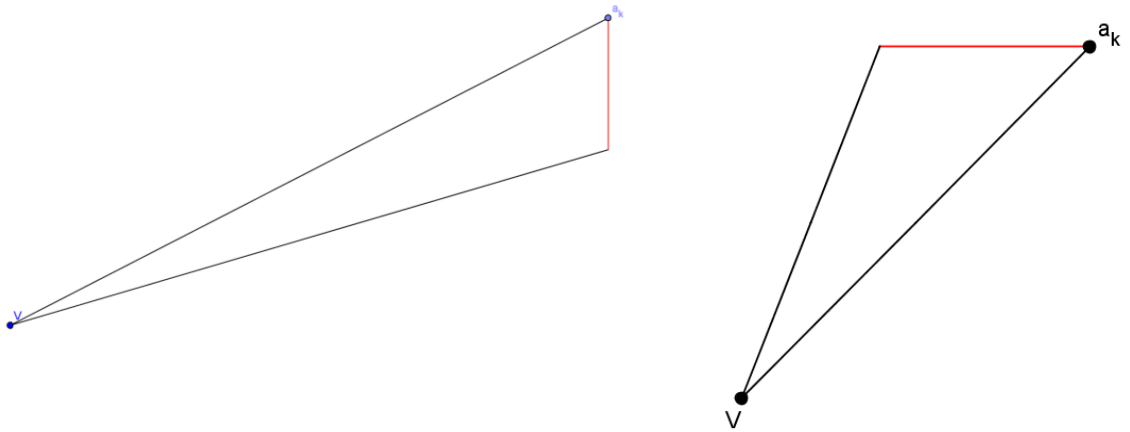
Si  $r$  es el radio de un polígono  $P(V, a_1, \dots, a_m) \Rightarrow \forall x \in P: d(V, x) \leq r$  y  $[V, x] \subset P$ .

#### Demostración:

La demostración se va completar por el contrarrecíproco. Consideraremos un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices y un punto  $x$  de él.  $[V, x] \subset P$ , ya que  $V$  pertenece al mirador de  $P$ , lo que veremos es que si  $\exists x \in P$  tq  $d(V, x) > r$ , entonces  $r$  no es el radio del polígono  $P$ .

Sea  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  un polígono escalera. Supongamos que existe un punto  $x \in P$  que no se puede iluminar desde el vértice  $V$  con una luz de alcance de iluminación  $r$ . Es decir que  $d(V, x) > r$ .

Como  $x$  es un punto del polígono  $P$ , entonces  $x$  pertenece a una cuña tipo  $V$  o a una tipo  $H$ . Como existe un polígono escalera, entonces existe un  $k$  tal que  $\overline{Va_k}$  es el radio del polígono, donde  $a_k$  será vértice del lado vertical de la cuña si ésta es de tipo  $V$ , o vértice del lado horizontal de la cuña si ésta es de tipo  $H$ ,

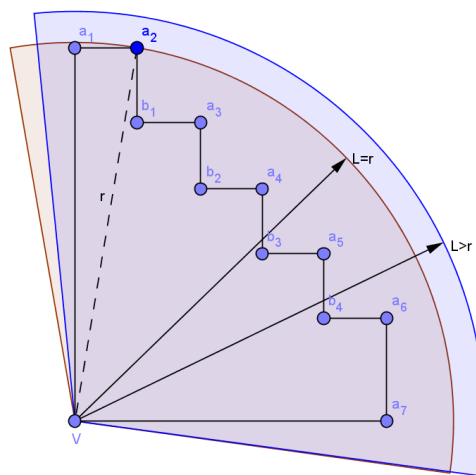


Luego, por ser  $\overline{Va_k}$  el lado de la cuña de mayor longitud,  $d(V, a_k) \geq d(V, x)$ . Como  $x$  no es visto por la luz ubicada en  $V$ , ocurre:  $d(V, x) > r$ .

En consecuencia:  $r = d(V, a_k) \geq d(V, x) > r$

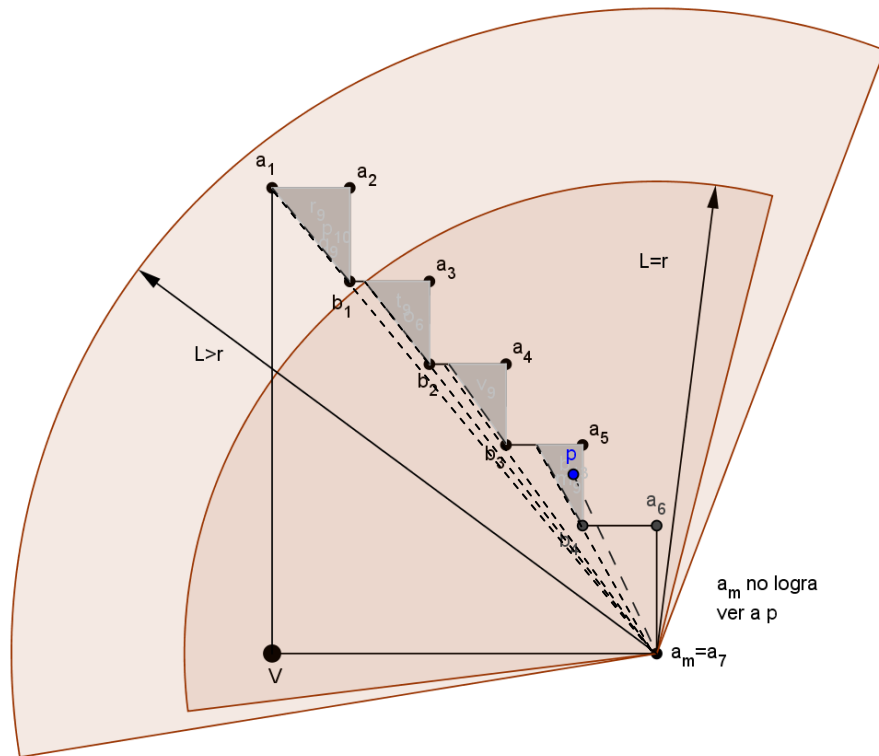
Concluimos que  $r=L$  no es el radio, ya que el radio se define como  $\max_{i \in \{1, \dots, m\}} d(V, a_i)$  que es lo que queremos ver.

Demostramos con el contrarrecíproco que si  $L \geq r$  entonces podemos iluminar todo el polígono escalera  $P$  colocando sólo una luz en  $V$ . Por lo tanto queda demostrada la Proposición 3.1.



### Observación 3.2

Si ponemos la luz en cualquier otro vértice de  $P$  que no sea  $V$ , el polígono puede que no quede totalmente iluminado, a pesar de que  $L$  sea mayor que  $r$ .



Cualquier punto en las zonas grises no estará iluminado, ya que desde  $a_m$  no se los logra ver. Como se puede Observar en el ejemplo, el punto  $p$  no se ve porque se encuentra dentro de una zona donde cualquier punto que tomemos, el segmento que lo une con  $a_m$  nunca estará completamente incluido en  $P$ , sin importar que tan grande sea el alcance de iluminación.

Más minucioso debe ser el análisis en el caso que el alcance de la luz no permita iluminar todo el polígono. Es por eso que analizaremos qué es lo que ocurre cuando el alcance es menor que el radio del polígono escalera.

### Cantidad de luces necesarias si $L \in [L_{\min}, r)$

Vimos en la Propiedad 3.1 que todo polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  con  $n$  vértices, se puede iluminar con una sola luz de alcance mayor o igual a  $r$ . Pero si disminuimos una cantidad pequeña al alcance de  $L = r$  ¿Cuántas luces se necesitarán?

### Cantidad de luces vértice necesarias con alcance $L = r - \varepsilon$

Vamos a analizar una propiedad y un lema en el cual estudiaremos qué ocurre cuando las luces que situamos en los vértices cóncavos de un polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  son de alcance menor a  $r$ , pero muy próximo a este valor: es decir cuando  $L = r - \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  positivo y tan pequeño como se quiera.

Es claro que la respuesta a esta situación dependerá de las características del polígono escalera; en particular de la cantidad de vértices que éste tenga. Algunas de las relaciones generales de los vértices de polígonos escalera, las detallaremos a continuación:

### **Proposición 3.3**

En cualquier polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices, donde  $f$  son vértices cóncavos, se cumple que  $n = 2f + 4$ .

#### Demostración:

Si  $c$  es el número de vértices convexos de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , cuyo ángulo interior mide  $\frac{\pi}{2}$ ,  $f$  es el número de vértices cóncavos, cuyos ángulos interiores miden  $\frac{3}{2}\pi$  y  $n$  es la cantidad de vértices totales de  $P$ , entonces  $n = c + f$  (1), pues los polígonos ortogonales sólo tienen vértices de estas medidas. La suma de los ángulos internos de cualquier polígono escalera, es  $\pi(n - 2)$ , y puesto que el ángulo de cada vértice cóncavo es  $\frac{3}{2}\pi$  y de cada convexo es  $\frac{\pi}{2}$ , podemos decir que:

$$\pi(n - 2) = c \frac{\pi}{2} + f \frac{3\pi}{2}$$

Multiplicando por  $\frac{2}{\pi}$  miembro a miembro y despejando  $c$ , resulta:

$$c = 2n - 4 - 3f$$

Sustituyendo  $c$  en la expresión (1), nos queda:

$$n = 2n - 4 - 3f + f$$

Y se obtiene, despejando  $n$ :

$$n = 2f + 4.$$

### **Corolario 3.4**

El número de vértices cóncavos  $f$  de cualquier polígono escalera de  $n$  vértices es  $f = \binom{n}{2} - 2$



Demostración:

Sabemos por Proposición 3.3 que  $n = 2f + 4$ . Despejando  $f$  obtenemos el número de vértices cóncavos de cualquier polígono ortogonal:

$$\frac{n}{2} - 2 = f$$

A continuación estudiaremos la propiedad y el lema que habíamos comentado. Lo que haremos será proponer una cota que determinará la cantidad de luces de alcance  $L = r - \varepsilon$ , necesarias para poder iluminar completamente a algún polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$ , siempre y cuando  $\varepsilon$  sea suficientemente pequeño y tanto como se quiera.

Recordemos la definición de lo que es un peldaño, concepto que vamos a utilizar de aquí en adelante.

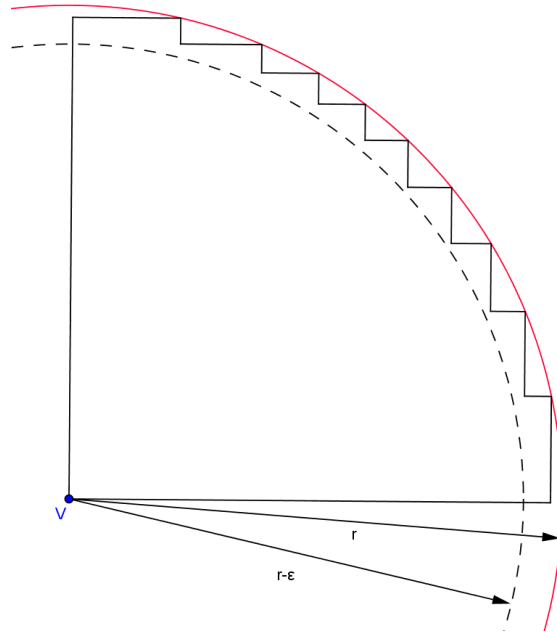
Peldaño: Un peldaño es un triángulo rectángulo formado por dos vértices cóncavos consecutivos y un vértice convexo de un polígono escalera, salvo el primero y el último peldaño del polígono, los cuales están formados por dos vértices convexos consecutivos y un vértice cóncavo (el triángulo  $a_1, a_2, b_1$  y el triángulo  $b_{m-3}, a_m, a_{m-1}$ ). La hipotenusa de dicho triángulo rectángulo es el segmento que une los dos vértices cóncavos, o bien el segmento  $[a_1, b_1]$  y  $[b_{m-3}, a_m]$  cuando el peldaño es el primero y el último del polígono.

**Propiedad 3.5**

Si  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño, y  $L = r - \varepsilon$ , entonces existe un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices y radio  $r$  que necesita al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces de alcance  $L$  para ser iluminado.

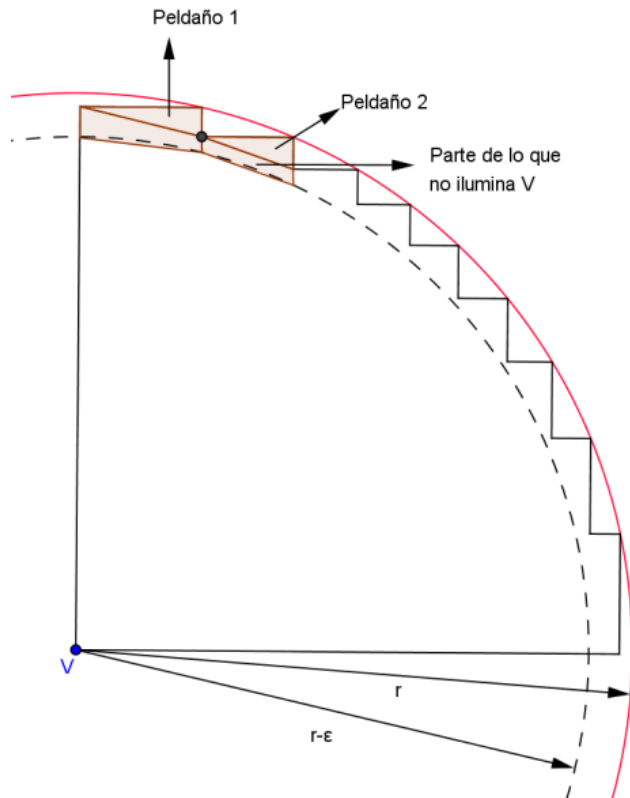
Demostración:

Consideremos un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  donde todos los vértices convexos de  $P$ ,  $a_i$ , con  $i = 2, \dots, m - 1$ , se encuentran a una distancia  $r$  de  $V$ . Además, todos los vértices cóncavos, el vértice  $a_1$  y el  $a_m$ , se encuentran a una distancia mayor a  $L - \varepsilon$ . Ninguna luz de alcance  $L - \varepsilon$  ubicada en cualquier vértice (salvo en  $V$ ) iluminará  $V$ . Por lo tanto, si se quiere iluminar  $P$ , en  $V$  se debe colocar una luz de alcance  $r - \varepsilon$ . Un ejemplo puede ser el de la Figura 6.



**Figura N°6**

El polígono se construye ubicando todos los  $b_j$  a una distancia mayor a  $r - \varepsilon$  de  $V$  y menor que  $r$ . Se puede observar que desde  $V$  no se ilumina completamente ninguna cuña si  $L = r - \varepsilon$ . Desde cada vértice cóncavo se pueden iluminar los peldaños adyacentes que se forman a partir de éste y la parte que no logra iluminar  $V$ . Por lo tanto, necesitamos colocar, como mínimo, luces en los vértices cóncavos alternadamente, y de esta manera lograremos iluminar todo el polígono.



Todo polígono escalera puede tener un número par o impar de vértices cóncavos.

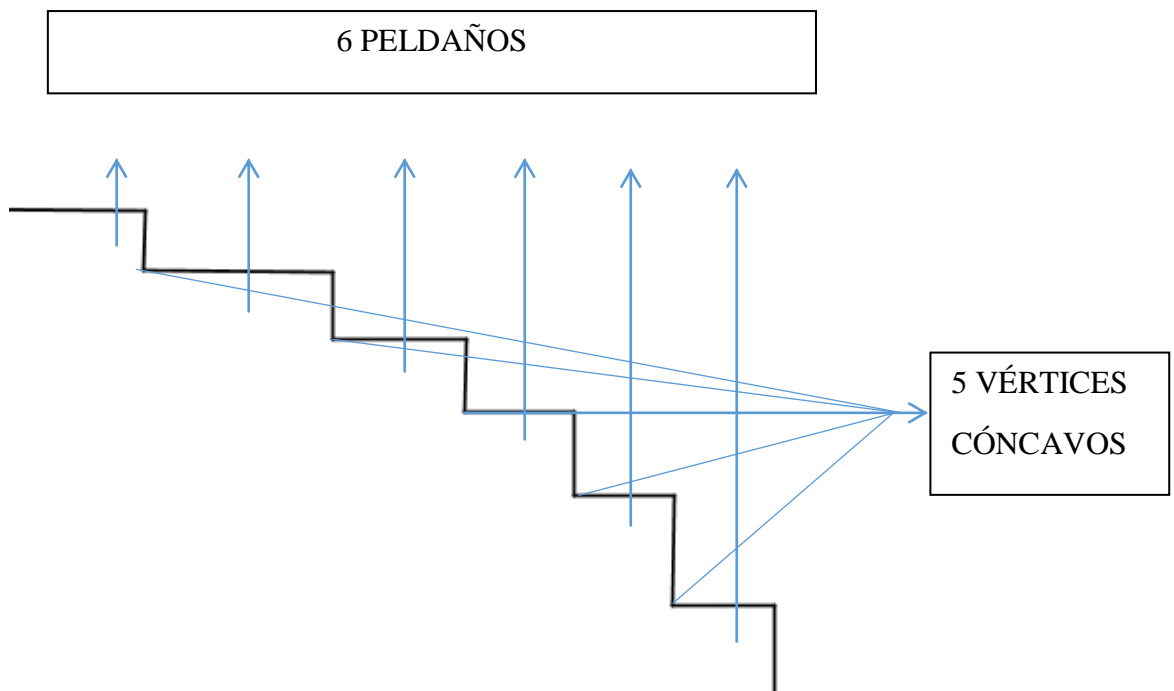
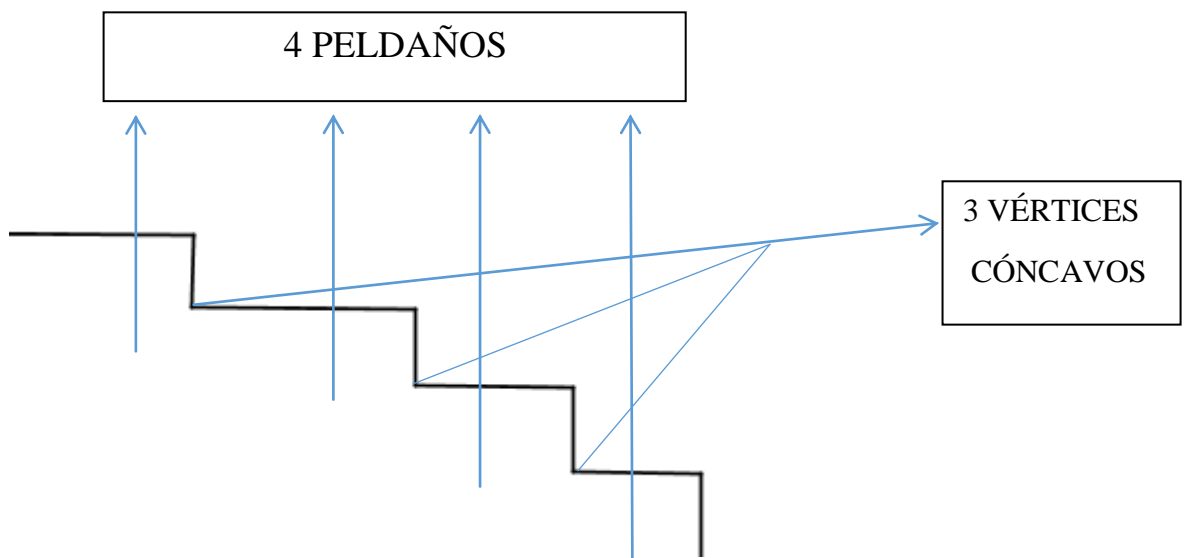
Separaremos en dos casos a estos polígonos escalera:

- Caso 1: el número de vértices cóncavos del polígono escalera es impar
- Caso 2: el número de vértices cóncavos del polígono escalera es par

Vamos a demostrar que para ambos casos el número de luces necesarias para poder iluminar  $P$  es  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$ .

#### Caso 1: el número de vértices cóncavos del polígono escalera es impar

Si el número de vértices cóncavos  $f$  es impar, entonces el polígono va a tener un número de peldaños pares. Más precisamente, el número de peldaños es  $f + 1$ . (3 vértices cóncavos 4 peldaños, 5 vértices cóncavos 6 peldaños,...).



Como cada luz colocada en un vértice cóncavo ilumina los dos peldaños adyacentes a él y la parte que no ilumina la luz de  $V$ , el número de luces necesarias será igual a la mitad del número de peldaños que tiene el polígono, las cuales deben colocarse en los vértices cóncavos en forma alternada: es decir en todos los  $b_j$  con  $j$  impar.

Por Corolario 3.4, el número de vértices cóncavos que tiene un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  es  $(n/2) - 2$ , entonces el número de peldaños del polígono en estudio es  $n/2 - 2 + 1$ . Las luces necesarias para iluminar todos los peldaños y lo que

no logra iluminar V es igual a la mitad del número de peldaños que tiene el polígono, es decir:

$$\frac{1}{2}(n/2 - 2 + 1) = \left(n/4 - \frac{1}{2}\right)$$

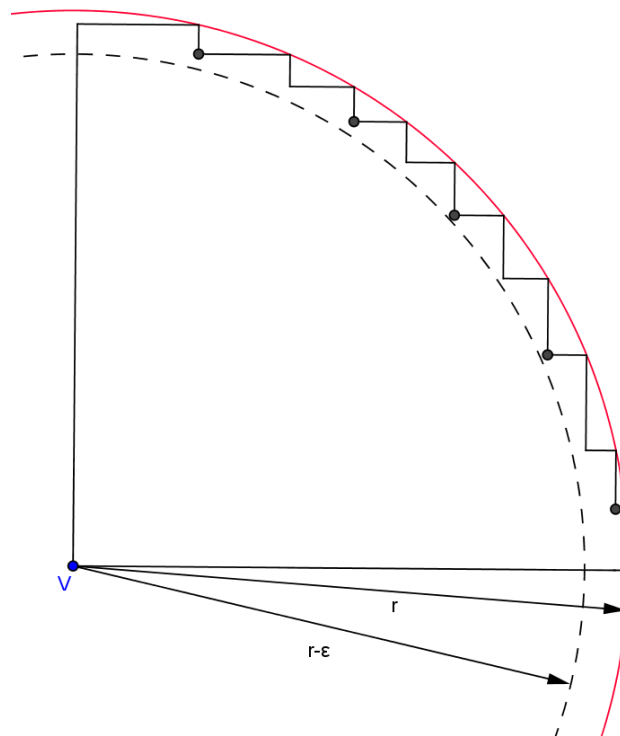
$\left(n/4 - \frac{1}{2}\right)$  es un número entero, con lo cual, solo por ser entero resulta que:

$\left(n/4 - \frac{1}{2}\right) = \lfloor n/4 \rfloor$ . Esto significa que  $\left(n/4 - \frac{1}{2}\right)$ , por resultar un número entero, coincide con la parte entera de  $\lfloor n/4 \rfloor$ .

En consecuencia,  $\lfloor n/4 \rfloor$  luces iluminan todos los peldaños y lo que no ilumina V, por lo tanto sólo falta una luz en V. De esta manera, el número de luces de alcance  $L = r - \varepsilon$  que se necesitan para iluminar todo el polígono escalera propuesto resulta ser:

$$\lfloor n/4 \rfloor + 1$$

Donde el 1 corresponde justamente a la luz que debe colocarse el vértice V

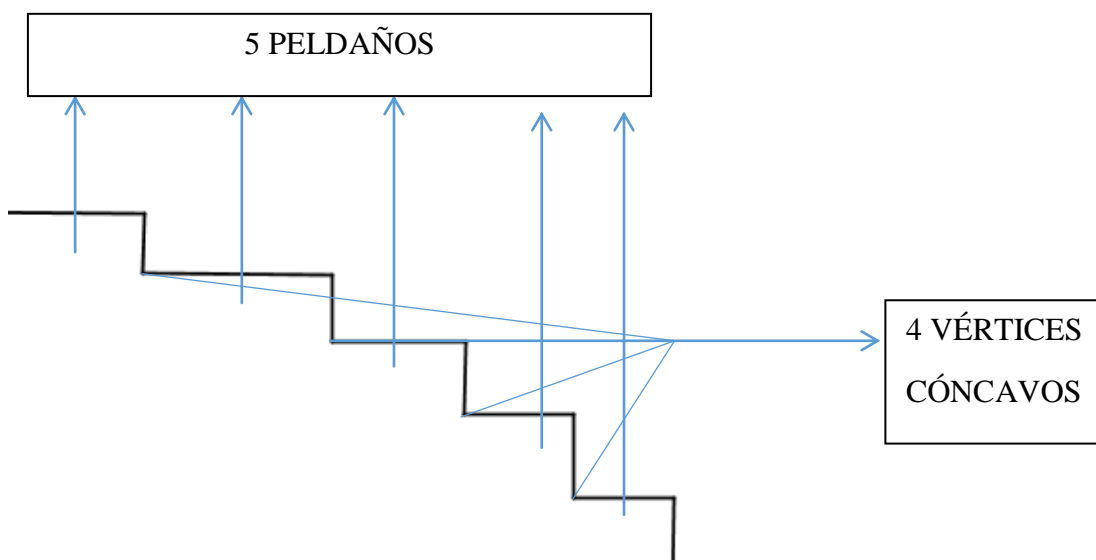
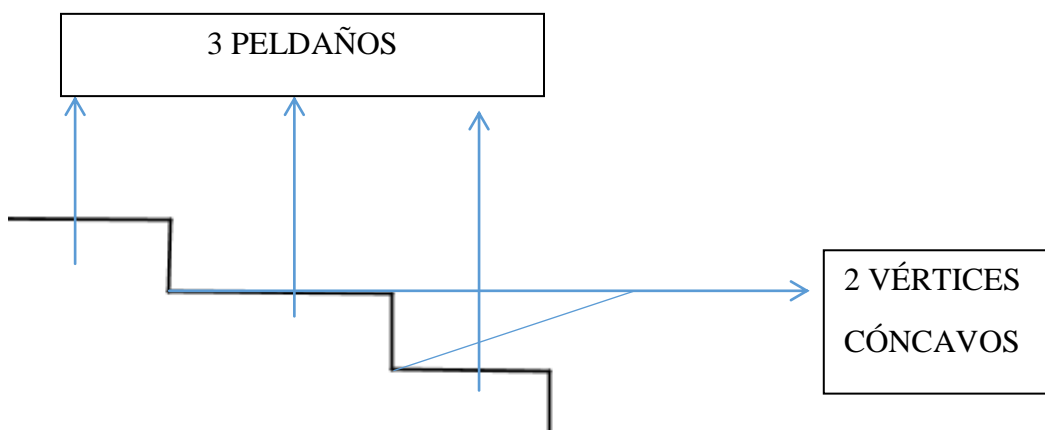


En el ejemplo  $n = 22$ , con lo cual  $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor 22/4 \rfloor = \lfloor 5,5 \rfloor = 5$ , y tal como se dijo, la cantidad de luces para poder iluminarlo es  $\lfloor n/4 \rfloor + 1 = 6$ .

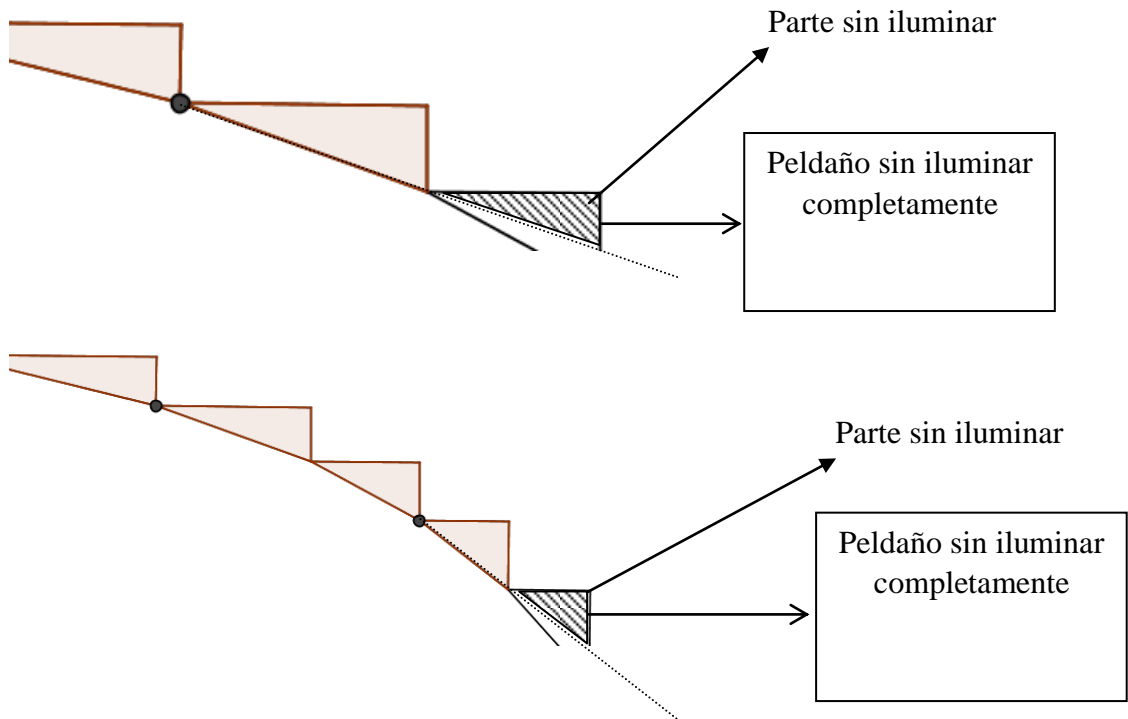
Caso 2: el número de vértices cóncavos del polígono escalera es par

Veamos ahora que si el número de vértices cóncavos es par, entonces vamos a poder iluminar al polígono con  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces.

Si el número de vértices cóncavos  $f$  es par, entonces el polígono va a tener un número de peldaños impares, que es nuevamente  $f+1$  (2 vértices cóncavos 3 peldaños, 4 vértices cóncavos 5 peldaños,...).



Como se dijo anteriormente, cada vértice cóncavo ilumina completamente los dos peldaños adyacentes a él y parte de lo que no ilumina V. Por lo tanto, con una cantidad de luces igual a la mitad de los vértices cóncavos,  $\frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} - 2 \right)$ , colocadas en forma alternada vamos a poder iluminar todos los peldaños, salvo a uno. Es decir, que si por ejemplo se ubican luces en todos los vértices  $b_j$ , con  $j$  impar, resulta que por tener una cantidad de vértices cóncavos par, el vértice  $b_f$  no tiene luz, por ser  $f$  par. Por lo tanto, el último peldaño  $(b_f, a_{m-1}, a_m)$  queda sin iluminar completamente. Para no confundir las, vamos a aclarar que  $b_f$  vendría a ser  $b_{m-3}$ .



Para poder iluminar completamente todos los peldaños del polígono escalera propuesto, necesitamos colocar una luz más en el vértice necesario para completar la iluminación de todos los peldaños. Ahora bien: el número de luces necesarias para poder iluminar todos los peldaños será:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} - 2 \right) + 1,$$

representando el 1 que sumamos aquél que mencionamos que debíamos agregar.

Operando, resulta:

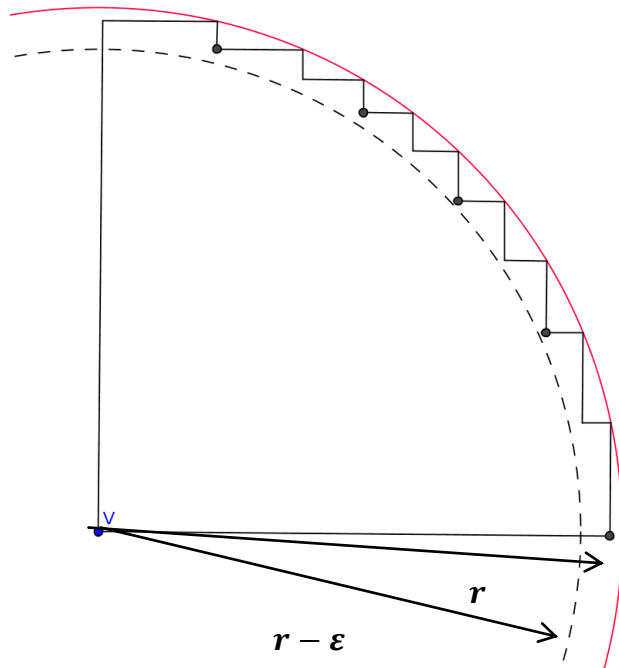
$$\frac{1}{2} \left( \frac{n}{2} - 2 \right) + 1 = \frac{n}{4} - 1 + 1 = \frac{n}{4}$$

En este caso, resulta que  $n/4$  es un número entero. Por lo tanto  $n/4$  es justamente  $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ .

Para este caso no sería necesario considerar la parte entera porque cuando el número de cóncavos es par, el número de vértices  $n$  de todo el polígono con cantidad par de vértices cóncavos resulta ser múltiplo de cuatro, con lo cual  $n/4$  siempre va a ser un número entero. Pero lo vamos a utilizar de todos modos para que la cota que quede sea una conclusión generalizada.

Para que el polígono quede íntegramente iluminado, falta colocar una luz en V. Con esto concluimos que el número de luces necesarias será para este caso nuevamente

$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$ , donde el 1 que en esta ocasión sumamos corresponde a la luz que debe colocarse en  $V$ .



En el ejemplo  $n = 20$ , con lo cual  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor = \lfloor \frac{20}{4} \rfloor = 5$ , y tal como se dijo, la cantidad de luces para poder iluminarlo es  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 = 6$ .

Tal como se quería probar, existen polígonos escalera, con las características mencionadas en la Propiedad 3.5, que necesitan al menos  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$  luces de alcance  $L = r - \epsilon$  para ser iluminados.

Pero esta última propiedad es débil, es decir, que pueden existir polígonos escalera bajo sus condiciones que necesiten más luces para poder iluminarlos. Tal como se mostrará en el siguiente Lema.

**Lema 3.6**

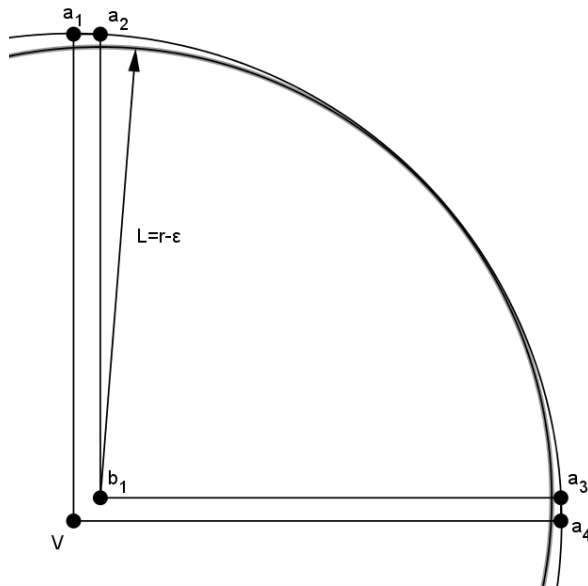
Si  $\epsilon$  es suficientemente pequeño,  $n \geq 6$  y  $L = r - \epsilon$ , entonces existe un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices que necesita al menos  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2$  luces de alcance  $L$  para ser iluminado.

El Lema considera polígonos con vértices mayores o iguales a 6, dado a que cualquier polígono con cuatro vértices (cuadrados o rectángulos) se pueden iluminar con 2 luces de alcance  $L = r - \epsilon$ , es decir con  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1$  luces. Si bien la cota  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2$  funciona para éste tipo de polígonos, se estaría usando una luz demás sin necesidad.



Demostración:

Consideremos el polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de la Figura N° 7

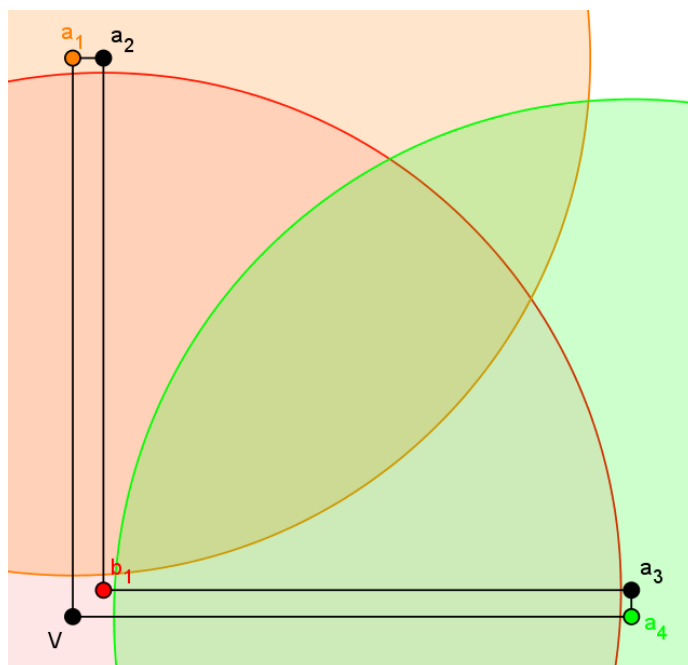


**Figura N°7**

Se consideró que dado el  $\varepsilon$ , se puede construir un polígono de tal manera que la medida del segmento  $\overline{Vb_1}$  sea suficientemente menor a  $\varepsilon$ , de forma tal que nos podamos construir los segmentos  $\overline{b_1a_1}$  y  $\overline{b_1a_4}$  con medidas mayores a  $r - \varepsilon$ , tal como se puede apreciar en la Figura 7. Y así poder construir un polígono escalera que necesite al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$  luces de alcance  $L = r - \varepsilon$ .

Como el polígono tiene 6 vértices, entonces  $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor 6/4 \rfloor = 1$ , por lo tanto

$\lfloor n/4 \rfloor + 2 = 1 + 2 = 3$ . Cantidad de luces necesarias para iluminar completamente al polígono.



**Figura N°7**

Hemos visto entonces que con  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$  o  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces vértice de alcance  $L = r - \varepsilon$  se pueden iluminar completamente ciertos polígonos escalera.

**Cantidad de luces vértice necesarias con alcance  $L = r/2$**

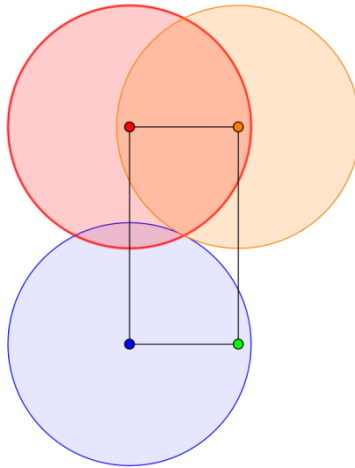
Ya sabemos por Propiedad 2.10 que podemos iluminar cualquier polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  y  $n$  vértices con  $n$  luces-vértice de alcance  $r/2$ . Sin embargo, esa cota puede no ser la mínima. Podemos preguntarnos ahora por el número de luces necesarias para iluminar polígonos escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices y radio  $r$ , cuando el alcance de iluminación es  $L = r/2$ .

**Observación 3.7**

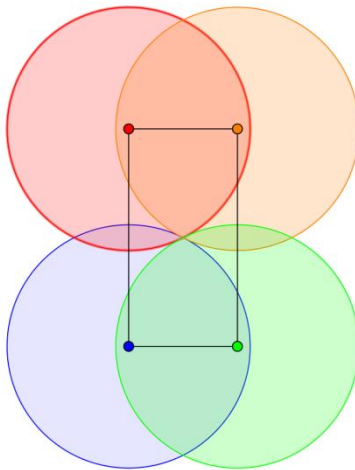
En particular, el rectángulo va a necesitar  $n$  luces-vértice de alcance  $r/2$ .

Si tenemos un rectángulo cualquiera y lo queremos iluminar colocando luces de alcance  $r/2$ , entonces vamos a necesitar como mínimo cuatro luces.

En la siguiente Figura vemos que no se lo puede iluminar con 3 luces de alcance  $r/2$ .



Pero si se logra iluminar completamente con 4



Como el rectángulo tiene 4 vértices, entonces necesitaremos  $n$  luces de alcance  $r/2$  para poder iluminarlo completamente. Pero esta situación nos podría condicionar una generalización de una cota menor a  $n$ .

### Propiedad 3.8

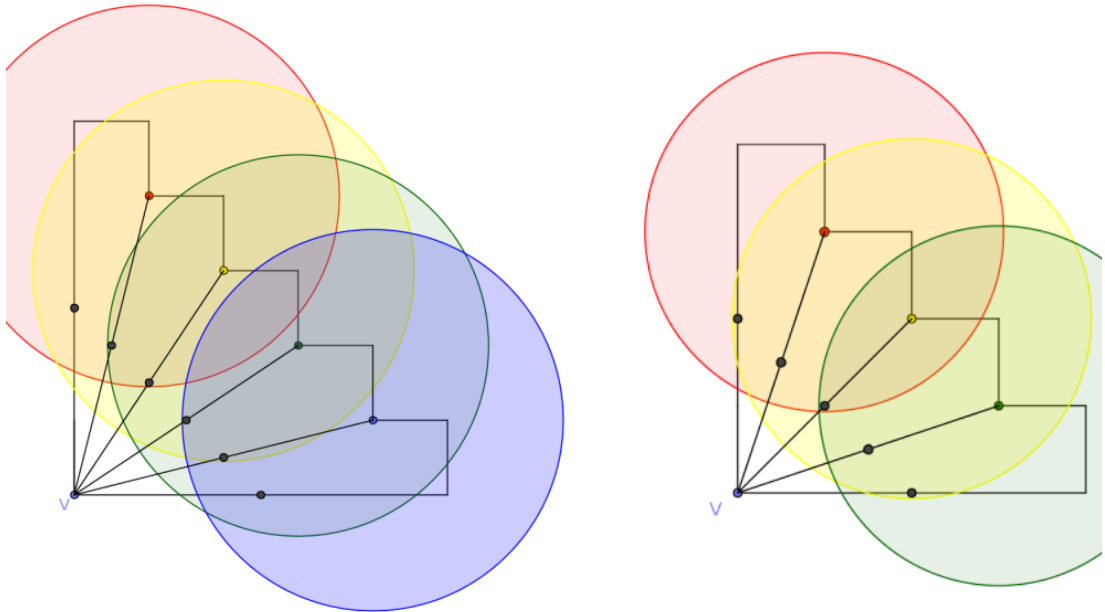
Si  $L = r/2$  y  $n \geq 8$ , entonces existe un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices y radio  $r$  que necesitan al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces de alcance  $L$  para ser iluminado.

#### Demostración:

Consideremos la Figura N° 8. Allí se presentan dos ejemplos de polígonos escalera: uno con vértices cóncavos pares y otro con vértices cóncavos impares. Los polígonos se construyeron de forma tal que cada vértice cóncavo ilumine el punto medio del segmento formado entre éste y  $V$ , además de los puntos medios de los segmentos formados por  $V$  y sus vértices cóncavos consecutivos. Con estas condiciones resulta que

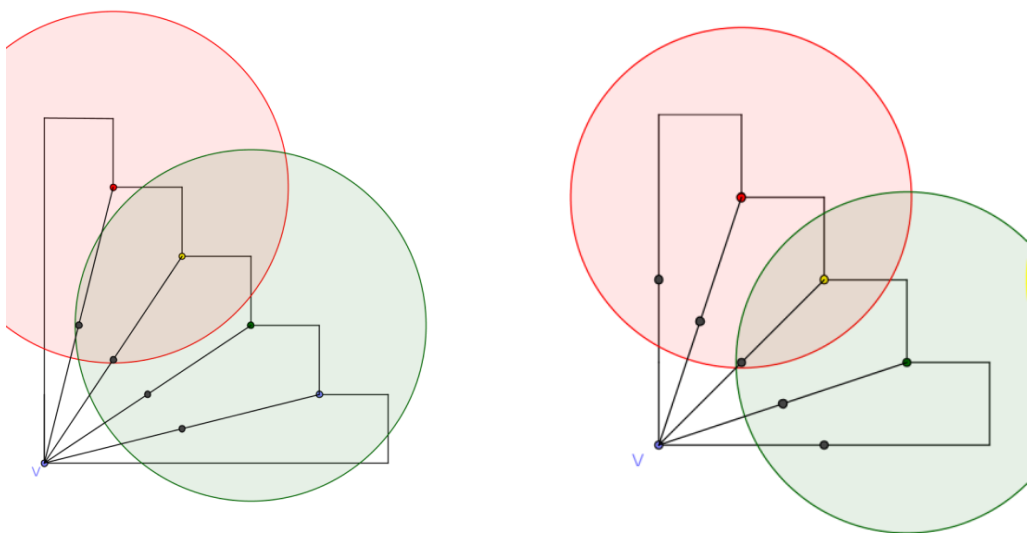
tanto el primero como el último vértice cóncavo ( $b_1$  y  $b_{m-3}$ ) van a iluminar el punto medio del lado vertical V y el punto medio del lado horizontal H de P, además del punto medio del segmento formado por V y su vértice cóncavo consecutivo.

Consideraremos también que la distancia entre dos vértices cóncavos consecutivos es menor a  $r/2$ . Al igual que la distancia  $\overline{a_1b_1}$  y  $\overline{a_mb_{m-3}}$ .



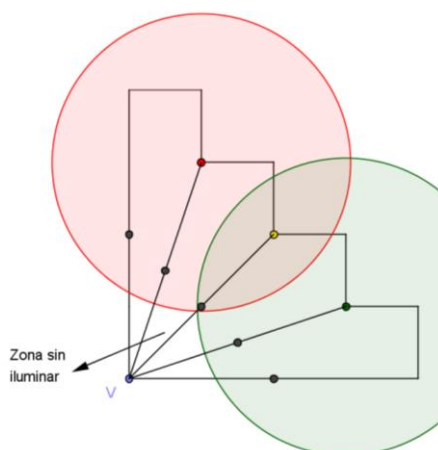
**Figura N° 8**

Como el círculo es convexo podemos poner luces en los vértices cóncavos en forma alternada, como se puede apreciar en la siguiente Figura 9.



**Figura N° 9**

En el polígono que tiene vértices cóncavos impares sólo queda una zona sin iluminar.



Llamemos  $x_j$  (siendo  $j = 1, \dots, m - 3$ ) a los puntos medios de los segmentos  $\overline{Vb_j}$ ,  $a_1'$  al punto medio del segmento  $\overline{Va_1}$  y  $a_m'$  al punto medio del segmento  $\overline{Va_m}$ . De esta manera nos vamos a referir a los puntos medios, tanto para el polígono con vértices cóncavos impares como para el de los pares.

La zona sin iluminar se cubre colocando una luz en  $V$ , por la convexidad del círculo, ya que el alcance de iluminación de las luces es  $r/2$ , y los segmentos  $\overline{Vx_j}$   $j = 1, \dots, m - 3$ ,  $\overline{Va_1'}$  y  $\overline{Va_m'}$  tienen medidas menores a dicho alcance.

Para afirmar que lo que acabamos de decir es cierto, debemos mostrar que los segmentos mencionados son menores a  $r/2$ .

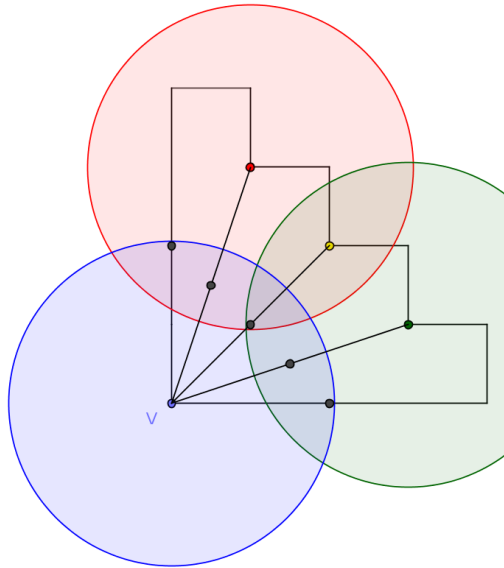
Veamos que los segmentos  $\overline{Vx_j}$   $j = 1, \dots, m - 3$  son menores a  $r/2$ .

Por Proposición 2.3 sabemos que  $\|\overline{Vb_j}\| < \|\overline{Va_i}\|$  y  $\|\overline{Va_i}\| \leq r$ .

Entonces la distancia desde  $V$  hasta los puntos medios de los segmentos  $\overline{Vb_j}$  serán menores que la distancia de  $V$  hasta los puntos medios de los segmentos  $\overline{Va_i}$ , que a la vez estos serán menores a  $r/2$ .

Luego  $\|\overline{Vx_j}\| < r/2$ .

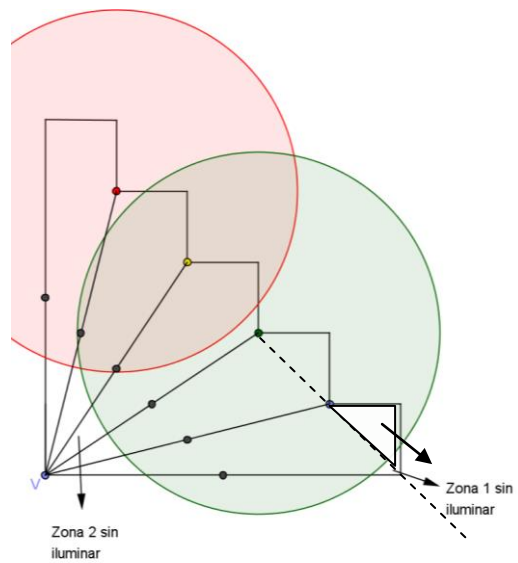
A su vez los segmentos  $\overline{Va_1'}$  y  $\overline{Va_m'}$  son menores a  $r/2$ , ya que por Proposición 2.3  $\|\overline{Va_1}\| < r$ , entonces  $\overline{Va_1'} < r/2$ . Y como la proposición también vale para las cuñas tipo  $V$ ,  $\overline{Va_m'} < r/2$ . Con lo cual la zona que estaba sin iluminar, quedará ahora iluminada por la luz de  $V$ .



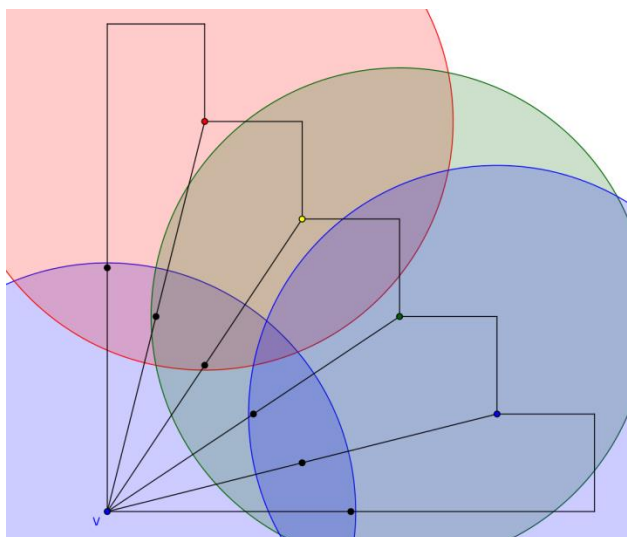
El ejemplo se necesita tres luces-vértice de alcance  $r/2$  para ser iluminado completamente. El polígono tiene diez vértices, es decir que  $n = 10$ , con lo cual  $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor 10/4 \rfloor = 2$ . Con esto queremos decir que dicho polígono necesita  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces de alcance  $r/2$  para ser iluminado completamente.

Ahora analicemos el polígono propuesto que tiene un número de vértices cóncavos pares.

Éste tiene dos zonas sin iluminar ubicando luces de alcance  $r/2$  en vértices cóncavos alternados. Esto requerirá de dos luces adicionales. En el siguiente ejemplo puede graficarse lo que se quiere decir:



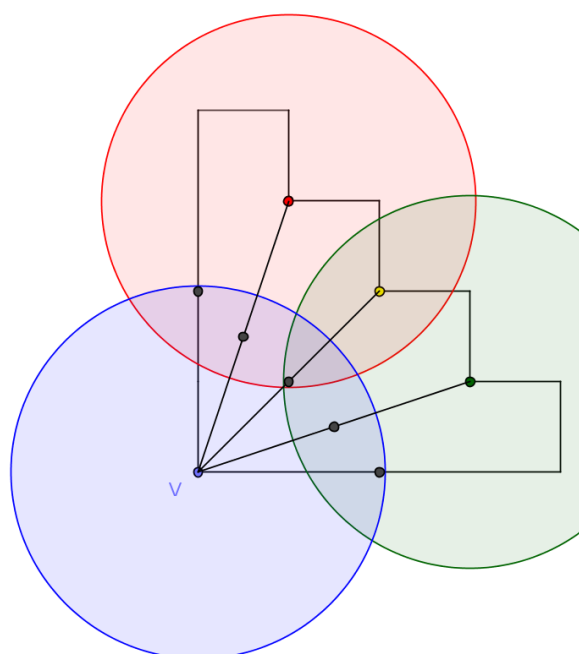
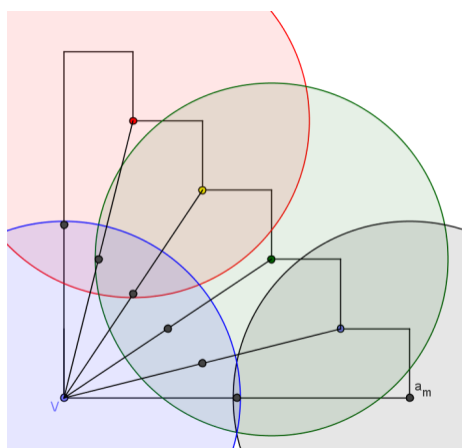
En este caso la zona 1 se ilumina colocando una luz en  $b_{m-3}$  (o en  $a_m$ ) dado que el segmento  $\overline{a_m b_{m-3}}$  es menor a  $r/2$ , y a su vez  $b_{m-3}$  ilumina el punto  $a_m$ .



Por último, al colocar una luz en V, la zona 2 queda totalmente iluminada. La explicación de por qué V ilumina toda la zona 2 es la misma que en el caso de polígonos escalera con vértices cóncavos pares.

Este ejemplo necesita cuatro luces de alcance  $r/2$  para ser iluminado completamente. Dicho polígono tiene doce vértices, es decir que  $n = 12$ , con lo cual  $\lfloor n/4 \rfloor = \lfloor 12/4 \rfloor = 3$ .

Nuevamente vemos que con  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces de alcance  $r/2$  se puede iluminar completamente un polígono escalera.



Las condiciones vistas no son muy fuertes, claramente no todos los polígonos escalera cumplen estas condiciones. Es por eso que continuamos el estudio debilitando algunas condiciones

Puede pasar que la distancia entre dos vértices cóncavos sea mayor a  $r/2$ . Al pasar esto último la cantidad de luces de la Propiedad 3.8 pueden ya no ser suficientes, con lo cual habría que aumentar la cantidad de luces necesarias.

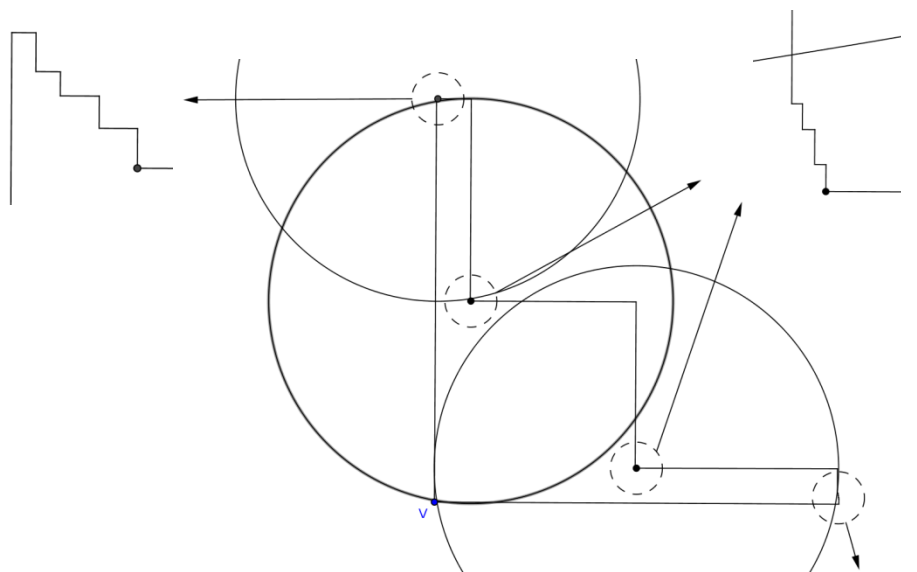
En efecto es así. Veremos a continuación que existen polígonos escalera, que necesitan al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces para ser iluminados, y la clave estará en pensar justamente casos de peldaños suficientemente grandes para evitar que éstos queden completamente iluminados con una luz en sólo uno de sus vértices.

**Lema 3.9**

Si  $L = r/2$ , entonces existe un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de  $n$  vértices y radio  $r$  que necesita al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces de alcance  $L$  para ser iluminado.

Demostración

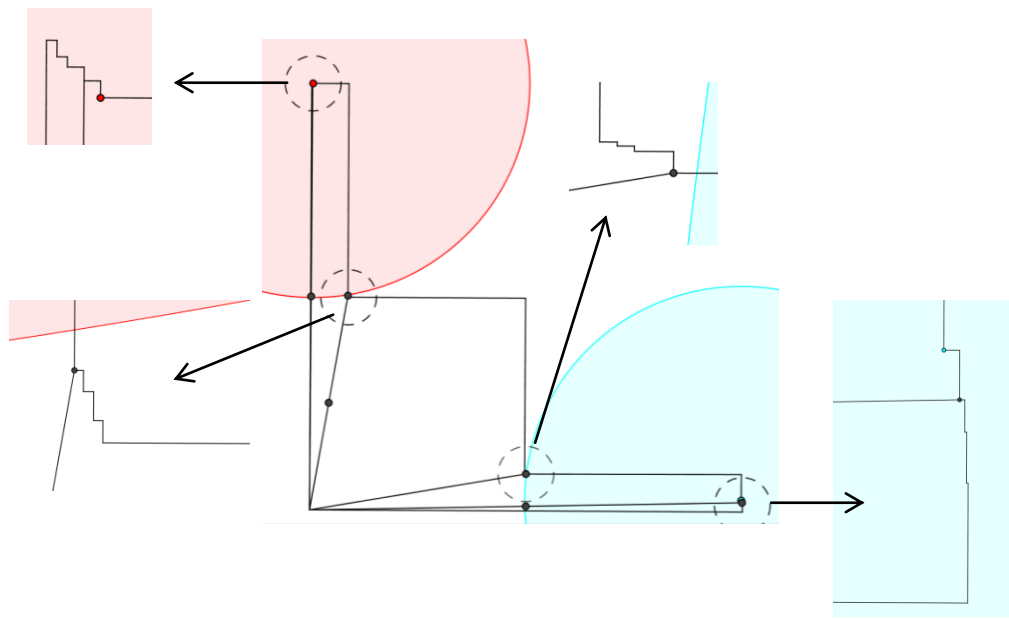
En la siguiente Figura 10 tenemos un ejemplo de un polígono escalera que se ha construido agrupando sus peldaños de la siguiente manera: tenemos cuatro grupos de peldaños con  $k$  vértices cóncavos,  $k$  es par y el último vértice cóncavo de cada grupo dista más de  $r/2$  del primero del siguiente grupo, con lo cual la distancia entre cóncavo y cóncavo es mayor a  $r/2$ . Además la distancia de cualquier cóncavo a  $V$  es mayor a  $r/2$ .



**Figura N° 10**



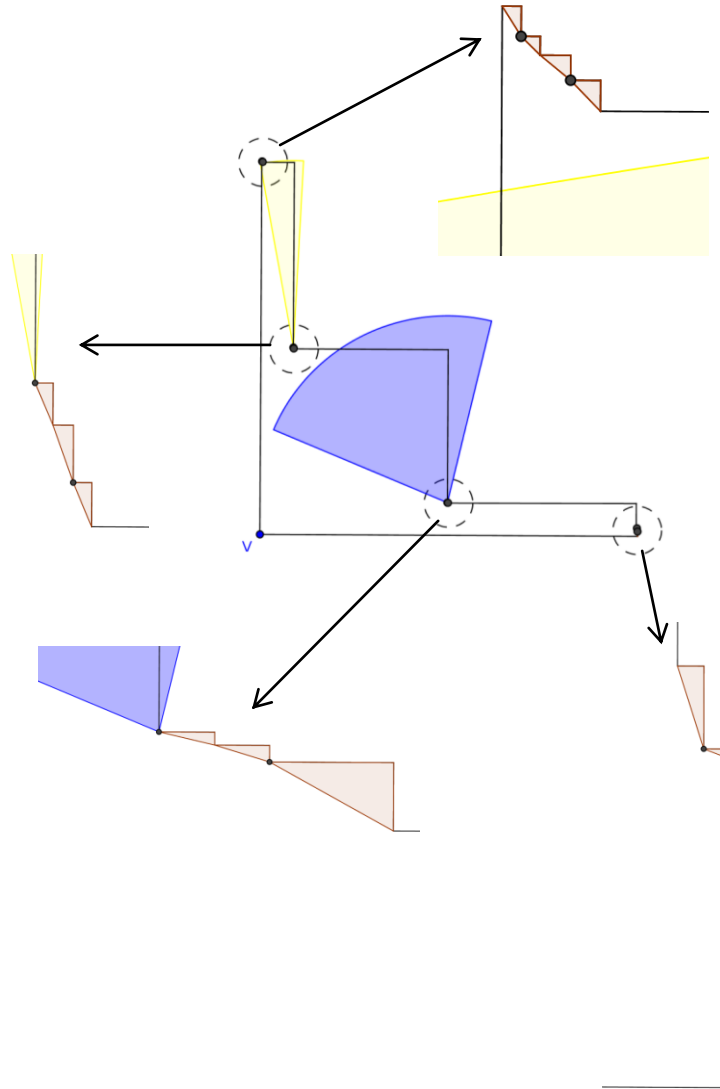
Cada vértice cóncavo de la Figura N°10 ilumina el punto medio del segmento formado por éste y V, además los puntos medios de los segmentos formados por V y sus vértices cóncavos consecutivos. Salvo dos vértices cóncavos que son los que se muestran en la siguiente figura.



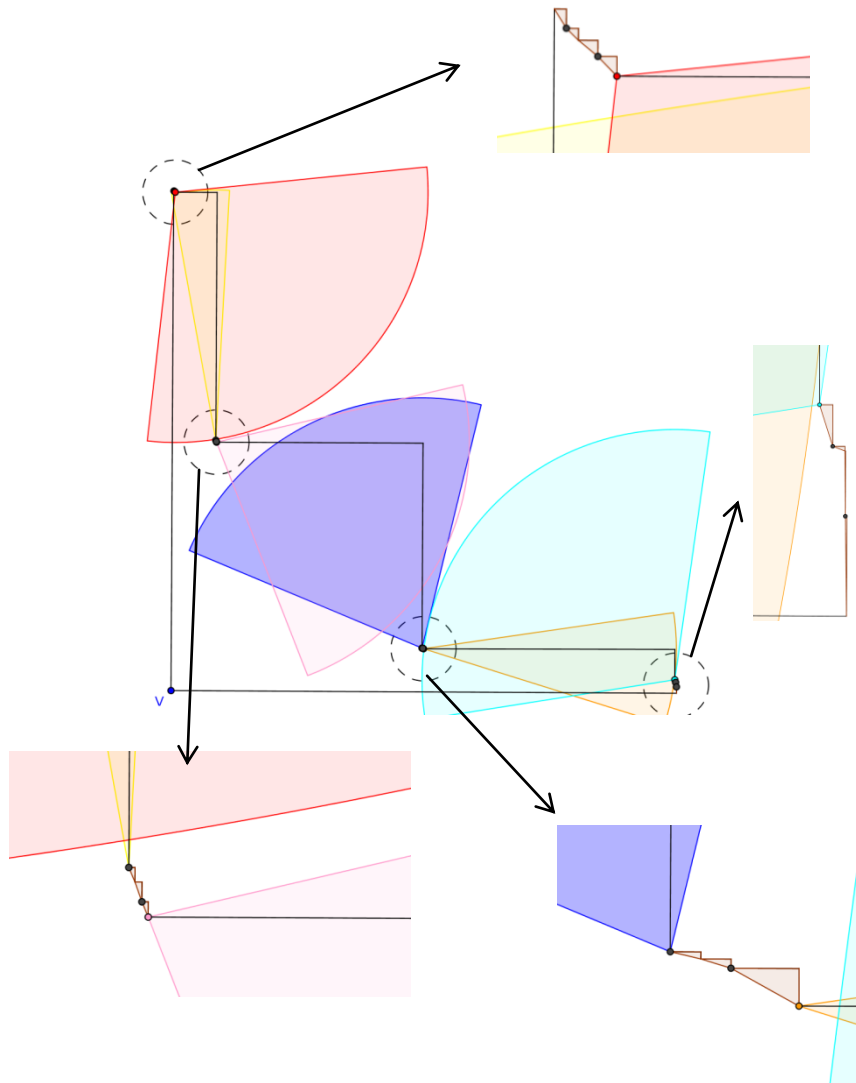
Hay que tener en cuenta que tanto el primero como el último vértice cóncavo, van a iluminar el punto medio del lado vertical u horizontal del polígono y el segmento formado por V y su vértice cóncavo consecutivo, como se vio en la Proposición 3.8.

Vamos a ver que un polígono escalera con las características del representado en la Figura N° 10 necesita  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces-vértices de alcance  $r/2$  para ser iluminado.

Cada grupo tiene  $k$  vértices cóncavos pares. Los vértices cóncavos iluminan dos peldaños, menos el último cóncavo de cada grupo debido a que distan más de  $r/2$  del primero del siguiente grupo. Cada grupo con  $k/2$  luces debería poder iluminar un número par de peldaños.



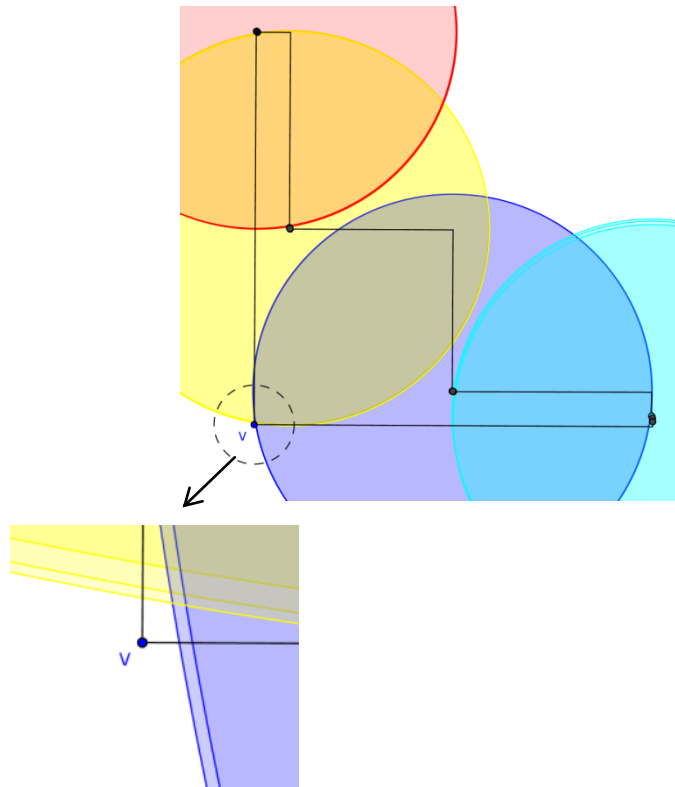
Pero al tener un número de vértices cóncavos pares también vamos a tener un número de peldaños impares, con lo cual vamos a necesitar agregar una luz a cada grupo tal como se vio en el Caso 2 de la Propiedad 3.5. Por lo tanto cada grupo necesita  $(k/2) + 1$  luces para poder iluminar a todos los peldaños. Se van a poder iluminar todos los peldaños porque la luz que se agrega va a ir colocada en el último vértice cóncavo de cada grupo para poder iluminar el escalón cuya diagonal es mayor a  $r/2$ .



Tenemos cuatro grupos con vértices cóncavos pares, con lo cual necesitamos la siguiente cantidad de luces:

$$4\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

Tengamos en cuenta que necesitamos situar una luz en  $V$  también, ya que todos los vértices cóncavos distan a más de  $r/2$  de  $V$ .



Al colocar una luz de alcance  $r/2$  en  $V$  el polígono queda totalmente iluminado por lo visto en la Propiedad 3.8 y por la Propiedad 2.11.

Entonces el número de focos será:

$$4\left(\frac{k}{2} + 1\right) + 1 = 2k + 5 \quad (4)$$

Como  $P$  tiene  $4k$  vértices cóncavos, se verifica que  $4k = (n/2) - 2$ , lo que es igual  $2k = (n/4) - 1$ . Sustituyendo en (4) tenemos:

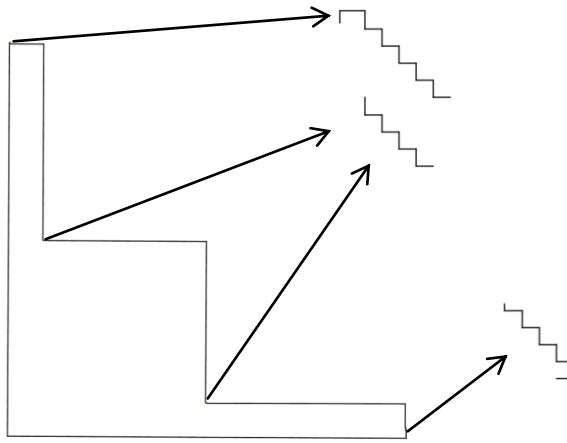
$$\frac{n}{4} - 1 + 5 = \frac{n}{4} + 4$$

Como el número de cóncavos es par,  $n$  resulta ser múltiplo de 4, con lo cual tener  $n/4$  luces o tener  $\lfloor n/4 \rfloor$  luces es equivalente.

Conclusión el número de focos necesarios para iluminar el polígono de la figura N° 10 es  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ .

Vamos a mostrar que si para alguno de los tramos el número de vértices cóncavos es impar, entonces  $n$  no es múltiplo de 4 y además no aumentará el número de luces, resultando que dicho número es  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ .

El siguiente polígono escalera es similar al de la Figura N° 10, con un grupo de peldaños que tiene  $k + 1$  vértices cóncavos, siendo  $k + 1$  impar.



**Figura N°11**

El polígono representado en la Figura N° 11 necesita  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces para ser iluminada.

Como se dijo en el Caso 1 de la Propiedad 3.5, si el número de vértices cóncavos de un polígono escalera es impar, entonces éste va a tener un número de peldaños pares, los cuales serán iluminados con un número de luces que corresponde a la mitad de los peldaños. Por lo tanto, como el polígono de la Figura N°11 tiene un grupo donde el número de vértices cóncavos es impar, dicho grupo necesitará  $\frac{(k+1)+1}{2}$  luces para poder iluminar todos los peldaños del mismo. La expresión  $k + 1$  representa el número de cóncavos del grupo, que es un número impar.

El polígono de Figura N°11 tiene tres grupos con vértices cóncavos pares, por ende se necesitarán  $3 \left( \frac{k}{2} + 1 \right)$  luces para iluminar todos los peldaños, por lo visto en el Caso 2 de la Propiedad 3.5. Y un grupo con vértices cóncavos impares, para el cual debemos usar  $\frac{(k+1)+1}{2}$  luces. Entonces el número de focos totales que necesita el polígono de la Figura N° 11 para ser iluminado es:

$$3 \left( \frac{k}{2} + 1 \right) + \frac{(k+1)+1}{2} + 1 = 2k + 5 \quad (5)$$

El 1 sumado al final se necesita por la luz que hay que poner en V

El número de cóncavos en este caso es:

$$3k + (k + 1) = (n/2) - 2$$

$$4k = (n/2) - 3$$

$$2k = (n/4) - 3/2$$

Sustituyendo en (5) nos queda:

$$(n/4) - 3/2 + 5$$

Analicemos  $(n/4) - 3/2$ :

$$(n/4) - 3/2 = (n/4) - 1 - 1/2.$$

$(n/4 - \frac{1}{2})$  es un número entero, con lo cual resulta que:

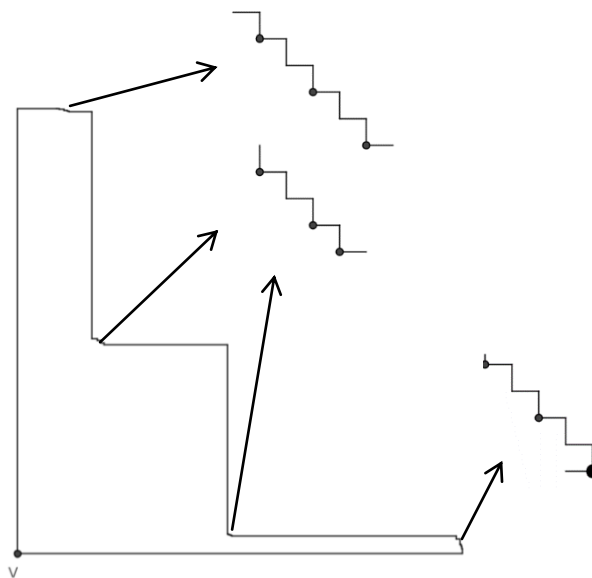
$(n/4 - \frac{1}{2}) = \lfloor n/4 \rfloor$ . Esto significa que  $(n/4 - \frac{1}{2})$  coincide con la parte entera de  $\lfloor n/4 \rfloor$ .

Conclusión: El número de luces-vértice de alcance  $r/2$  necesarias para poder iluminar totalmente al polígono de la Figura N°11 es:

$$\lfloor n/4 \rfloor - 1 + 5$$

Es decir:

$$\lfloor n/4 \rfloor + 4$$



Hemos demostrado que existen polígonos escalera que necesitan al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces de alcance  $r/2$  para ser iluminados.

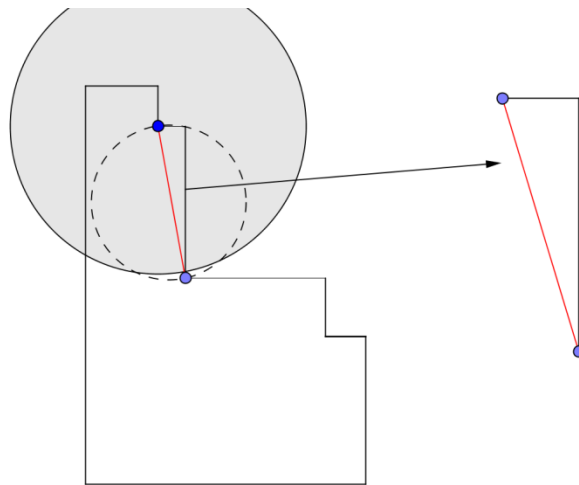
En los polígonos escalera pueden darse casos desfavorables que aumentan el número de luces y que analizamos a continuación.

Dividamos en dos los casos desfavorables que aumentan el número de luces y analicémoslos.

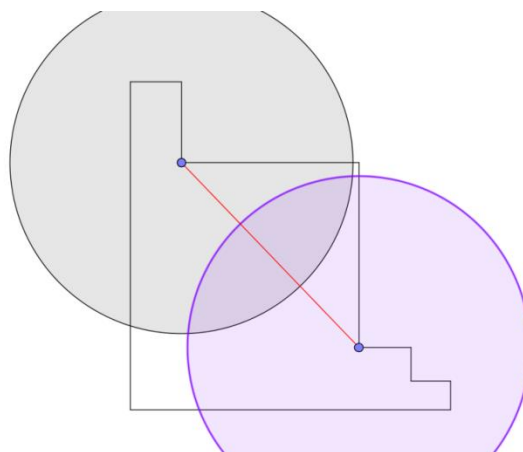
- **Caso 1: Existen zonas interiores a peldaños sin iluminar con luces de alcance  $r/2$  situadas en cóncavos alternos, (es decir, existen vértices consecutivos que distan a más de  $r/2$  o bien peldaños de anchura o altura superior a  $r/2$ ).**

Las siguientes figuras representan gráficamente la idea del Caso 1, donde se muestra la diagonal que une dos vértices cóncavos consecutivos de un peldaño, la cual es mayor a  $r/2$ . Diagonales de este tipo son a la que nos vamos a referir en el análisis de este caso.

La Figura 12a tiene un peldaño con diagonal mayor a  $r/2$ . La Figura 12b también tiene una diagonal mayor a  $r/2$ , pero dicho peldaño tiene altura y anchura mayores a  $r/2$ .



**Figura 12a**



**Figura 12b**

A la diagonal que une dos vértices cóncavos consecutivos de un peldaño, la cual es mayor a  $r/2$ , se la puede construir como máximo tres veces en un mismo polígono

escalera. Y solamente nos podemos construir un sólo peldaño con altura y anchura mayor a  $r/2$  en un mismo polígono.

Primero vamos a analizar el caso en el que las diagonales mayores  $r/2$  se pueden construir tres veces en un mismo polígono, y después el caso donde podemos construir un sólo peldaño de altura y anchura mayor a  $r/2$ .

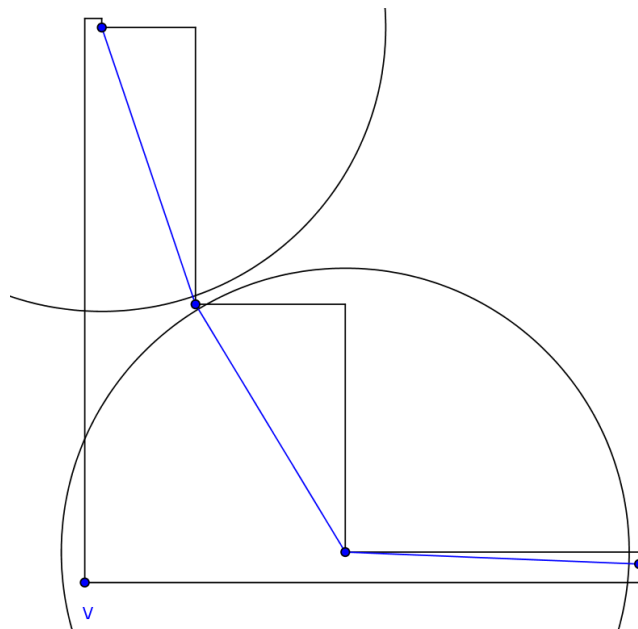
### Conjetura 3.10

Si  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  es un polígono escalera de radio  $r$ , y tiene peldaños cuyas diagonales son mayores a  $r/2$ , entonces la cantidad de ese tipo de peldaños será de a lo sumo tres.

#### Demostración:

Para la prueba, primero vamos a mostrar que podemos construir un polígono escalera con tres peldaños que tengan diagonales mayores a  $r/2$ . Un ejemplo claro será alguno de la familia de polígonos escalera presentada en la demostración del Lema 3.9. Luego estudiaremos la imposibilidad de construir un polígono escalera con cuatro peldaños con diagonal mayor a  $r/2$ .

A continuación proponemos un polígono escalera que tiene tres peldaños con diagonales mayores a  $r/2$ .



En este caso vemos que al colocar una luz de alcance  $r/2$  en alguno de los vértices cóncavos se puede observar que existe una zona interior a los peldaños adyacentes que



queda sin iluminar completamente. Vemos entonces que se pueden construir polígonos escalera con tres peldaños cuyas diagonales sean mayores a  $r/2$ .

Habiendo mostrado que se pueden construir polígonos escalera de radio  $r$  con tres peldaños cuyas diagonales sean mayores a  $r/2$ , sólo queda ver que no es posible construir uno con cuatro peldaños como los que queremos estudiar. Si no se puede construir un polígono escalera con cuatro peldaños de estas características, tampoco se podrá con más. Esto significaría que se pueden construir polígonos escalera con a lo sumo tres peldaños con diagonales que midan más que  $r/2$ .

Vamos a suponer que podemos construir un polígono con cuatro peldaños del tamaño en cuestión y luego llegaremos a una contradicción.

En una primera instancia vamos a suponer que hay dos peldaños que van a ser “altos” y “finos”, y otros dos que van a ser “bajos” y “anchos”. Nos referimos a un peldaño “alto” a aquel que tenga una medida del lado paralelo al lado V del polígono escalera de un orden cercano (o superior) a  $r/2$ , y “bajo” si éste es cercano a cero. Un peldaño “ancho” hará referencia a uno cuyo lado paralelo al lado H del polígono escalera tenga una medida cercana (o superior) a  $r/2$  y “fino” si la medida de ese lado es de un valor cercano al cero.

Tres peldaños “altos” y “finos” y un peldaño “bajo” y “ancho” no puede haber, porque los tres peldaños “altos” superarían a V (que seguro su medida es menor a  $r$ ). Tres peldaños “anchos” y “bajos” y otro “alto” y “fino” tampoco, pues los tres peldaños anchos y bajos superarían a H por la misma razón.

Supongamos que existiera un polígono escalera que tenga 4 peldaños con diagonales mayores a  $r/2$ , donde las luces no alcancen a cubrir todo el peldaño:

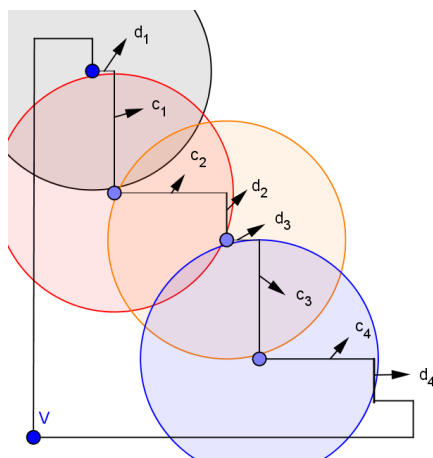
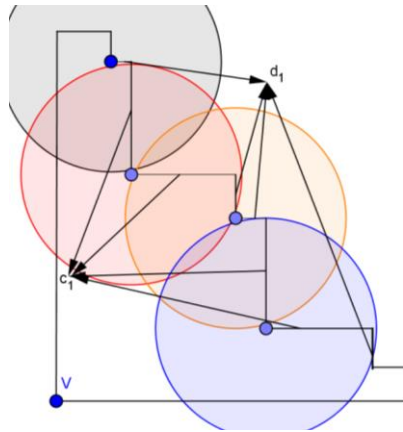


Figura N° 13

Consideraremos  $d_j$   $j = 1 \dots 4$  a los segmentos más chicos y  $c_j$   $j = 1 \dots 4$  a los segmentos más largos los cuales son necesarios para formar los peldaños con diagonales mayores a  $r/2$ .

Vamos a proponer el estudio de un caso particular. Luego haremos algunas observaciones que nos orientarán para generalizar lo pensado. Veamos que no pueden existir cuatro peldaños congruentes, algunos anchos y bajos y otros altos y finos, cuyas diagonales sean mayores a  $r/2$ . Esto nos dará un acercamiento intuitivo de que no sería posible construir lo buscado.

Supongamos que nos podemos construir el siguiente polígono escalera  $P$  de radio  $r$ , el cual contiene cuatro peldaños congruentes con diagonales mayores a  $r/2$

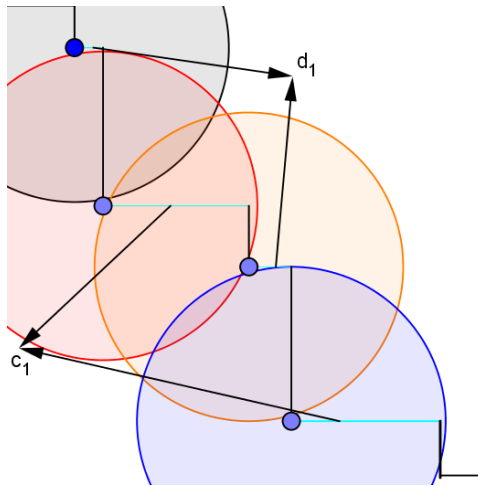


**Figura N° 14**

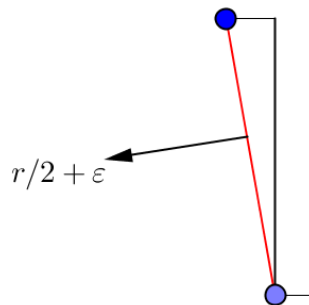
Del polígono presentado en la Figura N° 14 podemos decir que:

La suma de los segmentos verticales y la de los segmentos horizontales de los peldaños es igual al lado horizontal  $H$  y al lado vertical  $V$  del polígono escalera respectivamente. A su vez  $H$  y  $V$  son ambos menores a  $r$ . Con lo cual vale que:

$$2\|\overline{d_1}\| + 2\|\overline{c_1}\| < r. (* 1)$$



Si es posible que la diagonal que une los extremos del peldaño sea mayor a  $r/2$ , entonces vamos a considerar que dicha medida es igual a  $r/2 + \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  y puede ser tan chico como se quiera.



Por definición, la diagonal del peldaño es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos lados son  $\overline{d_1}$  y  $\overline{c_1}$ .

Ahora bien veamos cuánto pueden llegar a medir los segmentos  $\overline{d_1}$  y  $\overline{c_1}$ .

Primero supongamos  $\|\overline{c_1}\| = r/2$ .

$\overline{c_1}$  es un lado horizontal el cual mide  $r/2$ . Con lo cual como habíamos dicho, que tres peldaños anchos y bajos más otro alto y fino no nos podemos construir, pues los tres peldaños anchos y bajos superarían a H.

$3\|\overline{c_1}\| + \|\overline{d_1}\| = 3r/2 + \|\overline{d_1}\| = r + r/2 + \|\overline{d_1}\| > r$ . Con esto queremos decir que H sería mayor a  $r$  y eso es Absurdo.

El mismo razonamiento vale para tres peldaños altos y finos más otro ancho y bajo, pues los tres peldaños altos y finos superarían a V.

Como  $\|\overline{c_1}\| = r/2$ , entonces resulta que  $2\|\overline{d_1}\| + 2\|\overline{c_1}\| > r$ . Esto es un absurdo, que surge de pensar en  $\|\overline{c_1}\|$  igual a  $r/2$ .

Con lo cual, la suposición de que podemos construir un polígono escalera que tenga cuatro peldaños congruentes con diagonales mayores a  $r/2$ , con uno de sus lados igual a  $r/2$  es falsa. Por lo tanto, no es posible construir un polígono escalera de estas características.

Podría pasar que los peldaños, tengan sus lados  $\bar{c}_1$  menores a  $r/2$ .

Supongamos entonces que  $\bar{c}_1$  es menor a  $r/2$ , es decir  $\|\bar{c}_1\| = (r/2) - \varepsilon_1$ , con  $\varepsilon_1$  mayor que cero.

Volvemos a lo mismo, tres peldaños anchos y bajos más otro alto y fino no nos podremos construir.

$$\|\bar{c}_1\| = (r/2) - \varepsilon_1, \text{ con lo cual } 3\|\bar{c}_1\| + \|\bar{d}_1\| = 3(r/2 - \varepsilon_1) + \|\bar{d}_1\|$$

$$3\|\bar{c}_1\| + \|\bar{d}_1\| = r + r/2 - \varepsilon_1 + \|\bar{d}_1\|$$

Sabemos que  $\|\bar{c}_1\| = (r/2) - \varepsilon_1$  el cual es un lado cuya medida es mayor a 0.

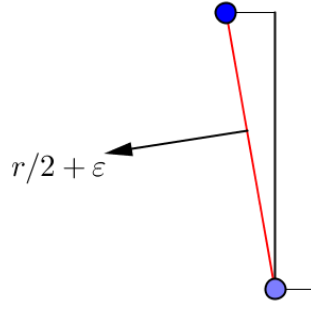
$$3\|\bar{c}_1\| + \|\bar{d}_1\| = r + \underbrace{r/2 - \varepsilon_1}_{> 0} + \|\bar{d}_1\| > r. \text{ Vuelve a pasar que H es mayor a } r, \text{ y esto es un absurdo.}$$

El mismo razonamiento vale para tres peldaños altos y finos más otro ancho y bajo, pues los tres peldaños altos y finos superarían a V.

Volvamos a nuestro estudio. Sabiendo que  $\|\bar{c}_1\| = (r/2) - \varepsilon_1$ , veamos qué características tiene que tener  $\bar{d}_1$ . Supongamos que podemos construir el polígono con cuatro peldaños congruentes con sus diagonales mayores a  $r/2$  y con  $\|\bar{c}_1\|$  igual a  $(r/2) - \varepsilon_1$ . Para construirlos tomemos un  $\varepsilon_1$  y un  $\varepsilon$ , ambos positivos y distintos, donde la diagonal que une a los vértices cóncavos será

$$r/2 + \varepsilon$$

$$\|\bar{c}_1\| = r/2 - \varepsilon_1. \text{ Veamos qué características debe tener } \bar{d}_1.$$



Por el teorema de Pitágoras sabemos que:

$$(r/2 + \varepsilon)^2 = \|\bar{c}_1\|^2 + \|\bar{d}_1\|^2$$

Luego:

$$(r/2)^2 + \varepsilon^2 + r\varepsilon = (r/2 - \varepsilon_1)^2 + \|\bar{d}_1\|^2$$

$$\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1 = \|\bar{d}_1\|^2$$

$$\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1} = \|\bar{d}_1\|$$

Sabemos que

$$2\|\bar{d}_1\| + 2\|\bar{c}_1\| < r \quad (1).$$

Además tenemos que  $\|\bar{c}_1\| = r/2 - \varepsilon_1$  y resultó que  $\|\bar{d}_1\| = \sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1}$  con lo cual debería pasar:

$$2\left(\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1}\right) + 2(r/2 - \varepsilon_1) < r$$

$$r - 2\varepsilon_1 + 2\left(\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1}\right) < r$$

$$-2\varepsilon_1 + 2\left(\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1}\right) < 0$$

$$2\left(\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1}\right) < 2\varepsilon_1$$

$$\left(\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1}\right) < \varepsilon_1. \quad (2)$$

Como  $\varepsilon_1$  lo consideramos suficientemente pequeño (en particular jamás será  $r/2$  ya que  $\bar{c}_1$  entonces no sería el segmento mayor), vale la siguiente desigualdad:  $r/2 - \varepsilon_1 > \varepsilon_1$ , por lo tanto, multiplicando miembro a miembro por el número positivo  $\varepsilon_1$ , resulta:

$$r/2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > \varepsilon_1^2 \quad (**)$$

Como  $r$  es mayor que  $r/2$ , entonces podemos decir que  $r\varepsilon_1$  es mayor a  $r/2 \varepsilon_1$ , con lo cual vale la siguiente desigualdad también:

$$r\varepsilon_1 > r/2 \varepsilon_1$$

Finalmente, restemos miembro a miembro el cuadrado de  $\varepsilon_1$

$$r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > r/2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2$$

Sabemos entonces por (\*\*) que  $r/2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > \varepsilon_1^2$ , con lo cual podemos decir que

$$r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > r/2 \varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > \varepsilon_1^2$$

Por transitividad podemos afirmar que:  $r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > \varepsilon_1^2$

Ahora vamos a agregar segmentos, los cuales siempre son positivos, y acomodar las desigualdades para poder llegar a un absurdo.

Como  $\varepsilon^2$  es mayor que cero y  $r\varepsilon$  es mayor que cero, resulta:

$$\varepsilon^2 + r\varepsilon > 0$$

Sumando miembro a miembro  $r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2$ , resulta:

$$\varepsilon^2 + r\varepsilon + r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2$$

Como  $r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > \varepsilon_1^2$  ocurre por transitividad que:

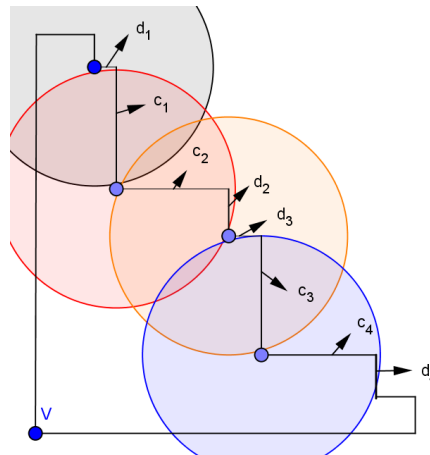
$$\varepsilon^2 + r\varepsilon + r\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2 > \varepsilon_1^2$$

Lo que significa que  $\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1} > \varepsilon_1$ . Esto resulta un absurdo, ya que en (2) se dijo que  $\sqrt{\varepsilon^2 + r\varepsilon - \varepsilon_1^2 + r\varepsilon_1} < \varepsilon_1$ .

Con lo cual queda demostrado que no es posible construir un polígono escalera que tenga cuatro peldaños congruentes con diagonales mayores a  $r/2$ .

Ahora vamos a intentar generalizar lo que venimos estudiando. Para eso vamos a volver a tomar el polígono de la Figura N° 13 para poder analizarlo.

No necesariamente los 4 peldaños tienen que ser congruentes, es decir que pueden ser todos los segmentos, que forman a los mismos, totalmente distintos. Tal como se intenta graficar en la siguiente figura 13:



**Figura N° 13**

Sea  $\bar{c}$  aquel  $\bar{c}_i$  que tiene la menor medida

$$\|\bar{c}\| = \min\{\|\bar{c}_i\|, \quad i = 1, \dots, 4\}$$

Y  $\bar{d}$  el  $\bar{d}_i$  de menor medida

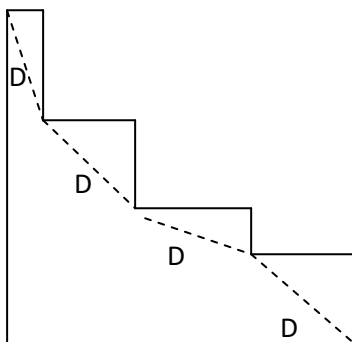
$$\|\bar{d}\| = \min\{\|\bar{d}_i\|, \quad i = 1, \dots, 4\}$$

Si  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$  verifican que  $\|\bar{c}\|^2 + \|\bar{d}\|^2 > (r/2)^2$ , entonces podemos pensar que nos podemos construir un polígono escalera con cuatro peldaños congruentes, donde  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$  son los segmentos que forman esos peldaños. Pero caeríamos en el caso particular antes analizado, donde vimos que no es posible construir el polígono con cuatro peldaños congruentes con diagonales mayores a  $r/2$ . Como el análisis se hace sobre  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$  que son los segmentos de menor medida, y llegamos a que no podemos formar un polígono con cuatro peldaños con estas medidas, entonces tampoco los vamos a poder construir con segmentos más largos.

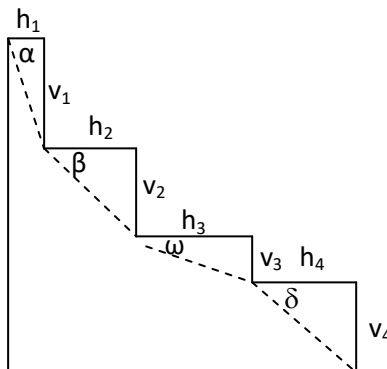
Ahora bien, también puede pasar que si  $\bar{c}$  y  $\bar{d}$  no verifican que  $\|\bar{c}\|^2 + \|\bar{d}\|^2 > (r/2)^2$ , y para esos casos debemos pensar otras alternativas.

Vamos a ver que no se puede construir un polígono escalera con exactamente cuatro peldaños de diagonales  $r/2$ . Si esto es imposible, tampoco podremos construir uno con peldaños de lados de mayor medida ni con mayor cantidad de peldaños.

La siguiente figura representa un polígono escalera  $P$  de radio  $r$  con cuatro peldaños con diagonales cuyas medidas son  $D$ :



Vamos a ver que  $D$  no puede valer  $r/2$ . Para ello, consideraremos  $D=r/2$  y llegaremos a un absurdo.



En este polígono  $P$  propuesto se verifican las siguientes condiciones, siendo  $H$  el lado horizontal y  $V$  el lado vertical de  $P$ :

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = H < r \quad (1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = V < r \quad (2)$$

Calculando los cuadrados de (1) y (2), se obtiene:

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_1h_4 + \\ + 2h_2h_3 + 2h_2h_4 + 2h_3h_4 < r^2 \quad (3)$$

y

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_1v_4 + \\ + 2v_2v_3 + 2v_2v_4 + 2v_3v_4 < r^2 \quad (4)$$

Sumando (3) y (4) miembro a miembro, resulta:

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + 2h_1h_2 + 2h_1h_2 + 2h_1h_3 + 2h_1h_4 + 2h_2h_3 + 2h_2h_4 + \\ + 2h_3h_4 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_2 + 2v_1v_3 + 2v_1v_4 + 2v_2v_3 + \\ + 2v_2v_4 + 2v_3v_4 < 2r^2 \quad (5)$$

Además, siendo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\omega$  y  $\delta$  ángulos menores a  $\pi/2$  y  $D=r/2$  se verifica:

$$h_1 = \frac{r}{2} \cos(\alpha), \quad v_1 = \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$h_2 = \frac{r}{2} \cos(\beta), \quad v_2 = \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\beta)$$

$$h_3 = \frac{r}{2} \cos(\omega), \quad v_3 = \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\omega)$$

$$h_4 = \frac{r}{2} \cos(\delta), \quad v_4 = \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\delta)$$

Reemplazando, asociando y conmutando en (5) queda:

$$\left(\frac{r}{2} \cos(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \operatorname{sen}(\alpha)\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \cos(\beta)\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \operatorname{sen}(\beta)\right)^2 + \\ + \left(\frac{r}{2} \cos(\omega)\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \operatorname{sen}(\omega)\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \cos(\delta)\right)^2 + \left(\frac{r}{2} \operatorname{sen}(\delta)\right)^2 + \\ + 2 \frac{r}{2} \cos(\alpha) \frac{r}{2} \cos(\beta) + 2 \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\alpha) \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\beta) + \\ + 2 \frac{r}{2} \cos(\alpha) \frac{r}{2} \cos(\omega) + 2 \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\alpha) \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\omega) + \\ + 2 \frac{r}{2} \cos(\alpha) \frac{r}{2} \cos(\delta) + 2 \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\alpha) \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\delta) +$$



$$\begin{aligned}
&+2 \frac{r}{2} \cos(\beta) \frac{r}{2} \cos(\omega) + 2 \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\beta) \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\omega) + \\
&+2 \frac{r}{2} \cos(\beta) \frac{r}{2} \cos(\delta) + 2 \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\beta) \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\delta) + \\
&+2 \frac{r}{2} \cos(\omega) \frac{r}{2} \cos(\delta) + 2 \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\omega) \frac{r}{2} \operatorname{sen}(\delta) < 2r^2
\end{aligned}$$

Utilizando identidades trigonométricas, en particular:

$$\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

$$\text{y} \quad \cos(\varphi - \theta) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\theta),$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\cancel{4} \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{r^2}{2} \cos(\alpha - \omega) + \frac{r^2}{2} \cos(\alpha - \delta) + \\
&\frac{r^2}{2} \cos(\beta - \omega) + \frac{r^2}{2} \cos(\beta - \delta) + \frac{r^2}{2} \cos(\omega - \delta) < 2r^2
\end{aligned}$$

Restando en ambos miembros  $r^2$  y multiplicando luego por  $2/r^2$  se tiene finalmente la expresión:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \omega) + \cos(\alpha - \delta) + \cos(\beta - \omega) + \cos(\beta - \delta) + \cos(\omega - \delta) < 2$$

Esto resulta un absurdo, ya que la expresión del primer miembro de la inecuación toma valores del intervalo  $[2,6]$ .

Para valores de amplitudes entre  $0$  y  $\pi/2$ , la expresión toma el mínimo valor para el caso  $\alpha=\beta=\pi/2$  y para  $\omega=\delta=0$

$$\cos(0) + \cos(\pi/2) + \cos(\pi/2) + \cos(\pi/2) + \cos(\pi/2) + \cos(0) = 2$$

Con esto concluimos que no es posible construir un polígono escalera  $P$  de radio  $r$  con cuatro peldaños de diagonales que midan exactamente  $r/2$ .

En consecuencia queda probado que no es posible construir polígonos escalera de radio  $r$  con más de tres peldaños con diagonales con medidas que superen  $r/2$ .

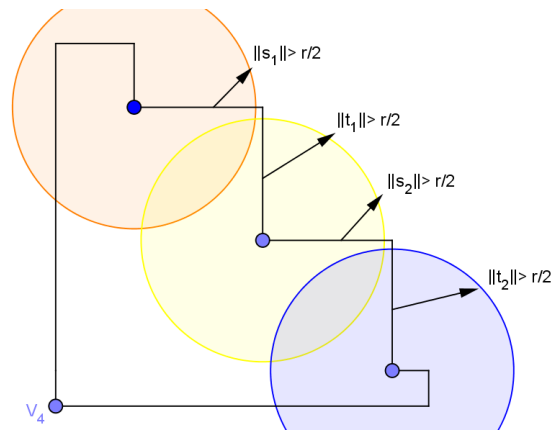
### Proposición 3.11

Si un peldaño de un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  tiene altura y anchura superiores a  $r/2$ , entonces ningún otro peldaño puede cumplir las mismas condiciones. Además podemos encontrar un polígono con un peldaño de anchura y altura superiores a  $r/2$  que se lo podrá iluminar con no menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces de alcance igual a la mitad de radio  $r$ .

Demostración

Primero demostraremos por el absurdo que no es posible construir un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  que contenga dos peldaños de altura y anchura superiores a  $r/2$ . Luego demostraremos que si es posible construir uno que tenga un peldaño de altura y anchura superiores a  $r/2$  que será iluminado con no menos de  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces de alcance  $r/2$ .

Supongamos que podemos construir un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  que tenga dos peldaños de altura y anchura mayores a  $r/2$ . Éste sería como el que se muestra en la siguiente figura:



**Figura N° 15**

Si realmente pudiese esto pasar, entonces la suma de la medida de los segmentos horizontales  $\|s_1\| + \|s_2\|$  y las de los verticales  $\|t_1\| + \|t_2\|$  deberían ser menores o iguales a  $\|H\|$  y menores o iguales a  $\|V\|$  respectivamente. Como  $H$  y  $V$  tienen medidas menores a  $r$  podemos asegurar que:

$$\|s_1\| + \|s_2\| < r \wedge \|t_1\| + \|t_2\| < r$$

Pero por hipótesis,  $\|t_1\| + \|t_2\| > r/2 + r/2 \Rightarrow \|t_1\| + \|t_2\| > r$ . Esto genera un absurdo, proveniente de pensar que existen dos peldaños con alturas mayores a  $r/2$ : la suma de las dos alturas superaría la medida del radio. Entonces pasaría que la medida del lado vertical del polígono escalera sería mayor que el radio, y eso no puede ocurrir.

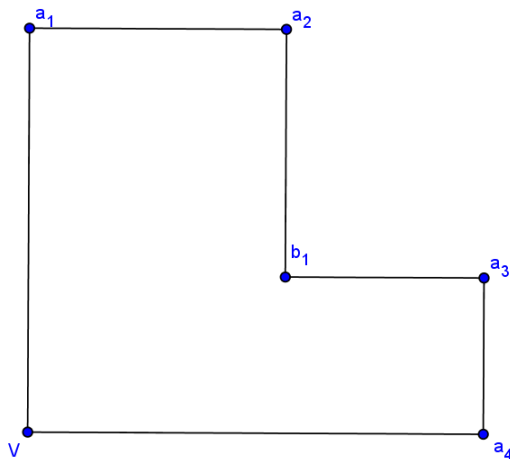
De modo análogo ocurre con el ancho de los peldaños y el lado horizontal de  $P$ . Lo dicho se demuestra mediante la siguiente inecuación.

$$\|s_1\| + \|s_2\| > r/2 + r/2 \Rightarrow \|s_1\| + \|s_2\| > r, \text{ nuevamente generando un absurdo, puesto que de aquí se desprende que } \|H\| > r$$

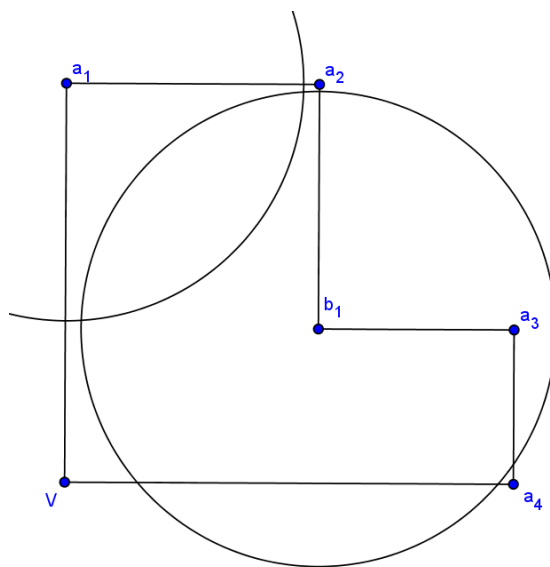
Con lo cual queda demostrado que no es posible construir un polígono escalera que tenga dos peldaños de altura y anchura mayores a  $r/2$ .

Queda por demostrar que podemos encontrar un polígono escalera que tenga un peldaño de altura y anchura mayores a  $r/2$ , y que no se lo pueda iluminar con menos de  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces.

Observemos el siguiente polígono escalera  $P$ :

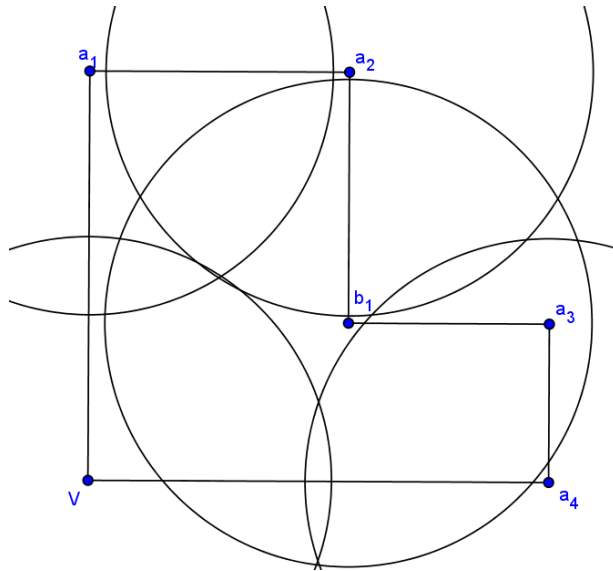


Este polígono tiene un peldaño de altura y anchura mayores a  $r/2$



El cual necesita luces de alcance  $r/2$  en los vértices  $a_2, a_4$  y  $V$ , para poder iluminarlo completamente.

“El polígono  $P$  tiene un peldaño de anchura y altura superior a  $r/2$ . El vértice  $b_1$  dista a más de  $r/2$  de  $V$ . Además el segmento  $\overline{b_1 a_4}$  mide también más de  $r/2$ . Por las características del peldaño  $a_1 a_2 b_1$ , se necesitan si o sí luces en  $a_1$  y  $a_2$ . Como el alcance de iluminación es  $r/2$ , la luz de  $V$  no puede iluminar puntos del peldaño en cuestión, y desde  $a_3$  y  $a_4$  tampoco, por ser  $b_1$  el vértice cóncavo, necesitaremos una luz en  $b_1$ . La luz de  $b_1$  no ilumina el entorno de  $a_4$ . Por lo tanto necesitaremos una luz allí (podríamos ubicarla en  $a_3$ ). Por último necesitamos la luz de  $V$  para completar la iluminación.”

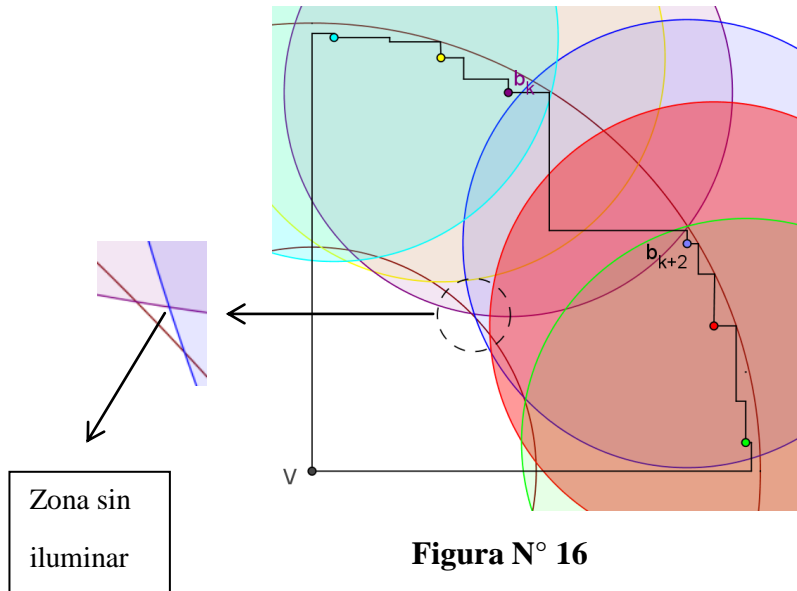


Este polígono tiene seis vértices en total, y como se puede observar se necesitaron cinco luces-vértice para poder iluminarlo completamente. Para este caso  $\lfloor n/4 \rfloor$  es uno. Con esto queremos decir que este polígono necesita al menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces de alcance  $r/2$  para poder ser iluminado.

De esta manera queda demostrada la Proposición 3.11, que aseguraba la imposibilidad de construir un polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  con dos peldaños de altura y anchura superiores a  $r/2$ , y que además podíamos construir uno con las anteriores características que se lo podría iluminar con no menos  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces de alcance igual a la mitad de radio  $r$ .

- **Caso 2: Existen zonas interiores al polígono, (exteriores a peldaños), sin iluminar con luces de alcance  $r/2$ , situadas en cóncavos alternos.**

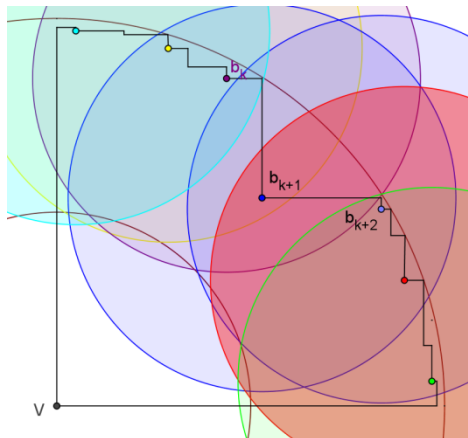
En este caso, como se muestra en la Figura N° 16, puede suceder que colocando luces de alcance  $r/2$  en  $V$  y en dos vértices cóncavos alternados  $b_k$  y  $b_{k+2}$ , no se ilumina una zona del polígono.



**Figura N° 16**

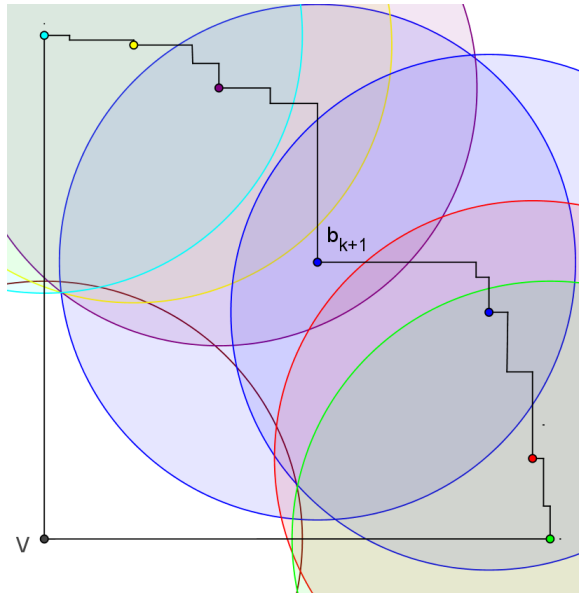
Como se puede observar, se colocaron luces en los vértices cóncavos en forma alternada y otro en  $V$ , con lo cual el orden y la colocación de las luces coinciden con las de la Propiedad 3.8. Entonces podemos asegurar que se usaron  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces. Pero no se logró iluminar todo el polígono. Dicho problema se soluciona agregando una luz más en el vértice  $b_{k+1}$ .

Conclusión: para este caso entonces se necesitarán  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$  luces para poder iluminar todo el polígono.



Otra forma de poder iluminar todo el polígono es redistribuyendo las luces.

Si colocamos una luz en el vértice intermedio  $b_{k+1}$  (que es el necesario para iluminar la zona en cuestión) y a partir de él colocamos luces en los vértices cóncavos en forma alternada, quedará iluminado el polígono.



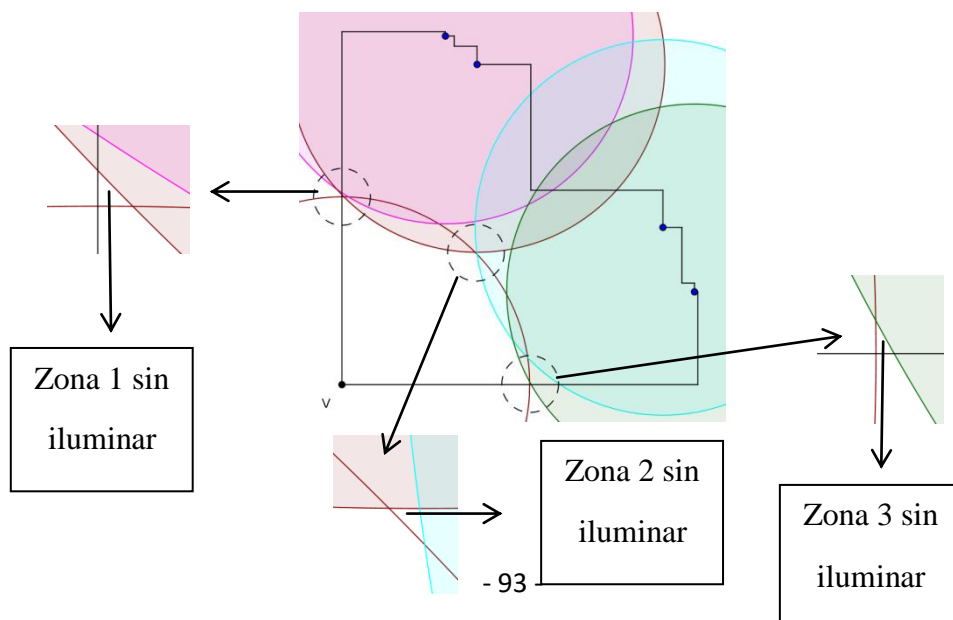
**Figura N° 17**

Como se puede apreciar en la Figura N°17, no alcanzó con poner luces en los vértices cóncavos alternados, sino que se tuvieron que poner luces en los vértices  $a_1$  y  $a_m$ . La razón por la que se pusieron luces en dichos vértices convexos es porque quedaba el primer peldaño y el último sin iluminar.

Si bien se tuvieron que poner luces en  $a_1$  y  $a_m$  la cantidad de luces para poder iluminar el polígono no se redujo. Luego, la cantidad de luces necesarias para lograrlo sigue siendo  $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 2$ .

Ahora nos preguntamos ¿Cuántas veces se puede dar la situación del Caso 2?

Se puede presentar un polígono escalera en el cual se repitió la situación tres veces.

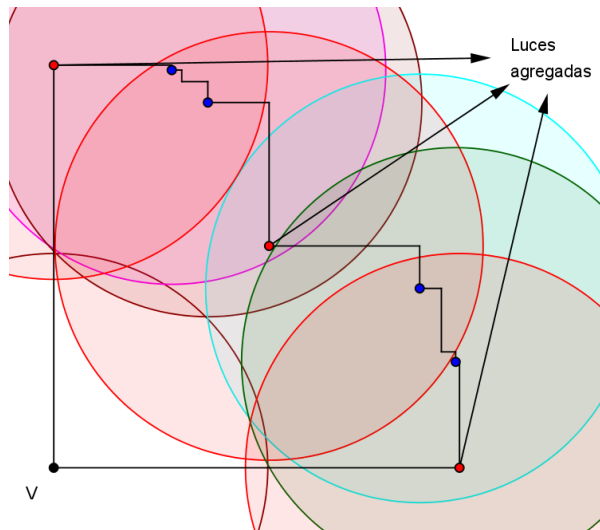


Se colocaron luces en los vértices cóncavos en forma alternada y otro en V, con lo cual el orden y la colocación de las luces coinciden con las de la Propiedad 3.8. Nuevamente podemos asegurar que se usaron  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces. Pero no se logró iluminar todo el polígono. Dicho problema se puede solucionar agregando tres luces, las cuales van a iluminar las tres zonas.

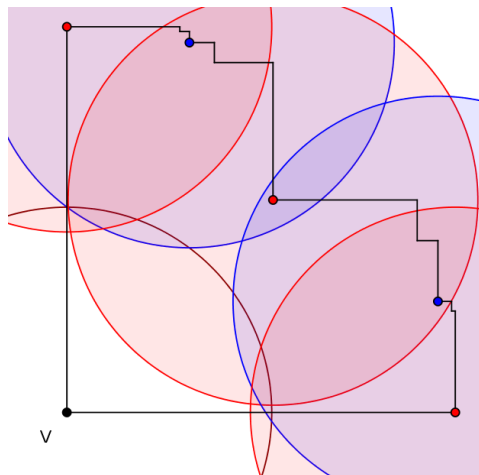
Podríamos pensar que se necesitarán:

$$\lfloor n/4 \rfloor + 1 + 3,$$

Es decir:  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces para poder iluminar todo el polígono.



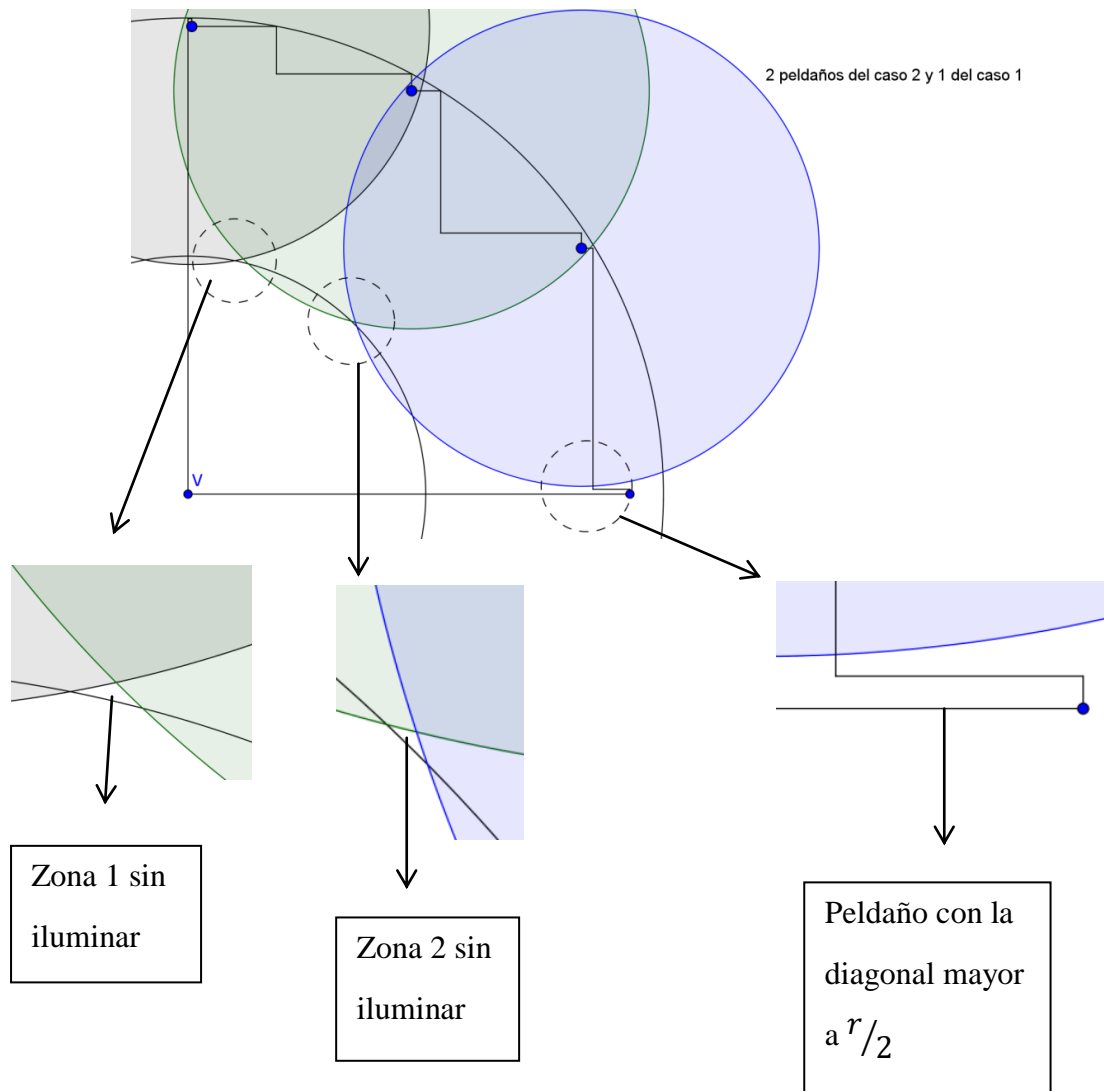
Sin embargo, también podemos iluminarlo redistribuyendo las luces.



No sólo se logró reacomodando las luces iluminar todo el polígono, sino que también se consiguió disminuir su cantidad, es decir se necesitaron  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$  luces.

Esto significa que lo conveniente es redistribuir luces y luego ir agregando hasta lograr conseguir iluminar el polígono.

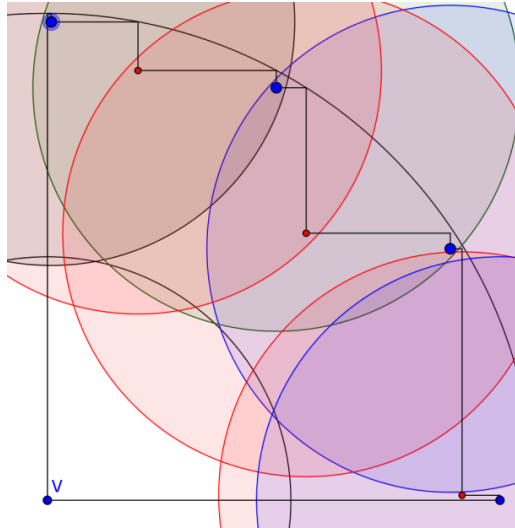
Por otra parte podemos tener situaciones en las que tengamos peldaños desfavorables del Caso 1 y del Caso 2 en un mismo polígono.



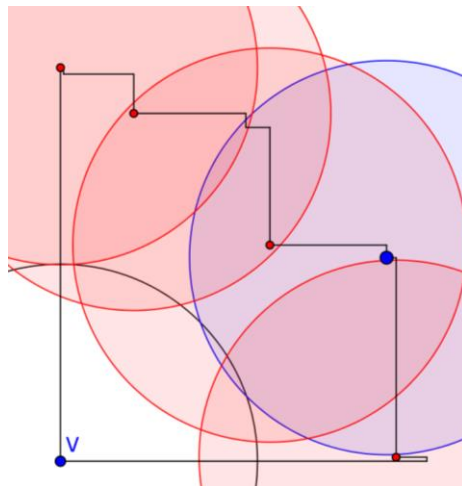
El polígono que tiene dos zonas sin iluminar como la del Caso 2 más una situación del Caso 1. Colocando luces-vértice en cóncavos alternados y en V tenemos un total de  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  luces, pero el mismo no está totalmente iluminado. Dicho problema se soluciona seguro colocando tres luces, una para iluminar la Zona 1 y la otra para iluminar la Zona 2. Una tercera debe ir en el otro vértice cóncavos del peldaño que tiene la diagonal mayor a  $r/2$

Conclusión  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces son suficientes para iluminar completamente el polígono.





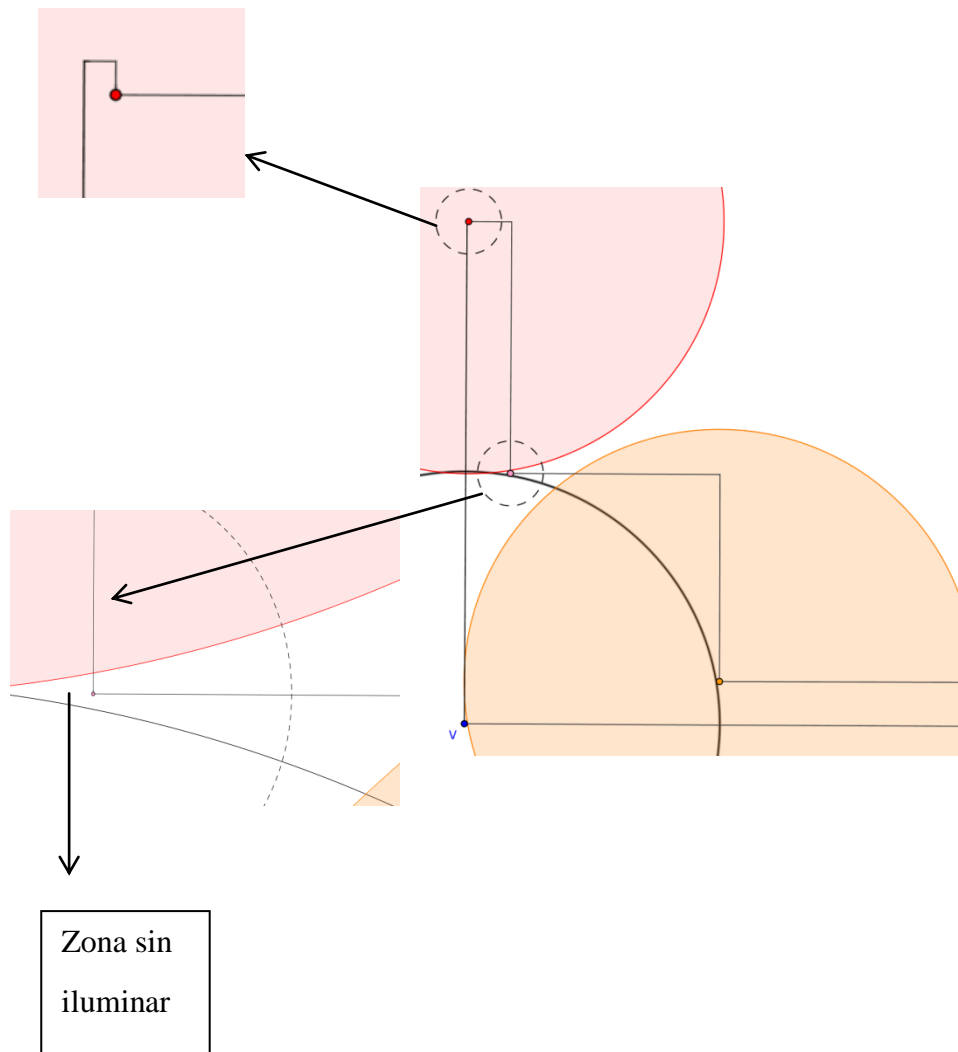
Si bien con  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  luces iluminamos completamente al polígono, si las redistribuimos obtendremos el mismo resultado pero con menos cantidad.



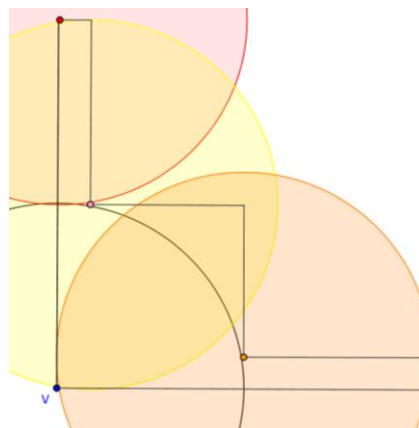
El polígono tiene dieciséis vértices, y se necesitaron seis luces, es decir se precisaron  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$  luces de alcance  $r/2$  para iluminarlo completamente.

Ahora bien, pensemos si existen polígonos escalera que tengan una situación del Caso 2, y más de una del Caso 1. La respuesta es SÍ.

El siguiente Polígono tiene dos situaciones del Caso 1 y una situación del Caso 2.



El mismo tiene diez vértices y puede ser iluminado totalmente con cuatro luces, en otras palabras, se lo puede iluminar con  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$  de alcance  $r/2$ .



Una vez analizada la cantidad de luces que se necesitan para iluminar polígonos escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  de radio  $r$  con  $L = r$ ,  $L = r - \varepsilon$  y  $L = r/2$ , ya podemos

hacer un estudio en forma conjunta. Evidentemente éste número depende de  $L$ . Esto se verá en el siguiente Teorema.

**Teorema 3.12**

Para todo polígono escalera  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  con  $n$  vértices y radio  $r$ , el número de luces vértice de alcance  $L$ , a veces necesarias y siempre suficientes para iluminarlos son:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } L \geq r \\ \lfloor n/4 \rfloor + O(1) & \text{si } (r/2) \leq L < r \end{array} \right\}$$

Demostración:

Sea  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$  un polígono escalera con  $n$  vértices y radio  $r$ . En caso de que  $L \geq r$ , colocando una luz en  $V$  se ilumina todo el polígono, tal como se demostró en la Propiedad 3.1. En la Propiedad 3.5 y en el Lema 3.6 se demostró que al rebajar ligeramente el alcance, podemos llegar a necesitar un número de luces igual a  $\lfloor n/4 \rfloor + 1$  o  $\lfloor n/4 \rfloor + 2$ . Y en todos los estudios que se hicieron con luces de alcance  $r/2$ , se vio que eran siempre necesarias  $\lfloor n/4 \rfloor + O(1)$  luces, donde  $O(1)$  varía según el polígono.

Con lo cual, si  $L \geq r$  entonces será necesaria una sola luz para iluminar todo el polígono  $P(V, a_1, a_2, \dots, a_m)$ , o  $\lfloor n/4 \rfloor + O(1)$  luces si  $(r/2) \leq L < r$ .

## Conclusiones:

Se puede ver que se puede pensar en una cota suficiente y necesaria para iluminar cualquier polígono escalera con luces de alcance  $r/2$ . Esta depende del alcance de iluminación y resulta ser  $\lfloor n/4 \rfloor + O(1)$ . A partir de estos resultados pueden hacerse estudios más profundos para fundamentar mejor los dos últimos casos. Lo que se hizo fue mostrar, presentando en forma exhaustiva diferentes métodos de construcción, que es cierto lo que dice el último teorema: “todo polígono escalera de radio  $r$  y  $n$  vértices se puede iluminar completamente con luces-vértice de alcance  $L$ , siempre y cuando éste sea de por lo menos  $r/2$ . Además no siempre resulta necesario utilizar  $n$  luces”.

Tal vez puedan profundizarse los resultados: durante el trabajo se vio que cualquier polígono escalera se puede iluminar con luces de alcance de cómo mínimo  $r/2$ , y el estudio interesante es cuando el alcance de iluminación es  $[r/2, r)$ . El último teorema asegura que no necesariamente se necesitarán  $n$  luces (tal vez en algún caso particular como el rectángulo), y tal como se puede observar durante el trabajo, la cota necesaria para poder iluminar a los polígonos escalera nunca supera  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$ , lo cual nos invita a CONJETURAR que  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  podría ser una cota suficiente para iluminar cualquier polígono escalera. Creemos que esta conjetura podría disparar la profundización de los resultados.

Se podría pensar también en luces no necesariamente en los vértices para poder mejorar la cota y podría extenderse el estudio a otro tipo de polígonos para poder ver si la cota  $\lfloor n/4 \rfloor + 4$  funciona para estos, y así poder construir una cota general que sirva para cualquier polígono, como por ejemplo en Polígonos Pirámide.

## Referencias bibliográficas

[1] Santiago Canales Cano y Gregorio Peñalver, enero 2008, “Visibilidad de Alcance Limitado en Polígonos Escalera”

[2] Nicolás, José Kranewitter, abril 2009, “Iluminación de polígonos simples mediante reflectores”, Universidad Abierta Interamericana, Página 7-8

[3] Rivero, Francisco; “Geometría Computacional”, Universidad de los Andes-Facultad de Ciencias Departamento de Matemáticas, Venezuela, Página8: recuperado de [http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por\\_profesor/lico/geometria\\_computacional.pdf](http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/lico/geometria_computacional.pdf)