

UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA

Facultad de Tecnología Informática



Licenciatura en Matemática

**Cuaterniones y ángulos de Euler para describir
rotaciones en $\mathbb{R}^3$**

Autor: Francisco Javier Somma
Directora: Dra. María Lorena Bergamini

**TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

- Diciembre 2018 -

Agradecimientos:

A mis padres, por el apoyo de siempre y por enseñarme los valores de la vida.

A mis hermanos, Celina y Federico.

A mi tía Liliana.

A mi compañera, Rita, por el incondicional apoyo, y por haber traído a este mundo a tres princesas hermosas: Camila, Candelaria y Guillermina.

A mis amigos de siempre, Víctor, Marcos y Martín, por los momentos compartidos y la confianza.

Dedico este trabajo a mi abuela Aurora. Ella sabe por qué.

Índice general

Resumen..	1
Capítulo 1: Introducción a los cuaterniones	2
1.1. Cuaterniones y su álgebra	2
1.2. Cuaterniones unitarios. Potenciación, exponenciación y logaritmos	17
1.3. Otras formas de representar a los cuaterniones y sus operaciones	22
1.4. $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo de división	24
Capítulo 2: Matrices ortogonales, rotaciones y fórmula de Rodrigues	27
2.1. Matrices ortogonales	27
2.2. Matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$	30
2.3. Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y fórmula de Rodrigues	32
2.4. Cuaterniones unitarios y fórmula de Rodrigues	40
2.5. Otros parámetros para representar una matriz de rotación en $\mathbb{R}^3$: ángulos y componentes de un cuaternión	45
Capítulo 3: Ángulos de Euler	59
Capítulo 4: Utilización del acelerómetro en un teléfono móvil para describir rotaciones en $\mathbb{R}^3$	66
4.1. Sensores en el teléfono móvil	66
4.2. ¿Qué es un acelerómetro?	66
4.3. Estimación de los ángulos pitch y roll	67
4.4. Eliminación de soluciones duplicadas limitando los ángulos pitch y roll	74
4.5. Implementación del software Mathematica para la visualización de una rotación de un teléfono móvil	75
Capítulo 5: A modo de cierre	78

Resumen:

El presente trabajo muestra la importancia que tienen los cuaterniones a la hora de describir rotaciones en el espacio tridimensional. Estos números, que surgieron por investigaciones del matemático irlandés William Rowan Hamilton, allá por el año 1843, se pueden utilizar como una alternativa al uso de los ángulos de Euler para describir cómo rota un objeto en $\mathbb{R}^3$. Dichos ángulos se usan, en la actualidad, en la industria aeroespacial.

Surgen las cuestiones, ¿cómo describir la rotación de un objeto en el espacio a través de cuaterniones?; ¿se puede relacionar un cuaternión con los ángulos de Euler?; ¿de qué manera?; ¿cómo se relaciona un cuaternión con una matriz?

Para responder los interrogantes anteriores, lo primero que debe estudiarse es la estructura algebraica del conjunto de cuaterniones. Para ello, y con el objeto de facilitar la comprensión de este trabajo, éste se ordena de la siguiente manera:

- Capítulo 1: Se introduce el concepto de cuaternión y su álgebra: operaciones entre cuaterniones y propiedades características de los mismos.
- Capítulo 2: Estudio de las matrices ortogonales, obtención y expresión de la fórmula de Rodrigues en forma matricial, y cómo vincular esta fórmula con los cuaterniones.
- Capítulo 3: Introducción a los ángulos de Euler y relación con una matriz de rotación.
- Capítulo 4: Concepto de acelerómetro. Uso del software Mathematica para mostrar la rotación de un teléfono móvil a través de los ángulos de Euler o de cuaterniones.
- Capítulo 5: Se exponen algunas consideraciones finales a modo de cierre.

Palabras clave:

Cuaternión – Matriz ortogonal – Fórmula de Rodrigues – Ángulos de Euler – Acelerómetro – Mathematica

Capítulo 1

Introducción a los cuaterniones

1.1. Cuaterniones y su álgebra

Definición 1.1.1. Un *cuaternión*, también llamado *número hipercomplejo*, viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \quad (1.1)$$

donde a, b, c, d son números reales e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son las tres unidades imaginarias.

Definición 1.1.2. Dado un cuaternión $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, es posible representarlo como:

$$\mathbf{q} = a + \bar{\mathbf{v}} = (a, b, c, d) \quad (1.1')$$

donde $a \in \mathbb{R}$ se denomina parte real y $\bar{\mathbf{v}} = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$ parte vectorial del cuaternión $\mathbf{q}$.

Definición 1.1.3. Al conjunto $\mathbb{H}$ de todas las expresiones formales dadas por (1.1) ó (1.1'):

$$\mathbb{H} = \{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

lo llamaremos el conjunto de los *cuaterniones reales* o *números de Hamilton*.

Definición 1.1.4. Un cuaternión $\mathbf{q}$ con parte real $a = 0$, tiene la forma $\mathbf{q} = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, y es llamado *cuaternión puro*. Denotaremos por $\mathbb{H}_p$ al conjunto de todos los cuaterniones puros:

$$\mathbb{H}_p = \{b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \mid b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

A continuación se definirán las operaciones de suma y producto en $\mathbb{H}$, y se analizarán sus propiedades.

Definición 1.1.5. Dados los cuaterniones $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ y $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$, la suma está definida por:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} + \mathbf{p} &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) + (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \\ &= (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)\mathbf{i} + (c_0 + c_1)\mathbf{j} + (d_0 + d_1)\mathbf{k} \\ &= (a_0 + a_1, b_0 + b_1, c_0 + c_1, d_0 + d_1)\end{aligned}$$

La suma de cuaterniones satisface la propiedad conmutativa, es decir:

$$\mathbf{q} + \mathbf{p} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$$

Se demostrará esto último. Siendo $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ y $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} + \mathbf{p} &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) + (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \\ &= (a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)\mathbf{i} + (c_0 + c_1)\mathbf{j} + (d_0 + d_1)\mathbf{k} \\ &= (a_1 + a_0) + (b_1 + b_0)\mathbf{i} + (c_1 + c_0)\mathbf{j} + (d_1 + d_0)\mathbf{k} \\ &= (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \\ &= \mathbf{p} + \mathbf{q}\end{aligned}$$

También se verifica la propiedad asociativa de cuaterniones en la suma, o sea:

$$\mathbf{q} + (\mathbf{p} + \mathbf{s}) = (\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{s}$$

Para demostrarlo, sean los cuaterniones $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{s} = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$.

Se calculará primero $\mathbf{q} + (\mathbf{p} + \mathbf{s})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} + (\mathbf{p} + \mathbf{s}) &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) + ((a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k})) \\ &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) + ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_0 + c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_0 + d_1 + d_2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Ahora se calculará $(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{s}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{s} &= ((a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) + (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})) + (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\ &= ((a_0 + a_1) + (b_0 + b_1)\mathbf{i} + (c_0 + c_1)\mathbf{j} + (d_0 + d_1)\mathbf{k}) + (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\ &= (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_0 + c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_0 + d_1 + d_2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbf{q} + (\mathbf{p} + \mathbf{s}) = (\mathbf{q} + \mathbf{p}) + \mathbf{s}$.

Definición 1.1.6. Dados los cuaterniones $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ y $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$, el producto de $\mathbf{q}$ con $\mathbf{p}$ está definido por:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \cdot (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \\ &= a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1)\mathbf{j} + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

El producto de cuaterniones no satisface la propiedad conmutativa. En general, el producto $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ no es igual a $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.

Para demostrarlo sólo hace falta calcular $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$. Entonces, por la definición anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) \cdot (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \\ &= a_1 \cdot a_0 - b_1 \cdot b_0 - c_1 \cdot c_0 - d_1 \cdot d_0 + (a_1 \cdot b_0 + b_1 \cdot a_0 + c_1 \cdot d_0 - d_1 \cdot c_0)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_1 \cdot c_0 - b_1 \cdot d_0 + c_1 \cdot a_0 + d_1 \cdot b_0)\mathbf{j} + (a_1 \cdot d_0 + b_1 \cdot c_0 - c_1 \cdot b_0 + d_1 \cdot a_0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Se puede observar que los coeficientes de las unidades imaginarias de las dos expresiones calculadas, son, en general, distintos, salvo casos especiales. Se demostró, entonces, que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \neq \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$.

El producto de cuaterniones satisface la propiedad asociativa, es decir, se cumple que:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})$$

Para demostrarlo, sean $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{s} = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$. Se calculará primero $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s}$, teniendo en cuenta la definición 1.1.6:

$$\begin{aligned} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} &= ((a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \cdot (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})) \cdot (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\ &= ((a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1)\mathbf{j} \\ &\quad + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1)\mathbf{k}) \cdot (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\ &= (a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot a_2 - (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot b_2 \\ &\quad - (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot c_2 - (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot d_2 \\ &\quad + ((a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot b_2 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot a_2 \\ &\quad + (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot d_2 - (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot c_2)\mathbf{i} \\ &\quad + ((a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot c_2 - (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot d_2 \\ &\quad + (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot a_2 + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot b_2)\mathbf{j} \\ &\quad + ((a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot d_2 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot c_2 \\ &\quad - (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot b_2 + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot a_2)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Ahora, se desarrollarán los productos de la parte real y de los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, por separado, de la expresión $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s}$.

La parte real de $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s}$ es:

$$\begin{aligned} &(a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot a_2 - (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot b_2 - \\ &(a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot c_2 - (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot d_2 = \\ &a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot b_0 \cdot b_1 - a_2 \cdot c_0 \cdot c_1 - a_2 \cdot d_0 \cdot d_1 - a_0 \cdot b_1 \cdot b_2 - a_1 \cdot b_0 \cdot b_2 - b_2 \cdot c_0 \cdot d_1 + \\ &b_2 \cdot c_1 \cdot d_0 - a_0 \cdot c_1 \cdot c_2 + b_0 \cdot c_2 \cdot d_1 - a_1 \cdot c_0 \cdot c_2 - b_1 \cdot c_2 \cdot d_0 - a_0 \cdot d_1 \cdot d_2 - b_0 \cdot c_1 \cdot d_2 + \\ &b_1 \cdot c_0 \cdot d_2 - a_1 \cdot d_0 \cdot d_2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

El coeficiente de $\mathbf{i}$ de $(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \mathbf{s}$ es:

$$\begin{aligned} & (a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot b_2 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot a_2 + \\ & (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot d_2 - (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot c_2 = \\ & a_0 \cdot a_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 - b_2 \cdot c_0 \cdot c_1 - b_2 \cdot d_0 \cdot d_1 + a_0 \cdot a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot a_2 \cdot b_0 + a_2 \cdot c_0 \cdot d_1 - \\ & a_2 \cdot c_1 \cdot d_0 + a_0 \cdot c_1 \cdot d_2 - b_0 \cdot d_1 \cdot d_2 + a_1 \cdot c_0 \cdot d_2 + b_1 \cdot d_0 \cdot d_2 - a_0 \cdot c_2 \cdot d_1 - b_0 \cdot c_1 \cdot c_2 + \\ & b_1 \cdot c_0 \cdot c_2 - a_1 \cdot c_2 \cdot d_0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

El coeficiente de $\mathbf{j}$ de $(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \mathbf{s}$ es:

$$\begin{aligned} & (a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot c_2 - (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot d_2 + \\ & (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot a_2 + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot b_2 = \\ & a_0 \cdot a_1 \cdot c_2 - b_0 \cdot b_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot c_1 \cdot c_2 - c_2 \cdot d_0 \cdot d_1 - a_0 \cdot b_1 \cdot d_2 - a_1 \cdot b_0 \cdot d_2 - c_0 \cdot d_1 \cdot d_2 + \\ & c_1 \cdot d_0 \cdot d_2 + a_0 \cdot a_2 \cdot c_1 - a_2 \cdot b_0 \cdot d_1 + a_1 \cdot a_2 \cdot c_0 + a_2 \cdot b_1 \cdot d_0 + a_0 \cdot b_2 \cdot d_1 + b_0 \cdot b_2 \cdot c_1 - \\ & b_1 \cdot b_2 \cdot c_0 + a_1 \cdot b_2 \cdot d_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

El coeficiente de $\mathbf{k}$ de $(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \mathbf{s}$ es:

$$\begin{aligned} & (a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1) \cdot d_2 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1) \cdot c_2 - \\ & (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1) \cdot b_2 + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1) \cdot a_2 = \\ & a_0 \cdot a_1 \cdot d_2 - b_0 \cdot b_1 \cdot d_2 - c_0 \cdot c_1 \cdot d_2 - d_0 \cdot d_1 \cdot d_2 + a_0 \cdot b_1 \cdot c_2 + a_1 \cdot b_0 \cdot c_2 + c_0 \cdot c_2 \cdot d_1 - \\ & c_1 \cdot c_2 \cdot d_0 - a_0 \cdot b_2 \cdot c_1 + b_0 \cdot b_2 \cdot d_1 - a_1 \cdot b_2 \cdot c_0 - b_1 \cdot b_2 \cdot d_0 + a_0 \cdot a_2 \cdot d_1 + a_2 \cdot b_0 \cdot c_1 - \\ & a_2 \cdot b_1 \cdot c_0 + a_1 \cdot a_2 \cdot d_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ahora se calculará $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}, \mathbf{s})$, también utilizando la definición 1.1.6:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}, \mathbf{s}) &= (a_0 + b_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j} + d_0 \mathbf{k}) \cdot ((a_1 + b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k}) \cdot (a_2 + b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k})) \\ &= a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) - b_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) \\ &\quad - c_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) - d_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) \\ &\quad + (a_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) + b_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) \\ &\quad + c_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) - d_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2)) \mathbf{i} \\ &\quad + (a_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) - b_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) \\ &\quad + c_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) + d_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2)) \mathbf{j} \\ &\quad + (a_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) + b_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) \\ &\quad - c_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) + d_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2)) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Se desarrollan ahora los productos de la parte real y de los coeficientes de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, por separado, de la expresión $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}, \mathbf{s})$.

La parte real de $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})$ es:

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) - b_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) - \\
& c_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) - d_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) = \\
& a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot b_1 \cdot b_2 - a_0 \cdot c_1 \cdot c_2 - a_0 \cdot d_1 \cdot d_2 - a_1 \cdot b_0 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_0 \cdot b_1 - b_0 \cdot c_1 \cdot d_2 + \\
& b_0 \cdot c_2 \cdot d_1 - a_1 \cdot c_0 \cdot c_2 + b_1 \cdot c_0 \cdot d_2 - a_2 \cdot c_0 \cdot c_1 - b_2 \cdot c_0 \cdot d_1 - a_1 \cdot d_0 \cdot d_2 - b_1 \cdot c_2 \cdot d_0 + \\
& b_2 \cdot c_1 \cdot d_0 - a_2 \cdot d_0 \cdot d_1
\end{aligned} \tag{1.6}$$

El coeficiente de $\mathbf{i}$ de $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})$ es:

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) + b_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) + \\
& c_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) - d_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) = \\
& a_0 \cdot a_1 \cdot b_2 + a_0 \cdot a_2 \cdot b_1 + a_0 \cdot c_1 \cdot d_2 - a_0 \cdot c_2 \cdot d_1 + a_1 \cdot a_2 \cdot b_0 - b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 - b_0 \cdot c_1 \cdot c_2 - \\
& b_0 \cdot d_1 \cdot d_2 + a_1 \cdot c_0 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_0 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_0 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_0 \cdot d_1 - a_1 \cdot c_2 \cdot d_0 + b_1 \cdot d_0 \cdot d_2 - \\
& a_2 \cdot c_1 \cdot d_0 - b_2 \cdot d_0 \cdot d_1
\end{aligned} \tag{1.7}$$

El coeficiente de $\mathbf{j}$ de $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})$ es:

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) - b_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) + \\
& c_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) + d_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) = \\
& a_0 \cdot a_1 \cdot c_2 - a_0 \cdot b_1 \cdot d_2 + a_0 \cdot a_2 \cdot c_1 + a_0 \cdot b_2 \cdot d_1 - a_1 \cdot b_0 \cdot d_2 - b_0 \cdot b_1 \cdot c_2 + b_0 \cdot b_2 \cdot c_1 - \\
& a_2 \cdot b_0 \cdot d_1 + a_1 \cdot a_2 \cdot c_0 - b_1 \cdot b_2 \cdot c_0 - c_0 \cdot c_1 \cdot c_2 - c_0 \cdot d_1 \cdot d_2 + a_1 \cdot b_2 \cdot d_0 + a_2 \cdot b_1 \cdot d_0 + \\
& c_1 \cdot d_0 \cdot d_2 - c_2 \cdot d_0 \cdot d_1
\end{aligned} \tag{1.8}$$

El coeficiente de $\mathbf{k}$ de $\mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})$ es:

$$\begin{aligned}
& a_0 \cdot (a_1 \cdot d_2 + b_1 \cdot c_2 - c_1 \cdot b_2 + d_1 \cdot a_2) + b_0 \cdot (a_1 \cdot c_2 - b_1 \cdot d_2 + c_1 \cdot a_2 + d_1 \cdot b_2) - \\
& c_0 \cdot (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2 + c_1 \cdot d_2 - d_1 \cdot c_2) + d_0 \cdot (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 - c_1 \cdot c_2 - d_1 \cdot d_2) = \\
& a_0 \cdot a_1 \cdot d_2 + a_0 \cdot b_1 \cdot c_2 - a_0 \cdot b_2 \cdot c_1 + a_0 \cdot a_2 \cdot d_1 + a_1 \cdot b_0 \cdot c_2 - b_0 \cdot b_1 \cdot d_2 + a_2 \cdot b_0 \cdot c_1 + \\
& b_0 \cdot b_2 \cdot d_1 - a_1 \cdot b_2 \cdot c_0 - a_2 \cdot b_1 \cdot c_0 - c_0 \cdot c_1 \cdot d_2 + c_0 \cdot c_2 \cdot d_1 + a_1 \cdot a_2 \cdot d_0 - b_1 \cdot b_2 \cdot d_0 - \\
& c_1 \cdot c_2 \cdot d_0 - d_0 \cdot d_1 \cdot d_2
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Se puede observar que (1.2) = (1.6), (1.3) = (1.7), (1.4) = (1.8) y (1.5) = (1.9). Por lo tanto, se cumple que $(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p} \cdot \mathbf{s})$.

Definición 1.1.6'. Sean los cuaterniones $\mathbf{q} = (a_0, \bar{\mathbf{u}})$ y $\mathbf{p} = (a_1, \bar{\mathbf{v}})$. El producto, en este caso, se puede escribir como:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \underbrace{a_0 \cdot a_1 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}}_a + \underbrace{a_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}}}_{\bar{\mathbf{v}}'} \quad (1.10)$$

La parte real es $a = a_0 \cdot a_1 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}}$ y la parte vectorial es $\bar{\mathbf{v}}' = a_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}}$. Se indica con “.” el producto escalar y con “ $\times$ ” el producto vectorial.

Obviamente esta definición coincide con la 1.1.6, ya que, si se llama $\bar{\mathbf{u}} = (b_0, c_0, d_0)$ y $\bar{\mathbf{v}} = (b_1, c_1, d_1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} &= a_0 \cdot a_1 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}} \\ &= a_0 \cdot a_1 - (b_0, c_0, d_0) \cdot (b_1, c_1, d_1) + a_0(b_1, c_1, d_1) + a_1(b_0, c_0, d_0) \\ &\quad + (b_0, c_0, d_0) \times (b_1, c_1, d_1) = \\ &= a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1 \\ &\quad + ((a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1), (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 \\ &\quad + d_0 \cdot b_1), (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1)) \\ &= a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1)\mathbf{j} + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Con esta notación del producto es fácil ver la no conmutatividad del producto, ya que

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = a_0 \cdot a_1 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= a_1 \cdot a_0 - \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{u}} + a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} + a_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{u}} = \\ &= a_0 \cdot a_1 - \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_0 \cdot \bar{\mathbf{v}} + a_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

son distintos, a menos que $\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$.

Sean ahora los cuaterniones básicos (la unidad real y las unidades imaginarias):

$$\begin{cases} 1 = (1, 0, 0, 0) \\ \mathbf{i} = (0, 1, 0, 0) \\ \mathbf{j} = (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{k} = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

Utilizando la definición 1.1.6, se observa que:

$$\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{k} = -\mathbf{j}.\mathbf{i}, \quad \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{i} = -\mathbf{k}.\mathbf{j}, \quad \mathbf{k}.\mathbf{i} = \mathbf{j} = -\mathbf{i}.\mathbf{k} \quad (1.11)$$

Por la misma definición, las tres unidades imaginarias $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tienen cuadrado igual a -1 , o sea:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 \quad (1.11')$$

Además, al aplicar la propiedad asociativa y teniendo en cuenta las ecuaciones (1.11), se verifica que $\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k} = -1$, ya que:

$$\mathbf{i}.\mathbf{j}.\mathbf{k} = (\mathbf{i}.\mathbf{j}).\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = \mathbf{k}^2 = -1$$

Se agrega, finalmente, que siendo $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ y $\mathbf{s}$ cuaterniones, se cumplen las siguientes propiedades distributivas:

$$\mathbf{q} . (\mathbf{p} + \mathbf{s}) = \mathbf{q} . \mathbf{p} + \mathbf{q} . \mathbf{s}$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{s}) . \mathbf{q} = \mathbf{p} . \mathbf{q} + \mathbf{s} . \mathbf{q}$$

Sean los cuaterniones $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{s} = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$. Se demostrará la primera propiedad distributiva, utilizando la definición 1.1.6.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} . (\mathbf{p} + \mathbf{s}) &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) . ((a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k})) \\ &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) . ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}) \\ &= a_0 . (a_1 + a_2) - b_0 . (b_1 + b_2) - c_0 . (c_1 + c_2) - d_0 . (d_1 + d_2) \\ &\quad + (a_0 . (b_1 + b_2) + b_0 . (a_1 + a_2) + c_0 . (d_1 + d_2) - d_0 . (c_1 + c_2))\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0 . (c_1 + c_2) - b_0 . (d_1 + d_2) + c_0 . (a_1 + a_2) + d_0 . (b_1 + b_2))\mathbf{j} \\ &\quad + (a_0 . (d_1 + d_2) + b_0 . (c_1 + c_2) - c_0 . (b_1 + b_2) + d_0 . (a_1 + a_2))\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_0 \cdot a_1 - b_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot c_1 - d_0 \cdot d_1 + (a_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot a_1 + c_0 \cdot d_1 - d_0 \cdot c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot d_1 + c_0 \cdot a_1 + d_0 \cdot b_1)\mathbf{j} + (a_0 \cdot d_1 + b_0 \cdot c_1 - c_0 \cdot b_1 + d_0 \cdot a_1)\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_0 \cdot a_2 - b_0 \cdot b_2 - c_0 \cdot c_2 - d_0 \cdot d_2 + (a_0 \cdot b_2 + b_0 \cdot a_2 + c_0 \cdot d_2 - d_0 \cdot c_2)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0 \cdot c_2 - b_0 \cdot d_2 + c_0 \cdot a_2 + d_0 \cdot b_2)\mathbf{j} + (a_0 \cdot d_2 + b_0 \cdot c_2 - c_0 \cdot b_2 + d_0 \cdot a_2)\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{s}
\end{aligned}$$

Ahora se demuestra, también utilizando la definición 1.1.6, la segunda propiedad distributiva.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} + \mathbf{s}) \cdot \mathbf{q} &= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i} + (c_1 + c_2)\mathbf{j} + (d_1 + d_2)\mathbf{k}) \cdot (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \\
&= (a_1 + a_2) \cdot a_0 - (b_1 + b_2) \cdot b_0 - (c_1 + c_2) \cdot c_0 - (d_1 + d_2) \cdot d_0 \\
&\quad + ((a_1 + a_2) \cdot b_0 + (b_1 + b_2) \cdot a_0 + (c_1 + c_2) \cdot d_0 - (d_1 + d_2) \cdot c_0)\mathbf{i} \\
&\quad + ((a_1 + a_2) \cdot c_0 - (b_1 + b_2) \cdot d_0 + (c_1 + c_2) \cdot a_0 + (d_1 + d_2) \cdot b_0)\mathbf{j} \\
&\quad + ((a_1 + a_2) \cdot d_0 + (b_1 + b_2) \cdot c_0 - (c_1 + c_2) \cdot b_0 + (d_1 + d_2) \cdot a_0)\mathbf{k} \\
&= a_1 \cdot a_0 + a_2 \cdot a_0 - b_1 \cdot b_0 - b_2 \cdot b_0 - c_1 \cdot c_0 - c_2 \cdot c_0 - d_1 \cdot d_0 - d_2 \cdot d_0 \\
&\quad + (a_1 \cdot b_0 + a_2 \cdot b_0 + b_1 \cdot a_0 + b_2 \cdot a_0 + c_1 \cdot d_0 + c_2 \cdot d_0 - d_1 \cdot c_0 - d_2 \cdot c_0)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_1 \cdot c_0 + a_2 \cdot c_0 - b_1 \cdot d_0 - b_2 \cdot d_0 + c_1 \cdot a_0 + c_2 \cdot a_0 + d_1 \cdot b_0 + d_2 \cdot b_0)\mathbf{j} \\
&\quad + (a_1 \cdot d_0 + a_2 \cdot d_0 + b_1 \cdot c_0 + b_2 \cdot c_0 - c_1 \cdot b_0 - c_2 \cdot b_0 + d_1 \cdot a_0 + d_2 \cdot a_0)\mathbf{k} \\
&= (a_1 \cdot a_0 - b_1 \cdot b_0 - c_1 \cdot c_0 - d_1 \cdot d_0 + (a_1 \cdot b_0 + b_1 \cdot a_0 + c_1 \cdot d_0 - d_1 \cdot c_0)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_1 \cdot c_0 - b_1 \cdot d_0 + c_1 \cdot a_0 + d_1 \cdot b_0)\mathbf{j} + (a_1 \cdot d_0 + b_1 \cdot c_0 - c_1 \cdot b_0 + d_1 \cdot a_0)\mathbf{k}) \\
&\quad + (a_2 \cdot a_0 - b_2 \cdot b_0 - c_2 \cdot c_0 - d_2 \cdot d_0 + (a_2 \cdot b_0 + b_2 \cdot a_0 + c_2 \cdot d_0 - d_2 \cdot c_0)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_2 \cdot c_0 - b_2 \cdot d_0 + c_2 \cdot a_0 + d_2 \cdot b_0)\mathbf{j} + (a_2 \cdot d_0 + b_2 \cdot c_0 - c_2 \cdot b_0 + d_2 \cdot a_0)\mathbf{k}) \\
&= \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned}$$

La expresión del producto de cuaterniones puede obtenerse a partir de la propiedad distributiva y las ecuaciones 1.11 y 1.11'. Sean $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$, $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$. Entonces:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \cdot (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}
&= a_0a_1 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0c_1\mathbf{j} + a_0d_1\mathbf{k} + a_1b_0\mathbf{i} - b_0b_1 + b_0c_1\mathbf{ij} + b_0d_1\mathbf{ik} + a_1c_0\mathbf{j} \\
&\quad + c_0b_1\mathbf{ji} - c_0c_1 + c_0d_1\mathbf{jk} + a_1d_0\mathbf{k} + d_0b_1\mathbf{ki} + d_0c_1\mathbf{kj} - d_0d_1 \\
&= a_0a_1 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0c_1\mathbf{j} + a_0d_1\mathbf{k} + a_1b_0\mathbf{i} - b_0b_1 + b_0c_1\mathbf{k} - b_0d_1\mathbf{j} + a_1c_0\mathbf{j} \\
&\quad - c_0b_1\mathbf{k} - c_0c_1 + c_0d_1\mathbf{i} + a_1d_0\mathbf{k} + d_0b_1\mathbf{j} - d_0c_1\mathbf{i} - d_0d_1 \\
&= a_0a_1 - b_0b_1 - c_0c_1 - d_0d_1 + (a_0b_1 + a_1b_0 + c_0d_1 - d_0c_1)\mathbf{i} \\
&\quad + (a_0c_1 - b_0d_1 + a_1c_0 + d_0b_1)\mathbf{j} + (a_0d_1 + b_0c_1 - c_0b_1 + a_1d_0)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Definición 1.1.7. La multiplicación de un cuaternión $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ por un número real λ distinto de cero, está definida por:

$$\lambda \cdot \mathbf{q} = \lambda \cdot (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k})$$

$$= \lambda a_0 + (\lambda b_0)\mathbf{i} + (\lambda c_0)\mathbf{j} + (\lambda d_0)\mathbf{k} = a_0\lambda + (b_0\mathbf{i})\lambda + (c_0\mathbf{j})\lambda + (d_0\mathbf{k})\lambda = \mathbf{q} \cdot \lambda$$

Acá sí se cumple la propiedad conmutativa del producto entre un cuaternión $\mathbf{q}$ y un número real λ .

Ahora, por la definición 1.1.2, se puede representar al cuaternión $\mathbf{q}$ como $\mathbf{q} = a_0 + \bar{\mathbf{v}}$.

Si se lo multiplica por un número real λ distinto de cero, se tiene que:

$$\lambda \cdot \mathbf{q} = \lambda \cdot (a_0 + \bar{\mathbf{v}}) = \lambda a_0 + \lambda \bar{\mathbf{v}}$$

Definición 1.1.8. El *conjugado* del cuaternión $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ se define por:

$$\bar{\mathbf{q}} = a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k},$$

Se satisfacen las siguientes propiedades relacionadas con el conjugado de un cuaternión $\mathbf{q}$:

Propiedad 1.1.1. $\bar{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{q}$

Demostración. Sea $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$. Entonces, por definición de conjugado, se tiene que $\bar{\mathbf{q}} = a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k}$. Ahora se calcula $\bar{\bar{\mathbf{q}}}$:

$$\bar{\bar{\mathbf{q}}} = a_0 - (-b_0\mathbf{i}) - (-c_0\mathbf{j}) - (-d_0\mathbf{k}) = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k} = \mathbf{q} \quad \blacksquare$$

Propiedad 1.1.2. $\overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{q}}$

Demostración. Sean $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ y $\mathbf{p} = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} &= a_0a_1 - b_0b_1 - c_0c_1 - d_0d_1 + (a_0b_1 + a_1b_0 + c_0d_1 - d_0c_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (a_0c_1 - b_0d_1 + a_1c_0 + d_0b_1)\mathbf{j} + (a_0d_1 + b_0c_1 - c_0b_1 + a_1d_0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}} &= a_0a_1 - b_0b_1 - c_0c_1 - d_0d_1 - (a_0b_1 + a_1b_0 + c_0d_1 - d_0c_1)\mathbf{i} - (a_0c_1 - \\ &\quad b_0d_1 + a_1c_0 + d_0b_1)\mathbf{j} - (a_0d_1 + b_0c_1 - c_0b_1 + a_1d_0)\mathbf{k} \\ &= a_0a_1 - b_0b_1 - c_0c_1 - d_0d_1 + (-a_0b_1 - a_1b_0 - c_0d_1 + d_0c_1)\mathbf{i} \\ &\quad + (-a_0c_1 + b_0d_1 - a_1c_0 - d_0b_1)\mathbf{j} + (-a_0d_1 - b_0c_1 + c_0b_1 - a_1d_0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Se calculará ahora $\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{q}}$. Se tiene:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{q}} &= (a_1 - b_1\mathbf{i} - c_1\mathbf{j} - d_1\mathbf{k}) \cdot (a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k}) \\ &= a_1a_0 - b_1b_0 - c_1c_0 - d_1d_0 + (-b_0a_1 - b_1a_0 + c_1d_0 - d_1c_0)\mathbf{i} \\ &\quad + (-c_0a_1 - b_1d_0 - c_1a_0 + d_1b_0)\mathbf{j} + (-d_0a_1 + b_1c_0 - c_1b_0 - d_1a_0)\mathbf{k} \\ &= a_1a_0 - b_1b_0 - c_1c_0 - d_1d_0 + (-b_1a_0 - a_1b_0 - d_1c_0 + c_1d_0)\mathbf{i} \\ &\quad + (-c_1a_0 + d_1b_0 - a_1c_0 - b_1d_0)\mathbf{j} + (-d_1a_0 - c_1b_0 + b_1c_0 - a_1d_0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Así quedó demostrado que $\overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} \cdot \overline{\mathbf{q}}$

Propiedad 1.1.2'. $\overline{\lambda \cdot \mathbf{q}} = \lambda \cdot \overline{\mathbf{q}}$

Demostración. Sea $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ y λ un número real. Entonces:

$$\overline{\lambda \cdot \mathbf{q}} = \overline{\lambda \cdot (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k})} = \overline{\lambda \cdot a_0 + (\lambda \cdot b_0)\mathbf{i} + (\lambda \cdot c_0)\mathbf{j} + (\lambda \cdot d_0)\mathbf{k}}$$

$$= \lambda \cdot a_0 - (\lambda \cdot b_0)\mathbf{i} - (\lambda \cdot c_0)\mathbf{j} - (\lambda \cdot d_0)\mathbf{k} = \lambda \cdot (a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k}) = \lambda \cdot \overline{\mathbf{q}} \quad \blacksquare$$

Propiedad 1.1.3. $\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} = a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2$

Demostración. Sean $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ y $\bar{\mathbf{q}} = a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k}$.
Entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= (a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k})(a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k}) \\
 &= a_0^2 - a_0b_0\mathbf{i} - a_0c_0\mathbf{j} - a_0d_0\mathbf{k} + a_0b_0\mathbf{i} + b_0^2 - b_0c_0\mathbf{ij} - b_0d_0\mathbf{ik} + c_0a_0\mathbf{j} \\
 &\quad - c_0b_0\mathbf{ji} + c_0^2 - c_0d_0\mathbf{jk} + d_0a_0\mathbf{k} - d_0b_0\mathbf{ki} - d_0c_0\mathbf{kj} + d_0^2 \\
 &= a_0^2 - a_0b_0\mathbf{i} - a_0c_0\mathbf{j} - a_0d_0\mathbf{k} + a_0b_0\mathbf{i} + b_0^2 - b_0c_0\mathbf{k} + b_0d_0\mathbf{j} + a_0c_0\mathbf{j} \\
 &\quad + c_0b_0\mathbf{k} + c_0^2 - c_0d_0\mathbf{i} + a_0d_0\mathbf{k} - d_0b_0\mathbf{j} + d_0c_0\mathbf{i} + d_0^2 \\
 &= a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2
 \end{aligned}$$

Ahora se desarrollará $\bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}$:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q} &= (a_0 - b_0\mathbf{i} - c_0\mathbf{j} - d_0\mathbf{k}).(a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}) \\
 &= a_0^2 + a_0b_0\mathbf{i} + a_0c_0\mathbf{j} + a_0d_0\mathbf{k} - a_0b_0\mathbf{i} + b_0^2 - b_0c_0\mathbf{ij} - b_0d_0\mathbf{ik} - c_0a_0\mathbf{j} \\
 &\quad - c_0b_0\mathbf{ji} + c_0^2 - c_0d_0\mathbf{jk} - a_0d_0\mathbf{k} - d_0b_0\mathbf{ki} - d_0c_0\mathbf{kj} + d_0^2 \\
 &= a_0^2 + a_0b_0\mathbf{i} + a_0c_0\mathbf{j} + a_0d_0\mathbf{k} - a_0b_0\mathbf{i} + b_0^2 - b_0c_0\mathbf{k} + b_0d_0\mathbf{j} - a_0c_0\mathbf{j} + c_0b_0\mathbf{k} \\
 &\quad + c_0^2 - c_0d_0\mathbf{i} - a_0d_0\mathbf{k} - d_0b_0\mathbf{j} + d_0c_0\mathbf{i} + d_0^2 \\
 &= a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2
 \end{aligned}$$

Se demostró que $\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}$. Acá sí se cumple la propiedad conmutativa del producto de cuaterniones.

Definición 1.1.9. Sea $q \in \mathbb{H}$. Definimos la *norma* de q por:

$$\|q\| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}$$

O, equivalentemente, $\|q\|^2 = q \cdot \bar{q} = a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2$.

A continuación se demostrarán tres propiedades importantes de la norma de un cuaternión q .

Propiedad 1.1.4. $\|q\| = \|\bar{q}\|$

Demostración. Por definición, se tiene que $\|\bar{q}\| = \sqrt{\bar{q} \cdot \bar{\bar{q}}}$. Por la propiedad 1.1.1, $\bar{\bar{q}} = q$. Entonces $\sqrt{\bar{q} \cdot \bar{\bar{q}}} = \sqrt{\bar{q} \cdot q}$. Ahora, por la propiedad 1.1.3, $\bar{q} \cdot q = q \cdot \bar{q}$. Por lo tanto, $\|\bar{q}\| = \sqrt{\bar{q} \cdot \bar{\bar{q}}} = \sqrt{\bar{q} \cdot q} = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \|q\|$ ■

Propiedad 1.1.5. $\|q \cdot p\| = \|q\| \cdot \|p\|$

Demostración. Por definición, se tiene que $\|q \cdot p\| = \sqrt{q \cdot p \cdot \overline{q \cdot p}}$. Por la propiedad 1.1.2, $\overline{q \cdot p} = \bar{p} \cdot \bar{q}$. Entonces, $\sqrt{q \cdot p \cdot \overline{q \cdot p}} = \sqrt{q \cdot p \cdot \bar{p} \cdot \bar{q}}$. Pero $p \cdot \bar{p}$ es un número real no negativo. Por lo tanto, por la definición 1.1.7, $\sqrt{q \cdot p \cdot \bar{p} \cdot \bar{q}} = \sqrt{q \cdot \bar{q} \cdot p \cdot \bar{p}}$. Y como $q \cdot \bar{q}$ también es un número real no negativo, se tiene que $\sqrt{q \cdot \bar{q} \cdot p \cdot \bar{p}} = \sqrt{q \cdot \bar{q}} \cdot \sqrt{p \cdot \bar{p}} = \|q\| \cdot \|p\|$ ■

Propiedad 1.1.6. $(\|q \cdot p\|)^n = \|q\|^n \cdot \|p\|^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por la propiedad 1.1.5 se tiene que $\|q \cdot p\| = \|q\| \cdot \|p\|$. Elevando ambos miembros a la potencia n , se tiene que $(\|q \cdot p\|)^n = (\|q\| \|p\|)^n$. Si se distribuye n a ambos factores reales:

$$(\|q \cdot p\|)^n = (\|q\| \|p\|)^n = \|q\|^n \cdot \|p\|^n \quad \blacksquare$$

Definición 1.1.10. El *inverso multiplicativo* de un cuaternión $\mathbf{q}$ no nulo se define por:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}$$

Además, si $\|\mathbf{q}\| = 1$, se tiene que $\mathbf{q}^{-1} = \bar{\mathbf{q}}$, ya que:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{\bar{\mathbf{q}}}{1} = \bar{\mathbf{q}}$$

Se destacarán las siguientes propiedades relacionadas con el inverso multiplicativo de un cuaternión $\mathbf{q}$ no nulo:

Propiedad 1.1.7. Si $\mathbf{q}$ es un cuaternión no nulo, se tiene que $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{q} = 1$

Demostración. Utilizando la definición 1.1.10, y multiplicando a la izquierda por $\mathbf{q}$ se tiene que:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q} \cdot \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2}$$

Ahora, como $\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}$, por la expresión equivalente de la definición 1.1.9, se observa que:

$$\frac{\mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\|\mathbf{q}\|^2} = 1 \quad \blacksquare$$

Propiedad 1.1.8. Si $\mathbf{q}$ es un cuaternión no nulo, se tiene que $(\mathbf{q}^{-1})^{-1} = \mathbf{q}$

Demostración. Por la propiedad 1.1.2' y la definición 1.1.10, se tiene que:

$$(\mathbf{q}^{-1})^{-1} = \left(\frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} \right)^{-1} = \frac{\overline{\left(\frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} \right)}}{\left\| \frac{\bar{\mathbf{q}}}{\|\mathbf{q}\|^2} \right\|^2} = \frac{\frac{\bar{\bar{\mathbf{q}}}}{\|\mathbf{q}\|^2}}{\frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\|\mathbf{q}\|^4}} = \frac{\mathbf{q}}{\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2}} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|^2} \cdot \|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q} \quad \blacksquare$$

Propiedad 1.1.9. Si q y p son cuaterniones no nulos, se tiene que $(q \cdot p)^{-1} = p^{-1} \cdot q^{-1}$

Demostración. Por la definición 1.1.10, se tiene que:

$$(q \cdot p)^{-1} = \frac{\overline{q \cdot p}}{\|q \cdot p\|^2}$$

Entonces, si se aplica la definición nombrada a p^{-1} y q^{-1} y las propiedades 1.1.2 y 1.1.6, se tiene que:

$$p^{-1} \cdot q^{-1} = \frac{\overline{p}}{\|p\|^2} \cdot \frac{\overline{q}}{\|q\|^2} = \frac{\overline{p} \cdot \overline{q}}{\|p\|^2 \cdot \|q\|^2} = \frac{\overline{q \cdot p}}{\|q\|^2 \cdot \|p\|^2} = \frac{\overline{q \cdot p}}{\|q \cdot p\|^2} \quad \blacksquare$$

Definición 1.1.11. Un cuaternión $\check{q}$ es un cuaternión *unitario* si $\|\check{q}\| = 1$.

Por ejemplo, el cuaternión $\check{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$ es unitario, ya que:

$$\|\check{q}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

Definición 1.1.11'. Un cuaternión $\check{q}$ es unitario si y sólo si $\check{q}^{-1} = \check{\overline{q}}$, ya que:

$$\check{q}^{-1} = \frac{\check{\overline{q}}}{\|\check{q}\|^2} = \frac{\check{\overline{q}}}{1} = \check{\overline{q}}$$

Definición 1.1.12. Todo cuaternión q no nulo tiene asociado un cuaternión unitario $\check{q}$. Su expresión es:

$$\check{q} = \frac{q}{\|q\|}$$

Definición 1.1.13. La *traza* de un cuaternión $q = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ se define como:

$$tr(q) = q + \check{q} = 2a_0$$

Por lo tanto, un cuaternión $\mathbf{q}$ es un cuaternión puro si y sólo si $\bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}$ o equivalentemente si y sólo si $tr(\mathbf{q}) = 0$.

1.2. Cuaterniones unitarios. Potenciación, exponenciación y logaritmos

Un número complejo unitario tiene la forma $z = \cos(\phi) + i \cdot \sin(\phi)$, donde i es la llamada unidad imaginaria y ϕ es un ángulo perteneciente al intervalo $[0, 2\pi)$.

Un cuaternión unitario puede representarse de manera similar por:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \cos(\phi) + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \sin(\phi) = (\cos(\phi), \sin(\phi) \cdot b_0, \sin(\phi) \cdot c_0, \sin(\phi) \cdot d_0) \quad (1.12)$$

donde $\tilde{\mathbf{v}} = (b_0, c_0, d_0)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ de norma 1 y ϕ es un ángulo perteneciente al intervalo $[0, 2\pi)$. El cuaternión $\tilde{\mathbf{q}}$ es unitario porque:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{q}}\| &= \sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \cdot b_0^2 + \sin^2(\phi) \cdot c_0^2 + \sin^2(\phi) \cdot d_0^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) \cdot (b_0^2 + c_0^2 + d_0^2)} = \sqrt{\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)} = 1 \end{aligned}$$

El cuaternión $\mathbf{q} = (a_0 + \bar{\mathbf{v}}) = (a_0, b_0, c_0, d_0)$ tiene asociado el siguiente cuaternión unitario:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{a_0 + \bar{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{a_0}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\|\bar{\mathbf{v}}\|}{\|\mathbf{q}\|} \cdot \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|} = \frac{a_0}{\|\mathbf{q}\|} + \frac{\|\bar{\mathbf{v}}\|}{\|\mathbf{q}\|} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$$

Para obtener la expresión anterior, se utilizan las definiciones 1.1.2, 1.1.7 y 1.1.12. Ahora, definiendo el ángulo $\phi \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos(\phi) = \frac{a_0}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}} \quad (1.13)$$

$$\sin(\phi) = \frac{\|\bar{\mathbf{v}}\|}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}} \quad (1.14)$$

se obtiene la expresión (1.12).

La identidad de Euler para números complejos es:

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i.\text{sen}(\phi)$$

Esta identidad se puede generalizar para cuaterniones puros unitarios $0 + \check{\mathbf{v}}$:

$$e^{\check{\mathbf{v}}\phi} = \cos(\phi) + \check{\mathbf{v}}.\text{sen}(\phi) = \mathbf{q} \quad (1.15)$$

donde $\check{\mathbf{v}} = (b_0, c_0, d_0)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ de norma 1 y ϕ es un ángulo perteneciente al intervalo $[0, \pi]$.

Definición 1.2.1. Se define la *potencia* de un cuaternión unitario $\check{\mathbf{q}} = \cos(\phi) + \check{\mathbf{v}}.\text{sen}(\phi)$, siendo $\check{\mathbf{v}} = (b_0, c_0, d_0)$ un vector de $\mathbb{R}^3$ de norma 1 y ϕ un ángulo perteneciente al intervalo $[0, \pi]$, como:

$$\check{\mathbf{q}}^t = (e^{\check{\mathbf{v}}\phi})^t = (\cos(\phi) + \check{\mathbf{v}}.\text{sen}(\phi))^t = \cos(t\phi) + \check{\mathbf{v}}.\text{sen}(t\phi) \quad (1.16)$$

donde t es un número real.

Definición 1.2.2. Se define la *exponenciación* de un cuaternión $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k} = a_0 + \bar{\mathbf{v}}$, como:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{q}} &= e^{a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}} = e^{a_0 + \bar{\mathbf{v}}} = e^{a_0}e^{\bar{\mathbf{v}}} = e^{a_0}e^{\check{\mathbf{v}}\|\bar{\mathbf{v}}\|} = e^{a_0}(\cos(\|\bar{\mathbf{v}}\|) + \check{\mathbf{v}}.\text{sen}(\|\bar{\mathbf{v}}\|)) \\ &= e^{a_0} \left(\cos\left(\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}\right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\text{sen}\left(\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}\right)}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2 + d_0^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ahora, si el cuaternión $\check{\mathbf{q}}$ es unitario y tiene parte imaginaria no nula, ocurre que:

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2 = 1 \Leftrightarrow b_0^2 + c_0^2 + d_0^2 = 1 - a_0^2 \Leftrightarrow \sqrt{b_0^2 + c_0^2 + d_0^2} = \sqrt{1 - a_0^2}$$

Se aclara que la expresión $1 - a_0^2$ es un número positivo, es decir, $1 - a_0^2 > 0$, ya que $b_0^2 + c_0^2 + d_0^2 > 0$. Entonces,

$$1 - a_0^2 > 0 \Leftrightarrow a_0^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < a_0 < 1 \Leftrightarrow a_0 \in (-1, 1)$$

Por lo tanto, la ecuación (1.17) puede escribirse de la siguiente manera:

$$e^{\tilde{q}} = e^{a_0 + b_0 i + c_0 j + d_0 k} = e^{a_0} \left(\cos(\sqrt{1 - a_0^2}) + \bar{v} \cdot \frac{\text{sen}(\sqrt{1 - a_0^2})}{\sqrt{1 - a_0^2}} \right) \quad (1.18)$$

Se dará un ejemplo para mostrar la equivalencia entre las ecuaciones (1.17) y (1.18).

Sea el cuaternión $\tilde{q} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{13}}{4}j + \frac{1}{4}k = \frac{1}{4} + (-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{13}}{4}, \frac{1}{4})$, con $a_0 = \frac{1}{4}$ y el vector $\bar{v} = (-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{13}}{4}, \frac{1}{4})$. El cuaternión $\tilde{q}$ es unitario:

$$\|\tilde{q}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{13}{16} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16}} = \sqrt{1} = 1$$

Utilizando la ecuación (1.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i + \frac{\sqrt{13}}{4}j + \frac{1}{4}k} = e^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right) + \bar{v} \cdot \frac{\text{sen}\left(\sqrt{\frac{15}{16}}\right)}{\sqrt{\frac{15}{16}}} \right) \\ e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}\right) + \bar{v} \cdot \frac{\text{sen}\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} \right) \\ e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \bar{v} \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \right) \\ e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \bar{v} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ahora, si se utiliza la ecuación (1.18), se tiene que:

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}i + \frac{1}{4}j + \frac{1}{4}k} = e^{\frac{1}{4}} \left(\cos \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\text{sen} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}} \right) \\
e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}} \left(\cos \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}} \right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\text{sen} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{16}}} \right) \\
e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\text{sen} \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right)}{\frac{\sqrt{15}}{4}} \right) \\
e^{\tilde{q}} &= e^{\frac{1}{4}} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} \cdot \text{sen} \left(\frac{\sqrt{15}}{4} \right) \right) \tag{1.20}
\end{aligned}$$

Se observa la igualdad entre las ecuaciones (1.19) y (1.20).

Definición 1.2.3. Se define el *logaritmo* de un cuaternión unitario $\tilde{q} = \cos(\phi) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{sen}(\phi)$, siendo $\bar{\mathbf{v}} = (b_0, c_0, d_0)$ un vector de $\mathbb{R}^3$ de norma 1 y ϕ un ángulo perteneciente al intervalo $[0, \pi]$ como:

$$\log_e(\tilde{q}) = \log_e(\cos(\phi) + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{sen}(\phi)) = \log_e(e^{\bar{\mathbf{v}}\phi}) = \bar{\mathbf{v}}\phi \tag{1.21}$$

Es importante notar que, como el producto de cuaterniones no es conmutativo, las identidades usuales para la exponencial y el logaritmo reales, no siempre se satisfacen para la exponencial y el logaritmo de cuaterniones.

En particular, si $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{H}$, los cuaterniones $e^{\mathbf{q}} \cdot e^{\mathbf{p}}$ y $e^{\mathbf{q}+\mathbf{p}}$ no son necesariamente iguales. De igual manera, los cuaterniones $\log_e(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p})$ y $\log_e(\mathbf{q}) + \log_e(\mathbf{p})$, con $\|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{p}\| = 1$, no son necesariamente iguales. Se verán estos casos a través de unos ejemplos.

Sean los cuaterniones $\mathbf{q} = (0, 1, 0, 0)$ y $\mathbf{p} = (0, 0, 1, 0)$.

Se calculará $e^{\mathbf{q}}$ utilizando la expresión (1.17):

$$e^{\mathbf{q}} = e^0 \cdot (\cos(1) + (1, 0, 0) \cdot \text{sen}(1)) = \cos(1) + (\text{sen}(1), 0, 0)$$

De la misma manera, se calcula $e^{\mathbf{p}}$.

$$e^{\mathbf{p}} = e^0 \cdot (\cos(1) + (0, 1, 0) \cdot \text{sen}(1)) = \cos(1) + (0, \text{sen}(1), 0)$$

Si se calcula ahora $e^{\mathbf{q}} \cdot e^{\mathbf{p}}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{q}} \cdot e^{\mathbf{p}} &= (\cos(1) + (\text{sen}(1), 0, 0)) \cdot (\cos(1) + (0, \text{sen}(1), 0)) \\ &= \cos^2(1) + (0, \cos(1)\text{sen}(1), 0) + (\cos(1)\text{sen}(1), 0, 0) + (0, 0, \text{sen}^2(1)) \\ &= \cos^2(1) + (\cos(1) \cdot \text{sen}(1), \cos(1) \cdot \text{sen}(1), \text{sen}^2(1)) \end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathbf{q} + \mathbf{p} = (0, 1, 1, 0)$. Si se calcula $e^{\mathbf{q}+\mathbf{p}}$ a través de la (1.17), se deduce:

$$e^{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = \cos(\sqrt{2}) + \left(\frac{\text{sen}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}, \frac{\text{sen}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Se observa que $e^{\mathbf{q}} \cdot e^{\mathbf{p}} \neq e^{\mathbf{q}+\mathbf{p}}$.

Ahora se mostrará que $\log_e(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \neq \log_e(\mathbf{q}) + \log_e(\mathbf{p})$, utilizando los mismos cuaterniones $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$ del ejemplo anterior. Fácilmente se comprueban que son unitarios.

Aplicando la definición 1.1.6, se tiene:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = (0, 0, 0, 1)$$

A través de la ecuación 1.13, y recordando que $\phi \in [0, \pi]$, se tiene:

$$\cos(\phi) = \frac{0}{\|\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\|} \Leftrightarrow \cos(\phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = \pi/2$$

Utilizando ahora la definición 1.2.3, se tiene:

$$\log_e(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) = (0, 0, 1) \cdot \frac{\pi}{2} = \left(0, 0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Por otro lado, usando la misma definición, y la ecuación 1.13, se observa que:

$$\log_e(\mathbf{q}) = (1, 0, 0) \cdot \frac{\pi}{2} = \left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$$

$$\log_e(\mathbf{p}) = (0, 1, 0) \cdot \frac{\pi}{2} = \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Entonces,

$$\log_e(\mathbf{q}) + \log_e(\mathbf{p}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\right)$$

Por lo tanto, $\log_e(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) \neq \log_e(\mathbf{q}) + \log_e(\mathbf{p})$.

1.3. Otras formas de representar a los cuaterniones y sus operaciones

Se vió anteriormente que a un cuaternión $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ se lo puede representar a través del vector (a_0, b_0, c_0, d_0) y también como $\mathbf{q} = (a_0, \bar{\mathbf{v}}) = a_0 + \bar{\mathbf{v}}$, donde $a_0 \in \mathbb{R}$ y $\bar{\mathbf{v}} = (b_0, c_0, d_0) \in \mathbb{R}^3$. Otra manera de representar a los cuaterniones es por medio de matrices de 2×2 con coeficientes complejos y de matrices de 4×4 con coeficientes reales. Se definen ahora estos dos casos.

Definición 1.3.1. Sea el conjunto de las matrices de 2×2 con coeficientes complejos de la forma:

$$\hat{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\} \subset M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \quad (1.22)$$

Donde $z_1 = a_0 + b_0\mathbf{i}$ y $z_2 = c_0 + d_0\mathbf{i}$. Es claro que si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \hat{\mathbb{H}}$, su suma $\mathbf{p} + \mathbf{q} \in \hat{\mathbb{H}}$.

Aunque no es tan claro, también el producto $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \in \hat{\mathbb{H}}$. Se demostrará esto.

Sean $z_3 = e_0 + f_0\mathbf{i}$ y $z_4 = g_0 + h_0\mathbf{i}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_3 & z_4 \\ -\bar{z}_4 & \bar{z}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 \bar{z}_4 & z_1 z_4 + z_2 \bar{z}_3 \\ -\bar{z}_2 z_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_4 & -\bar{z}_2 z_4 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} z_1 z_3 - z_2 \bar{z}_4 & z_1 z_4 + z_2 \bar{z}_3 \\ -\overline{(z_1 z_4 + z_2 \bar{z}_3)} & \overline{z_1 z_3 - z_2 \bar{z}_4} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Así, el producto $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \in \hat{\mathbb{H}}$.

Cada cuaternión $\mathbf{q} = a_0 + b_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j} + d_0 \mathbf{k}$ puede ser correspondido con una matriz de la forma (1.22) de la siguiente manera:

$$a_0 + b_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j} + d_0 \mathbf{k} \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \mathbf{i} & c_0 + d_0 \mathbf{i} \\ -(c_0 - d_0 \mathbf{i}) & a_0 - b_0 \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Se tiene, entonces, una correspondencia entre los conjuntos $\mathbb{H}$ y $\hat{\mathbb{H}}$, la cual define una función $\mathbb{H} \mapsto \hat{\mathbb{H}}$ tal que es biyectiva y se cumple que:

$$(a_0 + b_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j} + d_0 \mathbf{k}) + (e_0 + f_0 \mathbf{i} + g_0 \mathbf{j} + h_0 \mathbf{k}) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \mathbf{i} & c_0 + d_0 \mathbf{i} \\ -(c_0 - d_0 \mathbf{i}) & a_0 - b_0 \mathbf{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_0 + f_0 \mathbf{i} & g_0 + h_0 \mathbf{i} \\ -(g_0 - h_0 \mathbf{i}) & e_0 - f_0 \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

$$(a_0 + b_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j} + d_0 \mathbf{k}) \cdot (e_0 + f_0 \mathbf{i} + g_0 \mathbf{j} + h_0 \mathbf{k}) \mapsto \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \mathbf{i} & c_0 + d_0 \mathbf{i} \\ -(c_0 - d_0 \mathbf{i}) & a_0 - b_0 \mathbf{i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_0 + f_0 \mathbf{i} & g_0 + h_0 \mathbf{i} \\ -(g_0 - h_0 \mathbf{i}) & e_0 - f_0 \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

A los cuaterniones básicos $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ le corresponden las siguientes matrices:

$$1 \rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} \rightarrow i' = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \rightarrow j' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \rightarrow k' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Cualquier elemento $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in \hat{\mathbb{H}}$, con $z_1 = a_0 + b_0 \mathbf{i}$ y $z_2 = c_0 + d_0 \mathbf{i}$ se puede expresar como $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = a_0 \cdot I + b_0 i' + c_0 j' + d_0 k'$, ya que:

$$a_0 \cdot I + b_0 i' + c_0 j' + d_0 k' = a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b_0 \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} + c_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d_0 \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -b_0 \mathbf{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_0 \\ -c_0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & d_0 \mathbf{i} \\ d_0 \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \mathbf{i} & c_0 + d_0 \mathbf{i} \\ -c_0 + d_0 \mathbf{i} & a_0 - b_0 \mathbf{i} \end{pmatrix}$$

Esto hace más clara la correspondencia entre $\widehat{\mathbb{H}}$ y $\mathbb{H}$. En particular:

$$I \mapsto 1 \quad i' \mapsto \mathbf{i} \quad j' \mapsto \mathbf{j} \quad k' \mapsto \mathbf{k}$$

Se representó, entonces, a los cuaterniones como matrices de 2×2 con coeficientes complejos.

Definición 1.3.2. Un cuaternión $\mathbf{q} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j} + d_0\mathbf{k}$ puede ser representado a través de una matriz de 4×4 , con coeficientes reales, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \begin{pmatrix} a_0 & -b_0 & d_0 & -c_0 \\ b_0 & a_0 & -c_0 & -d_0 \\ -d_0 & c_0 & a_0 & -b_0 \\ c_0 & d_0 & b_0 & a_0 \end{pmatrix} = \\ &= a_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_I + b_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{i'} + c_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{j'} + d_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{k'} \end{aligned}$$

donde $a_0, b_0, c_0, d_0 \in \mathbb{R}$ y los elementos I, i', j' y k' también son cuaterniones. En forma equivalente se puede denotar:

$$\mathbf{q} = a_0 I + b_0 i' + c_0 j' + d_0 k' \quad (1.23)$$

1.4. $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo de división

Se mostrará, en esta sección, que la terna $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo de división.

Definición 1.4.1. Una *operación binaria cerrada* en un conjunto no vacío A es una aplicación de $A \times A$ en A .

Por ejemplo, la suma de cuaterniones es una operación binaria cerrada en el conjunto $\mathbb{H}$, ya que, dados los cuaterniones $\mathbf{q}$ y $\mathbf{p}$, se tiene que $\mathbf{q} + \mathbf{p} \in \mathbb{H}$.

Definición 1.4.2. Un conjunto no vacío A con una operación binaria $*$ definida en él, se dice que es un *grupo* si se cumplen las siguientes propiedades:

- I. La operación binaria $*$ es cerrada en A .
- II. La operación binaria $*$ es asociativa, es decir que, para todo $a_1 \in A$, $a_2 \in A$ y $a_3 \in A$, se tiene:

$$a_1 * (a_2 * a_3) = (a_1 * a_2) * a_3$$

- III. Existe un elemento neutro $e \in A$ tal que:

$$e * a = a * e, \quad \forall a \in A$$

- IV. Para todo $a \in A$, existe un elemento $a' \in A$, denominado inverso de a , tal que:

$$a * a' = a' * a = e$$

El conjunto $(\mathbb{H}, +)$ es un grupo ya que la operación suma $(+)$ es cerrada y asociativa en $\mathbb{H}$; existe un elemento neutro en la suma, que es el cuaternión nulo y existe, además, para todo cuaternión $\mathbf{q}$, un elemento inverso de la suma, $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$, tal que:

$$\mathbf{q} + \mathbf{q}' = \mathbf{q} + (-\mathbf{q}) = 0.$$

Definición 1.4.3. Si $(A,*)$ es un grupo y la operación binaria $*$ posee la propiedad de que $a_1 * a_2 = a_2 * a_1$, $\forall a_1, a_2 \in A$, que se llama propiedad conmutativa, se dirá que $(A,*)$ es un *grupo abeliano*.

El conjunto $(\mathbb{H}, +)$ es un grupo abeliano, ya que la suma de cuaterniones satisface la propiedad conmutativa.

Definición 1.4.4. Un conjunto no vacío A dotado de dos operaciones binarias cerradas, suma $(+)$ y producto $(\cdot)$, representado como la terna $(A, +, \cdot)$, se llama *anillo* si se cumplen las siguientes propiedades:

- I. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
- II. El producto $\cdot$ es asociativo.
- III. Se cumplen las propiedades distributivas, es decir:

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$(b+c).a = b.a + c.a$$

para cualquier $a \in A, b \in A, c \in A$.

Como $(\mathbb{H}, +)$ es un grupo abeliano, el producto de cuaterniones es asociativo y, además, se cumplen las propiedades distributivas, la terna $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo.

Definición 1.4.5. Dado un anillo $(A, +, \cdot)$, se dice que es un *anillo de división* si todos sus elementos no nulos son inversibles respecto del producto.

Como todo cuaternión $\mathbf{q}$ no nulo tiene inverso multiplicativo y, como la terna $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ es un anillo, ésta también es un anillo de división.

Capítulo 2

Matrices ortogonales, rotaciones y fórmula de Rodrigues

En este capítulo se definirán matrices ortogonales y se mostrará la estrecha relación que éstas tienen con las rotaciones. Primero, se analizarán las propiedades del conjunto de matrices ortogonales. Luego se estudiará la forma de las matrices ortogonales de 2×2 , y a continuación se darán caracterizaciones de las matrices ortogonales de 3×3 , que son las que permiten estudiar las rotaciones en el espacio.

2.1. Matrices ortogonales

Sea $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de tamaño $n \times m$, de coeficientes reales.

Definición 2.1.1. Sea A una matriz cuadrada de orden n , es decir, $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es una matriz ortogonal si $A^{-1} = A^T$, o sea, si:

$$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$$

Se verán ahora algunas propiedades de matrices ortogonales.

Propiedad 2.1.1. El determinante de una matriz ortogonal es siempre 1 ó -1 .

Demostración. Sea A una matriz ortogonal, entonces se cumple que $A \cdot A^T = I$. Por lo tanto, $\det(A \cdot A^T) = \det(I)$. Como $\det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T)$ y $\det(A) = \det(A^T)$, se verifica que $\det(A \cdot A^T) = (\det(A))^2 = \det(I) = 1$. Entonces $\det(A) = 1$ ó $\det(A) = -1$ ■

Propiedad 2.1.2. Si A y B son matrices ortogonales de orden n , entonces $A \cdot B$ y $B \cdot A$ son ortogonales.

Demostración. Se quiere ver que $(A \cdot B)^T = (A \cdot B)^{-1}$. En efecto, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$. Por hipótesis se tiene que $A^T = A^{-1}$ y $B^T = B^{-1}$.

Entonces $B^T \cdot A^T = B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$. Por lo tanto, $(A \cdot B)^T = (A \cdot B)^{-1}$, o sea, $A \cdot B$ es una matriz ortogonal. Análogamente se demuestra que $B \cdot A$ es ortogonal. ■

Propiedad 2.1.3. La matriz identidad de orden n es ortogonal, para todo n natural.

Demostración. Sea I la matriz identidad que pertenece a $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, con $n \in \mathbb{N}$. Como $I^T = I = I^{-1}$, se tiene que, $I^T = I^{-1}$. Entonces I es ortogonal. ■

Propiedad 2.1.4. Si A y B son matrices ortogonales, en general, $A + B$ no es ortogonal y $k \cdot A$ no es ortogonal, siendo k un número real, con $k \neq 1$ y $k \neq -1$.

Demostración. Sea $A = B = I$. Entonces A y B son ortogonales. Pero $A + B = 2I$ no es ortogonal ya que $\det(A + B) = \det(2I) = 2 \cdot \det(I) = 2$. Por lo tanto, $A + B$ no es ortogonal.

Sea A la matriz identidad de orden n y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 1$ y $k \neq -1$. Entonces:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A) = k^n \cdot \det(I) = k^n \neq 1$$

Por lo tanto, $k \cdot A$ no es ortogonal. ■

Propiedad 2.1.5. La traspuesta de una matriz ortogonal es ortogonal.

Demostración. Sea A una matriz ortogonal. Se quiere ver que A^T es ortogonal, es decir, que $(A^T)^T = (A^T)^{-1}$. Como, por hipótesis, $A^T = A^{-1}$, se demostrará que A^T es ortogonal. Entonces:

$$A = (A^T)^T = (A^{-1})^{-1} = (A^T)^{-1}$$

Por lo tanto, A^T es una matriz ortogonal. ■

Como corolario de la propiedad anterior, se tiene que la inversa de una matriz ortogonal es ortogonal, ya que, siendo A una matriz ortogonal, se tiene que $A^T = A^{-1}$, y por la proposición anterior, A^T es una matriz ortogonal. Por lo tanto, A^{-1} es ortogonal.

Definición 2.1.2. Sea $O(n)$ el conjunto de todas las matrices ortogonales de orden n .

$O(n)$ tiene estructura de grupo con la multiplicación de matrices, ya que:

- Si $A \in O(n)$ y $B \in O(n)$, se vió, por la propiedad 2.1.2, que $A \cdot B \in O(n)$.
- Si $A \in O(n)$, $B \in O(n)$ y $C \in O(n)$, se cumple la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, es decir:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- Existe elemento neutro, que es la matriz identidad I .
- Existe elemento inverso, pues, por el corolario de la propiedad 2.1.5, se tiene que $A^{-1} \in O(n)$, para toda matriz ortogonal $A \in O(n)$.

Definición 2.1.3. Se define el subgrupo $SO(n) \subseteq O(n)$ de la siguiente forma:

$$SO(n) = \{A \in O(n) / \det(A) = 1\}$$

$SO(n)$ recibe el nombre de grupo ortogonal especial, o de las transformaciones ortogonales que preservan la orientación. Se mostrará ahora por qué $SO(n)$ es un grupo con la multiplicación de matrices.

- Si $A \in SO(n)$ y $B \in SO(n)$, entonces, $A \cdot B \in SO(n)$, ya que:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$$

- Si $A \in SO(n)$, $B \in SO(n)$ y $C \in SO(n)$, se cumple la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices, es decir:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

- En $SO(n)$ existe el elemento neutro, que es la matriz identidad I . Es decir, $I \in SO(n)$, ya que $\det(I) = 1$.

- Si $A \in SO(n)$, entonces $A^{-1} \in SO(n)$, llamado inverso de A , tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Como $A \in SO(n)$, entonces $\det(A) = 1$. Por lo tanto:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \cdot \det(A^{-1}) = \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Quedó probado, entonces, que $A^{-1} \in SO(n)$.

2.2. Matriz de rotación en $\mathbb{R}^2$

Definición 2.2.1. Sea el grupo $SO(2) = \{A \in O(2) / \det(A) = 1\}$, es decir, $SO(2)$ es el conjunto de las matrices ortogonales de orden 2, con $\det(A) = 1$.

Se estudiará ahora cómo son estas matrices.

Para toda matriz $A \in O(2)$, se tiene que $A^T = A^{-1}$ y $A \cdot A^T = I$. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Entonces se cumple lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De aquí se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

Por un lado, como $a^2 + b^2 = 1$, entonces existe un ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que:

$$\begin{cases} a = \cos(\theta) \\ b = \sin(\theta) \end{cases}$$

Por otro lado, como $ac + bd = 0$, necesariamente $ac = -bd$. Luego, si $a \neq 0$, se tiene que:

$c = -\frac{bd}{a}$. Sea $\lambda = \frac{d}{a}$, entonces $c = -b \cdot \lambda = -\text{sen}(\theta) \cdot \lambda$. Se calculará ahora c^2 y d^2 .

Entonces:

$$c^2 = (-\text{sen}(\theta) \cdot \lambda)^2 = \text{sen}^2(\theta) \cdot \lambda^2$$

$$d^2 = (a \cdot \lambda)^2 = (\cos(\theta) \cdot \lambda)^2 = \cos^2(\theta) \cdot \lambda^2$$

Por lo tanto:

$$c^2 + d^2 = \text{sen}^2(\theta) \cdot \lambda^2 + \cos^2(\theta) \cdot \lambda^2 = (\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \cdot \lambda^2 = \lambda^2 = 1$$

O sea, $\lambda^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$. Si $\lambda = 1$. Entonces, $c = -\text{sen}(\theta)$ y $a = d$.

La matriz ortogonal A queda representada de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Como transformación lineal en el plano, A representa una rotación de ángulo θ en sentido horario y centro en el origen.

Ahora, si $\lambda = -1$, entonces $c = b$ y $d = -a$. Por lo tanto, la matriz A queda así:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Esta matriz tiene determinante igual a -1 , ya que:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = -\cos^2(\theta) - \text{sen}^2(\theta) = -(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)) = -1$$

Aquí, A representa una simetría ortogonal respecto de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente $\text{tg}(\frac{\theta}{2})$. O, alternativamente, representa una rotación de ángulo θ seguida de una simetría respecto del eje x .

De las ecuaciones (2.1) se puede ver que las filas de la matriz A son vectores ortonormales, es decir, son ortogonales entre sí, y tienen norma igual a 1. Lo mismo ocurre con las columnas de A .

Por otro lado, si se analiza la situación $\alpha = 0$, se obtienen casos particulares de las matrices 2.2 o 2.3.

2.3. Rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y fórmula de Rodrigues

En el espacio $\mathbb{R}^3$ no es tan inmediato especificar la matriz que rota un vector por un ángulo θ alrededor de un eje arbitrario.

Se derivará ahora la forma de una matriz que representa una rotación en $\mathbb{R}^3$, alrededor de un eje dado.

Se plantea en $\mathbb{R}^3$ el giro de un vector $\tilde{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$ alrededor de un eje en la dirección de un vector $\tilde{\mathbf{v}}$, es decir, con $\|\tilde{\mathbf{v}}\| = 1$, en un ángulo θ en sentido positivo. En la figura 1 se representan los vectores $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$, y el plano Ω , que contiene al punto $\bar{\mathbf{a}}$, centro del giro, ortogonal a $\tilde{\mathbf{v}}$. Se supone que el producto vectorial $\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0}$, ya que, de lo contrario, $\tilde{\mathbf{u}}$ quedaría invariante por la rotación. Sea $\varphi \in (0, \pi)$ el ángulo entre $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}$.

El espacio de referencia es $x_1x_2x_3$ con origen en $(0,0,0)$ y versores canónicos $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

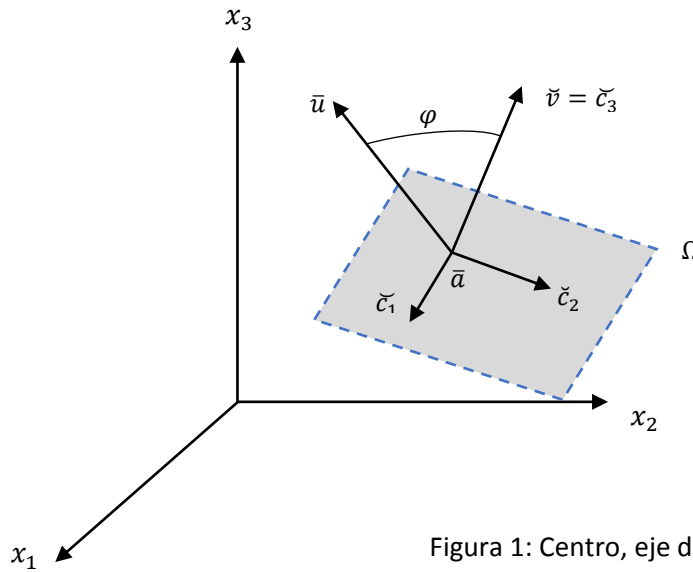


Figura 1: Centro, eje de rotación, y vector a rotar



Entonces:

Se utiliza aquí el hecho de que $\tilde{\mathbf{v}} \times \check{\mathbf{c}}_1 = \check{\mathbf{c}}_2$, de las ecuaciones (2.4) y también que $\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$.

A continuación se calculará $(\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) \times \tilde{\mathbf{v}}$, haciendo uso de la expresión obtenida anteriormente. Entonces:

$$(\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) \times \tilde{\mathbf{v}} = |\tilde{\mathbf{u}}|. \text{sen}(\varphi) \check{\mathbf{c}}_2 \times \tilde{\mathbf{v}} = |\tilde{\mathbf{u}}|. \text{sen}(\varphi) \check{\mathbf{c}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta la ortogonalidad de $\check{\mathbf{c}}_1$ y $\tilde{\mathbf{v}}$, y que $\tilde{\mathbf{v}}$ es un versor, se tiene que:

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = (\text{sen}(\varphi). |\tilde{\mathbf{u}}| \check{\mathbf{c}}_1 + \cos(\varphi). |\tilde{\mathbf{u}}| \tilde{\mathbf{v}}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} = |\tilde{\mathbf{u}}|. |\tilde{\mathbf{v}}|^2 \cos(\varphi) = \cos(\varphi). |\tilde{\mathbf{u}}| = \bar{\mathbf{u}}_3 \quad (2.7)$$

Ahora, al reemplazar (2.6) y (2.7) en (2.5), resulta que:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_3 = \underbrace{(\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) \times \tilde{\mathbf{v}}}_{\bar{\mathbf{u}}_1} + \underbrace{(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}}_{\bar{\mathbf{u}}_3} \quad (2.8)$$

Observando la figura 2, el vector que se busca es $\tilde{\mathbf{u}}_{rot}$, que surge de rotar $\tilde{\mathbf{u}}$ alrededor de $\tilde{\mathbf{v}}$ un ángulo θ en sentido positivo. Además, se tiene que:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot} = \tilde{\mathbf{u}}_{rot_{\Omega}} + \bar{\mathbf{u}}_3 \quad (2.9)$$

Siendo $\tilde{\mathbf{u}}_{rot_{\Omega}}$ la proyección ortogonal de $\tilde{\mathbf{u}}_{rot}$ sobre el plano Ω . Se cumple que $|\tilde{\mathbf{u}}_{rot_{\Omega}}| = |\bar{\mathbf{u}}_1|$. Por otra parte, la componente $\bar{\mathbf{u}}_3$ no cambia, pues el giro es alrededor de $\tilde{\mathbf{v}}$. Entonces:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot_{\Omega}} = \cos(\theta). |\bar{\mathbf{u}}_1| \check{\mathbf{c}}_1 + \text{sen}(\theta). |\bar{\mathbf{u}}_1| \check{\mathbf{c}}_2 \quad (2.10)$$

Pero, por la ecuación (2.4) y como $|\bar{\mathbf{u}}_1| \check{\mathbf{c}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_1$, se tiene que:

$$|\bar{\mathbf{u}}_1| \check{\mathbf{c}}_2 = |\bar{\mathbf{u}}_1| \tilde{\mathbf{v}} \times \check{\mathbf{c}}_1 = \tilde{\mathbf{v}} \times |\bar{\mathbf{u}}_1| \check{\mathbf{c}}_1 = \tilde{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{u}}_1$$

Reemplazando en (2.10), se tiene:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot_{\Omega}} = \cos(\theta). \bar{\mathbf{u}}_1 + \text{sen}(\theta). \tilde{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{u}}_1 \quad (2.11)$$

Ahora se reescribirá la ecuación (2.9), usando la nueva expresión de $\tilde{\mathbf{u}}_{rot_{\Omega}}$.

Por lo tanto:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot} = \cos(\theta) \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 + \sin(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{u}}_1 + \bar{\mathbf{u}}_3 \quad (2.12)$$

De esta manera, si se utilizan las expresiones de $\bar{\mathbf{u}}_1$ y de $\bar{\mathbf{u}}_3$ de la ecuación (2.8), la ecuación (2.12) queda así:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot} = \cos(\theta) \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) \times \tilde{\mathbf{v}} + \sin(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times [(\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) \times \tilde{\mathbf{v}}] + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.13)$$

El doble producto vectorial verifica:

$$(\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) \times \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.14)$$

Reemplazando (2.14) en (2.13) se tiene que:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot} = \cos(\theta) \cdot [\tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}] + \sin(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times [\tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}] + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.15)$$

Por último, se observa que:

$$\tilde{\mathbf{v}} \times [\tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}] = \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}$$

Se observa que el segundo término, $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}})$, es nulo, pues, $\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$.

Si se reemplaza esta última expresión en (2.15), se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_{rot} &= \cos(\theta) \cdot [\tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}}] + \sin(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{rot} &= \cos(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \cos(\theta) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \sin(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{rot} &= \cos(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \sin(\theta) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} + [1 - \cos(\theta)] \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es la denominada *fórmula de Rodrigues*.

A continuación, se la expresará en forma matricial. Para ello, se puede observar que siendo $\tilde{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)^T$ y $\tilde{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)^T$, su producto vectorial es:

$$\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} = (v_2 \cdot u_3 - v_3 \cdot u_2, v_3 \cdot u_1 - v_1 \cdot u_3, v_1 \cdot u_2 - v_2 \cdot u_1)$$

Ese producto se puede expresar matricialmente con:

$$\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}}_W \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (2.17)$$

Por otra parte:

$$\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^T = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (v_1 \quad v_2 \quad v_3) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Ahora se calculará $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}$. Entonces:

$$\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} u_1 v_1^2 + u_2 v_1 v_2 + u_3 v_1 v_3 \\ u_1 v_1 v_2 + u_2 v_2^2 + u_3 v_2 v_3 \\ u_1 v_1 v_3 + u_2 v_2 v_3 + u_3 v_3^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{v}}} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{v}}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{u}}} \quad (2.19)$$

Siendo $I \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ la matriz identidad, con las ecuaciones (2.17) y (2.19), la fórmula de Rodrigues puede expresarse así:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot} = \cos(\theta) \cdot I \tilde{\mathbf{u}} + \sin(\theta) \cdot W \tilde{\mathbf{u}} + [1 - \cos(\theta)] \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^T \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.20)$$

De la anterior ecuación se saca factor común $\tilde{\mathbf{u}}$ y se obtiene:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{rot} = \underbrace{(\cos(\theta) \cdot I + \sin(\theta) \cdot W + [1 - \cos(\theta)] \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}}^T)}_{R_\theta} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = R_\theta \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) es la fórmula de Rodrigues en forma matricial, donde R_θ es la matriz de rotación.

Por último, desarrollando la expresión de R_θ , se obtiene:

$$R_\theta = \cos(\theta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(\theta) \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} + [1 - \cos(\theta)] \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_1 v_2 & v_2^2 & v_2 v_3 \\ v_1 v_3 & v_2 v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Reemplazando $\sin(\theta) = S$ y $\cos(\theta) = C$, y desarrollando la ecuación anterior, se tiene:

$$R_\theta = \begin{pmatrix} [1 - C]v_1^2 + C & [1 - C]v_1 v_2 - S v_3 & [1 - C]v_1 v_3 + S v_2 \\ [1 - C]v_1 v_2 + S v_3 & [1 - C]v_2^2 + C & [1 - C]v_2 v_3 - S v_1 \\ [1 - C]v_1 v_3 - S v_2 & [1 - C]v_2 v_3 + S v_1 & [1 - C]v_3^2 + C \end{pmatrix} \quad (2.22')$$

R_θ es una matriz ortogonal, es decir, se cumple:

$$R_\theta \cdot R_\theta^T = R_\theta^T \cdot R_\theta = I$$

Se mostrará esto último:

$$R_\theta \cdot R_\theta^T = [C \cdot I + S \cdot W + [1 - C] \check{v} \check{v}^T] \cdot [C \cdot I + S \cdot W + [1 - C] \check{v} \check{v}^T]^T$$

Si se reescribe el segundo factor se tiene:

$$[C \cdot I + S \cdot W + [1 - C] \check{v} \check{v}^T]^T = C \cdot I + S \cdot W^T + [1 - C] \cdot (\check{v} \check{v}^T)^T$$

Pero $W^T = -W$, ya que, siendo $W = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$W^T = \begin{pmatrix} 0 & v_3 & -v_2 \\ -v_3 & 0 & v_1 \\ v_2 & -v_1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} = -W$$

Por otro lado, $(\check{v} \check{v}^T)^T = (\check{v}^T)^T \check{v}^T = \check{v} \check{v}^T$.

Si se reemplaza en $C \cdot I + S \cdot W^T + [1 - C](\check{v} \check{v}^T)^T$ las expresiones obtenidas recientemente, se tiene que:

$$C \cdot I + S \cdot W^T + [1 - C](\check{v} \check{v}^T)^T = C \cdot I - S \cdot W + [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T$$

Entonces,

$$R_\theta \cdot R_\theta^T = [C \cdot I + S \cdot W + [1 - C] \check{v} \check{v}^T] \cdot [C \cdot I - S \cdot W + [1 - C] \check{v} \check{v}^T]$$

$$\begin{aligned}
&= C^2.I - S.C.W + C.[1 - C].\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T + S.C.W - S^2.W.W + S.[1 - C].W.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T + \\
&\quad C.[1 - C].\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T - S.[1 - C].\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T.W + [1 - C]^2.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T \\
&= C^2.I + C.[1 - C].\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T - S^2.W.W + S.[1 - C].W.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T + C.[1 - C].\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T - \\
&\quad S.[1 - C].\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T.W + [1 - C]^2.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T
\end{aligned}$$

Por un lado, se tiene que $\check{\mathbf{v}}^T\check{\mathbf{v}} = |\check{\mathbf{v}}|^2 = 1 \Rightarrow \check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T.\check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T = \check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T$. Ahora se calculará $W.W$.

$$W.W = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_3^2 - v_2^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & -v_3^2 - v_1^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & -v_2^2 - v_1^2 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, se reescribirán los coeficientes de la diagonal principal de la matriz anterior. Entonces:

$$-v_3^2 - v_2^2 = v_1^2 - 1$$

$$-v_3^2 - v_1^2 = v_2^2 - 1$$

$$-v_2^2 - v_1^2 = v_3^2 - 1$$

Si se reemplazan los coeficientes de la diagonal principal por las expresiones obtenidas, se tiene que:

$$W.W = \begin{pmatrix} v_1^2 - 1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 - 1 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, si se suma la matriz identidad I a $W.W$. Entonces:

$$\begin{aligned}
W.W + I &= \begin{pmatrix} v_1^2 - 1 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 - 1 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \\
&= (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $W.W + I = \check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T$, o sea $W.W = \check{\mathbf{v}}\check{\mathbf{v}}^T - I$.

Por último, se mostrará que $W \cdot \check{v}$ es igual a la matriz nula, es decir, se cumple que $W \cdot \check{v} = \bar{0}$.

$$W \cdot \check{v} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $W \cdot \check{v} \check{v}^T = \bar{0} \cdot \check{v}^T = \bar{0}$. De manera análoga se muestra que $\check{v} \check{v}^T \cdot W = \bar{0}$. Se reescribirá ahora $R_\theta \cdot R_\theta^T$, utilizando las expresiones obtenidas. Entonces:

$$\begin{aligned} R_\theta \cdot R_\theta^T &= [C \cdot I + S \cdot W + [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T] \cdot [C \cdot I - S \cdot W + [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T] \\ &= C^2 \cdot I + C \cdot [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot (\check{v} \check{v}^T - I) + S \cdot [1 - C] \cdot \bar{0} + C \cdot [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T - S \cdot [1 - C] \cdot \bar{0} + [1 - C]^2 \cdot \check{v} \check{v}^T \\ &= C^2 \cdot I + 2C \cdot [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot (\check{v} \check{v}^T - I) + [1 - C]^2 \cdot \check{v} \check{v}^T \\ &= C^2 \cdot I + 2C \cdot [1 - C] \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot \check{v} \check{v}^T + S^2 \cdot I + [1 - C]^2 \cdot \check{v} \check{v}^T \\ &= C^2 \cdot I + 2C \cdot \check{v} \check{v}^T - 2C^2 \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot \check{v} \check{v}^T + S^2 \cdot I + [1 - 2C + C^2] \cdot \check{v} \check{v}^T \\ &= C^2 I + 2C \cdot \check{v} \check{v}^T - 2C^2 \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot \check{v} \check{v}^T + S^2 \cdot I + \check{v} \check{v}^T - 2C \cdot \check{v} \check{v}^T + C^2 \cdot \check{v} \check{v}^T \\ &= (C^2 + S^2) \cdot I - 2C^2 \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot \check{v} \check{v}^T + \check{v} \check{v}^T + C^2 \cdot \check{v} \check{v}^T \\ &= I - C^2 \cdot \check{v} \check{v}^T - S^2 \cdot \check{v} \check{v}^T + \check{v} \check{v}^T \\ &= I - (C^2 + S^2) \check{v} \check{v}^T + \check{v} \check{v}^T \\ &= I - \check{v} \check{v}^T + \check{v} \check{v}^T = I \end{aligned}$$

Por lo tanto, R_θ es una matriz ortogonal. Se muestra, de manera análoga, que $R_\theta^T \cdot R_\theta = I$. Se mostrará, ahora, que $\det(R_\theta) = 1$, con la ayuda del software Mathematica, que da la siguiente expresión simplificada del mismo, luego de que se le indicara que $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\det(R_\theta) &= v_1^2 C^2 + v_2^2 C^2 + v_3^2 C^2 + C^3 - v_1^2 C^3 - v_2^2 C^3 - v_3^2 C^3 + v_1^4 S^2 + 2v_1^2 v_2^2 S^2 \\
&\quad + v_2^4 S^2 + 2v_1^2 v_3^2 S^2 + 2v_2^2 v_3^2 S^2 + v_3^4 S^2 + v_1^2 C S^2 - v_1^4 C S^2 + v_2^2 C S^2 \\
&\quad - 2v_1^2 v_2^2 C S^2 - v_2^4 C S^2 + v_3^2 C S^2 - 2v_1^2 v_3^2 C S^2 - 2v_2^2 v_3^2 C S^2 - v_3^4 C S^2 \\
\det(R_\theta) &= -(-v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + (-1 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)C) \cdot (C^2 + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)S^2)
\end{aligned}$$

Como $C^2 + S^2 = 1$, se observa:

$$\det(R_\theta) = -(-1) \cdot (C^2 + S^2) = 1$$

Se deduce que $R_\theta \in SO(3)$.

Proposición 2.3.1. El vector $\vec{v}$ es autovector de la matriz $R(\theta)$.

Demostración. Se quiere ver que $R(\theta) \cdot \vec{v} = \vec{v}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
R(\theta) \cdot \vec{v} &= (\cos(\theta) \cdot I + \sin(\theta) \cdot W + [1 - \cos(\theta)] \cdot \vec{v} \vec{v}^T) \cdot \vec{v} \\
&= \cos(\theta) \cdot I \cdot \vec{v} + \sin(\theta) \cdot W \cdot \vec{v} + [1 - \cos(\theta)] \cdot \vec{v} \vec{v}^T \cdot \vec{v} \\
&= \cos(\theta) \cdot \vec{v} + \sin(\theta) \cdot W \cdot \vec{v} + [1 - \cos(\theta)] \cdot \vec{v} \\
&= \cos(\theta) \cdot \vec{v} + \sin(\theta) \cdot W \cdot \vec{v} + \vec{v} - \cos(\theta) \cdot \vec{v} = \sin(\theta) \cdot W \cdot \vec{v} + \vec{v}
\end{aligned}$$

Pero $W \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Entonces:

$$\sin(\theta) \cdot W \cdot \vec{v} + \vec{v} = \sin(\theta) \cdot \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

Por lo tanto, $R(\theta) \cdot \vec{v} = \vec{v}$ ■

2.4. Cuaterniones unitarios y fórmula de Rodrigues

En esta sección se resaltaré la utilidad de los cuaterniones para representar rotaciones en el espacio tridimensional, es decir, en $\mathbb{R}^3$.

En particular, se probará que la rotación de un vector $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$ alrededor de un eje orientado por $\tilde{\mathbf{v}}$ en un ángulo θ , puede representarse mediante un cuaternión unitario $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}$.

Por la definición 1.1.6', dados los cuaterniones $\mathbf{q}_1 = (a_1, \bar{\mathbf{v}}_1)$ y $\mathbf{q}_2 = (a_2, \bar{\mathbf{v}}_2)$, su producto es:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \underbrace{a_1 \cdot a_2 - \bar{\mathbf{v}}_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2}_a + \underbrace{a_1 \cdot \bar{\mathbf{v}}_2 + a_2 \cdot \bar{\mathbf{v}}_1 + \bar{\mathbf{v}}_1 \times \bar{\mathbf{v}}_2}_{\bar{\mathbf{v}}}$$

Sea el vector $\tilde{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$. Este vector puede representarse con el cuaternión $\mathbf{u} = (0, u_1, u_2, u_3) = 0 + \tilde{\mathbf{u}}$. Sea $\bar{\mathbf{q}}$ el conjugado del cuaternión unitario $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}$, es decir, $\bar{\mathbf{q}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}$.

Se calculará el producto $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}}$, según la ecuación anterior. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= (0 + \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) \\ &= -\tilde{\mathbf{u}} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \\ &= \underbrace{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}_a + \underbrace{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}}_{\bar{\mathbf{r}}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Si ahora se pre-multiplica $\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}}$ por el cuaternión unitario $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}}$, usando la misma fórmula de producto, se tiene que:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \right) \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} \right) + \\ &\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} \right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \\ &\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) + \\ &\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \\ &\tilde{\mathbf{u}} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) + \\ &\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \\ &\tilde{\mathbf{u}} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} + \\ &\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

Como $\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}$ es un vector ortogonal a $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{v}} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}) = 0$, y el primer término se anula.

Además, por la anti-conmutatividad del producto vectorial, se tiene que $\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} = -\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} \\ &+ \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} - \\ &\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

Pero $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sin(\theta)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \sin(\theta) \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) = \\ &\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{v}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) + \sin(\theta) \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Si se aplica la propiedad del doble producto vectorial, se tiene que:

$$\tilde{\mathbf{v}} \times (\tilde{\mathbf{u}} \times \tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.24)$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{u}} - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)[\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}}] + \text{sen}(\theta)\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{u}} - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{u}} + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}} + \text{sen}(\theta)\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} = 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\tilde{\mathbf{u}} + \text{sen}(\theta)\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.25)$$

Se utilizan las siguientes identidades:

$$\text{sen}^2(b) = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2b)) \Rightarrow 2\text{sen}^2(b) = 1 - \cos(2b) \quad (2.26)$$

$$\cos^2(b) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2b)) \quad (2.27)$$

Si $b = \frac{\theta}{2}$, entonces $2b = \theta$. Por lo tanto, al reemplazar en (2.26), se obtiene:

$$2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \cos(\theta) \quad (2.28)$$

Con la ecuación (2.27) y el miembro izquierdo de la (2.26), se observa:

$$\begin{aligned} \cos^2(b) - \text{sen}^2(b) &= \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2b)) - \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2b)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot \cos(2b)) = \cos(2b) = \cos(\theta) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Al reemplazar (2.29) y (2.28) en la ecuación (2.25), se observa que:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} &= 2\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\tilde{\mathbf{u}} + \text{sen}(\theta)\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} \\ &= [1 - \cos(\theta)](\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \cos(\theta)\tilde{\mathbf{u}} + \text{sen}(\theta)\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

Finalmente, el cuaternión resultado del producto $\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}}$ queda expresado así:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0 + \bar{\mathbf{k}}$$

Siendo $\bar{\mathbf{k}} = [1 - \cos(\theta)](\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})\tilde{\mathbf{v}} + \cos(\theta)\tilde{\mathbf{u}} + \sin(\theta)\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{u}}$.

Se puede ver que $\bar{\mathbf{k}}$ coincide con la expresión de $\tilde{\mathbf{u}}_{rot}$ de la ecuación (2.16), es decir, con la fórmula de Rodrigues.

Quedó demostrado, entonces, que dado un vector $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$, si se definen los cuaterniones $\mathbf{u} = 0 + \tilde{\mathbf{u}}$ y $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}$, con $\|\mathbf{q}\| = 1$, el producto:

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}} = 0 + \bar{\mathbf{k}}, \text{ con } \bar{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{u}}_{rot} \quad (2.30)$$

Se recuerda que $\tilde{\mathbf{u}}_{rot}$ es el vector resultante de rotar $\tilde{\mathbf{u}}$ un ángulo θ alrededor de $\tilde{\mathbf{v}}$ en sentido positivo. Si se adopta para $\mathbf{q}$ el ángulo $\frac{\theta}{2} \in [0, \pi]$, se tendrá $\theta \in [0, 2\pi]$.

Escrito en forma matricial, se tiene que:

$$(\bar{\mathbf{k}}) = (\tilde{\mathbf{u}}_{rot}) = R_{\theta} \cdot (\tilde{\mathbf{u}}) \quad (2.31)$$

Proposición 2.4.1. El cuaternión $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}$, asociado a una rotación de un ángulo θ alrededor de $\tilde{\mathbf{v}}$ coincide con el cuaternión asociado a una rotación de un ángulo $-\theta$ alrededor de $-\tilde{\mathbf{v}}$.

Demostración. El cuaternión asociado a una rotación de un ángulo θ alrededor de $\tilde{\mathbf{v}}$ es $\mathbf{q} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}}$. Si ahora se reemplaza θ por $-\theta$ y $\tilde{\mathbf{v}}$ por $-\tilde{\mathbf{v}}$, se tiene el cuaternión asociado a una rotación de ángulo $-\theta$ alrededor de $-\tilde{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{q}' = \cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)(-\tilde{\mathbf{v}}) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{q} \quad \blacksquare$$

2.5. Otros parámetros para representar una matriz de rotación en $\mathbb{R}^3$: ángulos y componentes de un cuaternión

Las matrices que representan rotaciones de un ángulo θ alrededor de los ejes coordenados se pueden obtener de R_θ , tomando los ejes $V_x = (1,0,0)$, $V_y = (0,1,0)$ y $V_z = (0,0,1)$.

Se obtienen entonces las siguientes matrices:

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ R_y(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ R_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Las matrices $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ son ortogonales. Para ello, basta recordar que la matriz R_θ es ortogonal.

A continuación, se mostrará que $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ pertenecen a $SO(3)$. Para ello, se mostrará que las tres matrices tienen determinante igual a 1.

Si se desarrolla el determinante de la matriz $R_x(\theta)$ a través de la primera columna, se tiene que:

$$\det(R_x(\theta)) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Ahora, si se desarrolla el determinante de la matriz $R_y(\theta)$ a través de la segunda columna, se observa que:

$$\det(R_y(\theta)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Por último, si se desarrolla el determinante de la matriz $R_z(\theta)$ a través de la tercera columna, se tiene que:

$$\det(R_z(\theta)) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Como las matrices $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ son ortogonales y tienen determinante igual a 1, pertenecen a $SO(3)$.

Una forma de obtener estas tres rotaciones tridimensionales es identificar a cada una como una rotación bidimensional alrededor de un eje que corresponde a la tercera dimensión. Esto es, R_x se interpreta como una rotación en el plano yz alrededor del eje X , R_y como una rotación en el plano xz alrededor del eje Y , R_z se interpreta como una rotación en el plano xy alrededor del eje Z .

A través de la siguiente proposición se verá que la descripción de las rotaciones en el espacio tridimensional alrededor de un eje $\vec{v}$ cualquiera, de ángulo θ , puede hacerse mediante una única matriz de rotación, que se llamará $R(\theta, \vec{v})$.

Proposición 2.5.1. Las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ se pueden representar mediante la siguiente matriz:

$$R(\theta, \vec{v}) = \begin{pmatrix} C + v_1^2[1 - C] & v_1 v_2[1 - C] - S v_3 & v_1 v_3[1 - C] + S v_2 \\ v_1 v_2[1 - C] + S v_3 & C + v_2^2[1 - C] & v_2 v_3[1 - C] - S v_1 \\ v_1 v_3[1 - C] - S v_2 & v_2 v_3[1 - C] + S v_1 & C + v_3^2[1 - C] \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Donde $C = \cos(\theta)$, $S = \sin(\theta)$, y v_1 , v_2 y v_3 son las componentes del vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T = (\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta), \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta), \cos(\beta))^T$, con $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $\beta \in [0, \pi]$.

Demostración. El vector $\vec{v}$, que corresponde al eje de rotación, es unitario, ya que:

$$\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{(\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta))^2 + (\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))^2 + (\cos(\beta))^2} \\ &= \sqrt{\cos^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) + \sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) + \cos^2(\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\text{sen}^2(\beta) \cdot (\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha)) + \cos^2(\beta)} \\
&= \sqrt{\text{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta)} = 1
\end{aligned}$$

Se define ahora el vector $\check{\mathbf{z}} = (0,0,1)^T$. Teniendo en cuenta las matrices $R_y(\theta)$ y $R_z(\theta)$ de (2.32), se observa que $\check{\mathbf{v}} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}}$, pues:

$$\begin{aligned}
R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}} &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \text{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) & -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= (\cos(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta), \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta), \cos(\beta))^T = (v_1, v_2, v_3)^T = \check{\mathbf{v}}
\end{aligned}$$

De $\check{\mathbf{v}} = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}}$, se obtiene que $\check{\mathbf{z}} = R_y^T(\beta) \cdot R_z^T(\alpha) \cdot \check{\mathbf{v}}$. Se mostrará cómo se llega a esta última igualdad.

Si se pre-multiplica en ambos miembros de la ecuación por $R_z^T(\alpha)$, se obtiene:

$$R_z^T(\alpha) \cdot \check{\mathbf{v}} = R_z^T(\alpha) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}} \quad (2.34)$$

Como $R_z(\alpha) \in SO(3)$, $R_z(\alpha)$ es una matriz ortogonal, y entonces $R_z^T(\alpha) = R_z^{-1}(\alpha)$.

Si se reemplaza en (2.34), se tiene que:

$$\begin{aligned}
R_z^T(\alpha) \cdot \check{\mathbf{v}} &= R_z^{-1}(\alpha) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}} \\
R_z^T(\alpha) \cdot \check{\mathbf{v}} &= I \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}} = R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}}
\end{aligned} \quad (2.35)$$

Ahora, se pre-multiplica en ambos miembros por $R_y^T(\beta)$. Se reemplaza en la (2.35):

$$R_y^T(\beta) \cdot R_z^T(\alpha) \cdot \check{\mathbf{v}} = R_y^T(\beta) \cdot R_y(\beta) \cdot \check{\mathbf{z}} \quad (2.36)$$

Como $R_y(\beta) \in SO(3)$, $R_y(\beta)$ es una matriz ortogonal. Por lo tanto, se tiene que $R_y^T(\beta) = R_y^{-1}(\beta)$.

Si se reemplaza en (2.36), se tiene que:

$$R_y^T(\beta).R_z^T(\alpha).\tilde{\mathbf{v}} = R_y^{-1}(\beta).R_y(\beta).\tilde{\mathbf{z}}$$

$$R_y^T(\beta).R_z^T(\alpha).\tilde{\mathbf{v}} = I.\tilde{\mathbf{z}}$$

$$R_y^T(\beta).R_z^T(\alpha).\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{z}}$$

Para construir $R(\theta, \tilde{\mathbf{v}})$, es decir, la matriz de rotación alrededor de $\tilde{\mathbf{v}}$, es necesario hacer dos cosas: primero girar alrededor de $\tilde{\mathbf{z}}$ en un ángulo θ por medio de la matriz $R_z(\theta)$, y luego reubicar el eje $\tilde{\mathbf{z}}$ en la dirección en la cual se encuentra en el sistema de referencia original.

Primero, se gira alrededor de $\tilde{\mathbf{z}}$ en un ángulo θ por medio de la matriz $R_z(\theta)$. Se obtiene:

$$R_z(\theta).R_y^T(\beta).R_z^T(\alpha).\tilde{\mathbf{v}} = R_z(\theta).\tilde{\mathbf{z}} \quad (2.37)$$

A continuación, se devuelve $\tilde{\mathbf{z}}$ a la dirección de partida de $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$R(\theta, \tilde{\mathbf{v}}) = R_z(\alpha).R_y(\beta).R_z(\theta).R_y^T(\beta).R_z^T(\alpha) \quad (2.38)$$

Si se desarrolla el producto $R_z(\alpha).R_y(\beta).R_z(\theta)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} R_z(\alpha).R_y(\beta).R_z(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha).\cos(\beta) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha).\sin(\beta) \\ \sin(\alpha).\cos(\beta) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha).\sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\theta) - \sin(\alpha).\sin(\theta) & -\cos(\alpha).\cos(\beta).\sin(\theta) - \sin(\alpha).\cos(\theta) & \cos(\alpha).\sin(\beta) \\ \sin(\alpha).\cos(\beta).\cos(\theta) + \cos(\alpha).\sin(\theta) & -\sin(\alpha).\cos(\beta).\sin(\theta) + \cos(\alpha).\cos(\theta) & \sin(\alpha).\sin(\beta) \\ -\sin(\beta).\cos(\theta) & \sin(\beta).\sin(\theta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, se multiplica esta última matriz por $R_y^T(\beta)$. Entonces:

$$R_z(\alpha).R_y(\beta).R_z(\theta).R_y^T(\beta) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \\ -\sin(\beta) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \\ -\sin(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \\ \sin^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \cos^2(\beta) \end{pmatrix}$$

Se multiplica esta última matriz por $R_z^T(\alpha)$. Se obtiene la matriz $R(\theta, \tilde{\nu})$, de la ecuación (2.38). Entonces:

$$R(\theta, \tilde{\nu}) = R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\theta) \cdot R_y^T(\beta) \cdot R_z^T(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) + \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \\ -\sin(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \\ \sin^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \cos^2(\beta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \cos^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) + \sin^2(\alpha) \cdot \cos(\theta) & \cos(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\alpha) - \sin^2(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \cdot \sin(\alpha) - \cos^2(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha) & -\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \sin^2(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\theta) - \cos(\alpha) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \sin^2(\alpha) \cdot \sin^2(\beta) + \cos^2(\alpha) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ -\sin(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\alpha) + \sin(\beta) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\alpha) & \sin^2(\beta) \cdot \cos(\theta) + \cos^2(\beta) \end{pmatrix}$$

Ahora se sustituye en la matriz $R(\theta, \tilde{\nu})$ los términos $C = \cos(\theta)$, $S = \sin(\theta)$, $v_1 = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$, $v_2 = \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$, $v_3 = \cos(\beta)$. Se tiene:

$$R(\theta, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha).v_3^2.C + \cos(\alpha).v_3^2.C.\text{sen}(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha).S.v_3 + & -v_1.v_3.C + \\ v_1^2 + \text{sen}^2(\alpha).C & v_1.v_2 - \cos^2(\alpha).S.v_3 - & S.v_2 + v_1.v_3 \\ & \text{sen}(\alpha).C.\cos(\alpha) & \\ \text{sen}(\alpha).v_3^2.C.\cos(\alpha) + & \text{sen}^2(\alpha).v_3^2.C + & -v_2.v_3.C - \\ \cos^2(\alpha).S.v_3 + v_1.v_2 + & v_2^2 + \cos^2(\alpha).C & S.v_1 + v_2.v_3 \\ \text{sen}^2(\alpha).S.v_3 - & & \\ \cos(\alpha).C.\text{sen}(\alpha) & & \\ -C.v_1.v_3 + v_1.v_3 - S.v_2 & -v_2.v_3.C + v_2.v_3 + S.v_1 & \text{sen}^2(\beta).C + v_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha).v_3^2.C + v_1^2 + \text{sen}^2(\alpha).C & \cos(\alpha).v_3^2.C.\text{sen}(\alpha) - S.v_3 + & v_1.v_3(1 - C) + S.v_2 \\ v_1.v_2 - \text{sen}(\alpha).C.\cos(\alpha) & & \\ \text{sen}(\alpha).v_3^2.C.\cos(\alpha) + v_1.v_2 + & \text{sen}^2(\alpha).v_3^2.C + v_2^2 + \cos^2(\alpha).C & v_2.v_3(1 - C) - S.v_1 \\ S.v_3 - \cos(\alpha).C.\text{sen}(\alpha) & & \\ v_1.v_3(1 - C) - S.v_2 & v_2.v_3(1 - C) + S.v_1 & \text{sen}^2(\beta).C + v_3^2 \end{pmatrix}$$

Se reescriben ahora los coeficientes de esta matriz en función de los términos C , S , v_1 , v_2 y v_3 . Entonces:

$$\begin{aligned} & \cos^2(\alpha).v_3^2.C + v_1^2 + \text{sen}^2(\alpha).C \\ &= v_1^2 + C(v_3^2.\cos^2(\alpha) + \text{sen}^2(\alpha)) \\ &= v_1^2 + C(\cos^2(\beta).\cos^2(\alpha) + 1 - \cos^2(\alpha)) \\ &= v_1^2 + C(\cos^2(\alpha).(1 - \text{sen}^2(\beta) - 1) + 1) \\ &= v_1^2 + C(1 - \cos^2(\alpha)\text{sen}^2(\beta)) \\ &= v_1^2 + C - Cv_1^2 = C + v_1^2(1 - C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha).v_3^2.C.\text{sen}(\alpha) - S.v_3 + v_1.v_2 - \text{sen}(\alpha).C.\cos(\alpha) \\ &= v_1.v_2 + \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha).C(v_3^2 - 1) - S.v_3 \\ &= v_1.v_2 + \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha).C(\cos^2(\beta) - 1) \\ &= v_1.v_2 + \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha).C(1 - \text{sen}^2(\beta) - 1) - S.v_3 \\ &= v_1.v_2 - \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha).C.\text{sen}^2(\beta) - S.v_3 \\ &= v_1.v_2 - v_1.v_2.C - S.v_3 \\ &= v_1.v_2(1 - C) - S.v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{sen}(\alpha).v_3^2.C.\cos(\alpha) + v_1.v_2 + S.v_3 - \cos(\alpha).C.\text{sen}(\alpha) \\ &= \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha).C(v_3^2 - 1) + v_1.v_2 + S.v_3 \\ &= \text{sen}(\alpha).\cos(\alpha).C(\cos^2(\beta) - 1) + v_1.v_2 + S.v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot C \cdot (-\text{sen}^2(\beta)) + v_1 \cdot v_2 + S \cdot v_3 \\
&= -\text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \cdot \text{sen}^2(\beta) \cdot C + v_1 \cdot v_2 + S \cdot v_3 \\
&= v_1 \cdot v_2 (1 - C) + S \cdot v_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{sen}^2(\alpha) \cdot v_3^2 \cdot C + v_2^2 + \cos^2(\alpha) \cdot C \\
&= v_2^2 + C(\text{sen}^2(\alpha) \cdot v_3^2 + \cos^2(\alpha)) \\
&= v_2^2 + C(\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) + \cos^2(\alpha)) \\
&= v_2^2 + C(\text{sen}^2(\alpha) \cdot \cos^2(\beta) + 1 - \text{sen}^2(\alpha)) \\
&= v_2^2 + C(\text{sen}^2(\alpha)(1 - \text{sen}^2(\beta)) + 1 - \text{sen}^2(\alpha)) \\
&= v_2^2 + C(-v_2^2 + 1) \\
&= v_2^2 - C \cdot v_2^2 + C \\
&= C + v_2^2(1 - C)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{sen}^2(\beta) \cdot C + v_3^2 \\
&= (1 - \cos^2(\beta)) \cdot C + v_3^2 \\
&= (1 - v_3^2) \cdot C + v_3^2 \\
&= C - C \cdot v_3^2 + v_3^2 \\
&= C + v_3^2(1 - C)
\end{aligned}$$

Si se reemplazan en la matriz $R(\theta, \mathbf{v})$, se obtiene:

$$R(\theta, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} C + v_1^2[1 - C] & v_1 \cdot v_2[1 - C] - S \cdot v_3 & v_1 \cdot v_3[1 - C] + S \cdot v_2 \\ v_1 \cdot v_2[1 - C] + S \cdot v_3 & C + v_2^2[1 - C] & v_2 \cdot v_3[1 - C] - S \cdot v_1 \\ v_1 \cdot v_3[1 - C] - S \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3[1 - C] + S \cdot v_1 & C + v_3^2[1 - C] \end{pmatrix}$$

Esta última matriz pertenece a $SO(3)$ ya que:

$$\begin{aligned}
\det(R(\theta, \vec{v})) &= \det(R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\theta) \cdot R_y^T(\beta) \cdot R_z^T(\alpha)) \\
&= \det(R_z(\alpha)) \cdot \det(R_y(\beta)) \cdot \det(R_z(\theta)) \cdot \det(R_y^T(\beta)) \cdot \det(R_z^T(\alpha))
\end{aligned}$$

Y $R_z(\theta)$ y $R_y(\theta)$ pertenecen a $SO(3)$. Además, como $\det(A) = \det(A^T)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\det(R(\theta, \vec{v})) &= \det(R_z(\alpha)) \cdot \det(R_y(\beta)) \cdot \det(R_z(\theta)) \cdot \det(R_y^T(\beta)) \cdot \det(R_z^T(\alpha)) \\
&= \det(R_z(\alpha)) \cdot \det(R_y(\beta)) \cdot \det(R_z(\theta)) \cdot \det(R_y(\beta)) \cdot \det(R_z(\alpha)) \\
&= 1.1.1.1.1 = 1
\end{aligned}$$

Además, como $R(\theta, \vec{v})$ es producto de matrices ortogonales, entonces es ortogonal. Por lo tanto, $R(\theta, \vec{v}) \in SO(3)$.

Si se recuerda ahora la matriz de rotación $R(\theta)$ que surge de la fórmula de Rodrigues, que es:

$$\begin{pmatrix}
[1 - \cos(\theta)]v_1^2 + \cos(\theta) & [1 - \cos(\theta)]v_1v_2 - \sin(\theta)v_3 & [1 - \cos(\theta)]v_1v_3 + \sin(\theta)v_2 \\
[1 - \cos(\theta)]v_1v_2 + \sin(\theta)v_3 & [1 - \cos(\theta)]v_2^2 + \cos(\theta) & [1 - \cos(\theta)]v_2v_3 - \sin(\theta)v_1 \\
[1 - \cos(\theta)]v_1v_3 - \sin(\theta)v_2 & [1 - \cos(\theta)]v_2v_3 + \sin(\theta)v_1 & [1 - \cos(\theta)]v_3^2 + \cos(\theta)
\end{pmatrix}$$

, se puede ver que es la misma matriz $R(\theta, \vec{v})$, con las correspondientes sustituciones:

$$\begin{pmatrix}
C + v_1^2[1 - C] & v_1 \cdot v_2[1 - C] - S \cdot v_3 & v_1 \cdot v_3[1 - C] + S \cdot v_2 \\
v_1 \cdot v_2[1 - C] + S \cdot v_3 & C + v_2^2[1 - C] & v_2 \cdot v_3[1 - C] - S \cdot v_1 \\
v_1 \cdot v_3[1 - C] - S \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3[1 - C] + S \cdot v_1 & C + v_3^2[1 - C]
\end{pmatrix}$$

Ahora, la pregunta es sobre la posibilidad de hallar una matriz que dependa de las coordenadas del cuaternión unitario $\vec{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$. Se verá esto a través de la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2. Sea el cuaternión unitario $\vec{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$. Entonces la rotación que determina, de acuerdo con la ecuación (2.30), puede representarse mediante la matriz:

$$R[\tilde{\mathbf{q}}] = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1 \cdot q_2 - 2q_0 \cdot q_3 & 2q_1 \cdot q_3 + 2q_0 \cdot q_2 \\ 2q_1 \cdot q_2 + 2q_0 \cdot q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2 \cdot q_3 - 2q_0 \cdot q_1 \\ 2q_1 \cdot q_3 - 2q_0 \cdot q_2 & 2q_2 \cdot q_3 + 2q_0 \cdot q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Demostración. Sean el vector unitario $\tilde{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)^T$ el eje de rotación, el ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$, $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ y $b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$. Las componentes del cuaternión unitario $\tilde{\mathbf{q}}$ son las siguientes:

$$q_0 = a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$q_1 = v_1 b = v_1 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$q_2 = v_2 b = v_2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$q_3 = v_3 b = v_3 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como el cuaternión $\tilde{\mathbf{q}} = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), v_1 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), v_2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), v_3 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ es el cuaternión asociado a la rotación considerada y la transformación sobre un vector $\mathbf{u}$ se aplica haciendo el producto $\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{q}}$, se quiere obtener ahora la representación matricial de la transformación, dependiendo de las coordenadas del cuaternión $\tilde{\mathbf{q}}$.

Lo primero que se necesita hacer es representar la matriz de rotación según el ángulo mitad. Ya se vió que siendo $C = \cos(\theta)$, $S = \sin(\theta)$ y $\tilde{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)^T$, se tiene la matriz (2.33), es decir:

$$R(\theta, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} C + v_1^2 \cdot [1 - C] & v_1 \cdot v_2 \cdot [1 - C] - S \cdot v_3 & v_1 \cdot v_3 \cdot [1 - C] + S \cdot v_2 \\ v_1 \cdot v_2 \cdot [1 - C] + S \cdot v_3 & C + v_2^2 \cdot [1 - C] & v_2 \cdot v_3 \cdot [1 - C] - S \cdot v_1 \\ v_1 \cdot v_3 \cdot [1 - C] - S \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \cdot [1 - C] + S \cdot v_1 & C + v_3^2 \cdot [1 - C] \end{pmatrix}$$

Como interesa la representación mediante el ángulo mitad, se recuerda, por la ecuación (2.28), que:

$$1 - C = 1 - \cos(\theta) = 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cdot b^2$$

Entonces:

$$C = 1 - 2 \cdot b^2 \quad (2.40)$$

Por otro lado, como $a^2 + b^2 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1$, es cierto que:

$$C = 1 - 2.b^2 = a^2 + b^2 - 2.b^2 = a^2 - b^2 \quad (2.41)$$

Además, como $S = \sin(\theta)$ y se verifica que $C^2 + S^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$, entonces:

$$S^2 = 1 - C^2 = 1 - (1 - 2b^2)^2 = 1 - (1 + 4b^4 - 4b^2) = 4b^2 - 4b^4$$

Por lo tanto:

$$|S| = \sqrt{4b^2 - 4b^4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{1 - b^2} = 2 \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{a^2} = 2 \cdot |b| \cdot |a| = 2 \cdot |a| \cdot |b| \quad (2.42)$$

Como $\theta \in [0, 2\pi)$, se considerará, por un lado, qué ocurre si $\theta \in [0, \pi)$ y, por otro, si $\theta \in (\pi, 2\pi)$.

Primero, si $\theta \in [0, \pi)$, se tiene que $S = \sin(\theta) > 0$. Por lo tanto, $|S| = S$. Además, como $\theta \in [0, \pi)$, se tiene que $\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces, como $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, se cumple que $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, o sea, $|a| = a$. Como $b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, se cumple que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, o sea, $|b| = b$. Se concluye que $S = 2 \cdot a \cdot b$.

Segundo, si $\theta \in [\pi, 2\pi)$, $S = \sin(\theta) < 0$. Entonces, $|S| = -S$. Y como $\theta \in [\pi, 2\pi)$, se tiene que $\frac{\theta}{2} \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Entonces $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$, o sea, $|a| = -a$. Además, al ser $b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, ocurre que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, o sea, $|b| = b$. Se concluye que $-S = 2 \cdot (-a) \cdot b$, o equivalentemente, $S = 2 \cdot a \cdot b$.

Por lo tanto, la ecuación (2.42) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$S = 2 \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{a^2} = 2 \cdot b \cdot a \quad (2.42)'$$

Utilizando las ecuaciones (2.40), (2.41) y (2.42)', la matriz $R(\theta, \vec{v})$ queda así:

$$R(\theta, \vec{v}) =$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - b^2 + 2b^2v_1^2 & 2b^2v_1v_2 - 2abv_3 & 2b^2v_1v_3 + 2abv_2 \\ 2b^2v_1v_2 + 2abv_3 & a^2 - b^2 + 2b^2v_2^2 & 2b^2v_2v_3 - 2abv_1 \\ 2b^2v_1v_3 - 2abv_2 & 2b^2v_2v_3 + 2abv_1 & a^2 - b^2 + 2b^2v_3^2 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Ahora, como $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ es unitario, se cumple que $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$. Entonces, si se reescriben los coeficientes de la diagonal principal de (2.43), se tiene que:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2b^2v_1^2 &= a^2 - b^2(1 - 2v_1^2) \\ &= a^2 - b^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_1^2) \\ &= a^2 - b^2(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ &= a^2 + b^2(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2b^2v_2^2 &= a^2 - b^2(1 - 2v_2^2) \\ &= a^2 - b^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_2^2) \\ &= a^2 - b^2(v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) \\ &= a^2 + b^2(-v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 2b^2v_3^2 &= a^2 - b^2(1 - 2v_3^2) \\ &= a^2 - b^2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2v_3^2) \\ &= a^2 - b^2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si se reemplazan (2.44), (2.45) y (2.46) en la matriz (2.43), se tiene que:

$$R(\theta, \vec{v}) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2(v_1^2 - v_2^2 - v_3^2) & 2b^2v_1v_2 - 2abv_3 & 2b^2v_1v_3 + 2abv_2 \\ 2b^2v_1v_2 + 2abv_3 & a^2 + b^2(-v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) & 2b^2v_2v_3 - 2abv_1 \\ 2b^2v_1v_3 - 2abv_2 & 2b^2v_2v_3 + 2abv_1 & a^2 - b^2(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

A esta última matriz se la puede reescribir así:

$$\begin{aligned}
R(\theta, \vec{v}) &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 v_1^2 - b^2 v_2^2 - b^2 v_3^2 & 2(bv_1)(bv_2) - 2a(bv_3) & 2(bv_1)(bv_3) + 2a(bv_2) \\ 2(bv_1)(bv_2) + 2a(bv_3) & a^2 - b^2 v_1^2 + b^2 v_2^2 - b^2 v_3^2 & 2(bv_2)(bv_3) - 2a(bv_1) \\ 2(bv_1)(bv_3) - 2a(bv_2) & 2(bv_2)(bv_3) + 2a(bv_1) & a^2 - b^2 v_1^2 - b^2 v_2^2 + b^2 v_3^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2 + (bv_1)^2 - (bv_2)^2 - (bv_3)^2 & 2(bv_1)(bv_2) - 2a(bv_3) & 2(bv_1)(bv_3) + 2a(bv_2) \\ 2(bv_1)(bv_2) + 2a(bv_3) & a^2 - (bv_1)^2 + (bv_2)^2 - (bv_3)^2 & 2(bv_2)(bv_3) - 2a(bv_1) \\ 2(bv_1)(bv_3) - 2a(bv_2) & 2(bv_2)(bv_3) + 2a(bv_1) & a^2 - (bv_1)^2 - (bv_2)^2 + (bv_3)^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Si se reemplaza ahora por los términos $q_0 = a$, $q_1 = v_1 b = bv_1$, $q_2 = v_2 b = bv_2$ y $q_3 = v_3 b = bv_3$, ya definidos antes, se llega a la siguiente matriz:

$$R(\theta, \vec{v}) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1 \cdot q_2 - 2q_0 \cdot q_3 & 2q_1 \cdot q_3 + 2q_0 \cdot q_2 \\ 2q_1 \cdot q_2 + 2q_0 \cdot q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2 \cdot q_3 - 2q_0 \cdot q_1 \\ 2q_1 \cdot q_3 - 2q_0 \cdot q_2 & 2q_2 \cdot q_3 + 2q_0 \cdot q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix} = R[\vec{q}]$$

Por lo tanto, las matrices (2.39) y (2.47) son equivalentes, es decir, la rotación $R(\theta, \hat{v})$ tiene su equivalente representación matricial utilizando cuaterniones. ■

Proposición 2.5.3. Sea el cuaternión unitario $\vec{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, entonces $R[\vec{q}] = R[-\vec{q}]$.

Demostración. Se quiere ver que los cuaterniones $\vec{q}$ y $-\vec{q}$ determinan la misma transformación. Si se tiene en cuenta la matriz de rotación (2.39) y que a_{ij} corresponde al elemento ij de la matriz $R[-\vec{q}]$, si la rotación se hace sobre $-\vec{q} = (-q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$, entonces se tiene:

$$a_{11} = (-q_0)^2 + (-q_1)^2 - (-q_2)^2 - (-q_3)^2 = q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

$$a_{12} = 2(-q_1)(-q_2) - 2(-q_0)(-q_3) = 2q_1q_2 - 2q_0q_3$$

$$a_{13} = 2(-q_0)(-q_2) + 2(-q_1)(-q_3) = 2q_0q_2 + 2q_1q_3$$

$$a_{21} = 2(-q_1)(-q_2) + 2(-q_0)(-q_3) = 2q_1q_2 + 2q_0q_3$$

$$a_{22} = (-q_0)^2 - (-q_1)^2 + (-q_2)^2 - (-q_3)^2 = q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2$$

$$a_{23} = 2(-q_2)(-q_3) - 2(-q_0)(-q_1) = 2q_2q_3 - 2q_0q_1$$

$$a_{31} = 2(-q_1)(-q_3) - 2(-q_0)(-q_2) = 2q_1q_3 - 2q_0q_2$$

$$a_{32} = 2(-q_2)(-q_3) + 2(-q_0)(-q_1) = 2q_2q_3 + 2q_0q_1$$

$$a_{33} = (-q_0)^2 - (-q_1)^2 - (-q_2)^2 + (-q_3)^2 = q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2$$

Entonces:

$$R[-\tilde{\mathbf{q}}] = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_0q_2 + 2q_1q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $R[\tilde{\mathbf{q}}] = R[-\tilde{\mathbf{q}}]$ ■

Proposición 2.5.4. Sea el cuaternión unitario $\tilde{\mathbf{q}} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$. Entonces la matriz $R[\tilde{\mathbf{q}}]$ puede escribirse así:

$$\begin{pmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Demostración. Como $\tilde{\mathbf{q}}$ es unitario, $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} a_{11} &= q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 = q_0^2 + q_1^2 - (q_2^2 + q_3^2) \\ &= q_0^2 + q_1^2 - (1 - q_0^2 - q_1^2) = 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 = q_0^2 + q_2^2 - (q_1^2 + q_3^2) \\ &= q_0^2 + q_2^2 - (1 - q_0^2 - q_2^2) = 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 = q_0^2 + q_3^2 - (q_1^2 + q_2^2) \\ &= q_0^2 + q_3^2 - (1 - q_0^2 - q_3^2) = 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{aligned}$$

Los otros coeficientes de la matriz $R[\tilde{q}]$ se obtienen sacando 2 de factor común en cada uno de ellos. ■

Capítulo 3

Ángulos de Euler

Para presentar los ángulos de Euler de manera comprensible, se imaginarán tres ejes perpendiculares en el espacio de tres dimensiones, correspondiéndose con el clásico esquema conocido de los ejes x, y, z .

Si se piensa en la trayectoria de un avión desde el despegue hasta que alcanza la altura durante la que desarrollará un vuelo horizontal, es obvio que durante este período realizará movimientos que se pueden representar como combinaciones de giros en torno a cada uno de los tres ejes, además del desplazamiento (traslación).

Definición 3.1.1. La terna (γ, β, α) de ángulos, donde γ designa el giro alrededor del eje x , β designa el giro alrededor del eje y , y α designa el giro alrededor del eje z , se denomina terna de ángulos de Euler.

Los giros alrededor de los ejes x, y, z reciben los nombres alabeo, elevación y cabeceo (más conocidos por sus nombres en inglés, *roll*, *pitch* y *yaw*) respectivamente, como puede observarse en la figura 3.

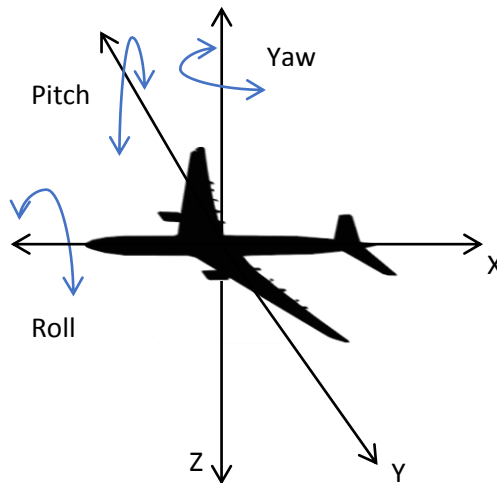


Figura 3

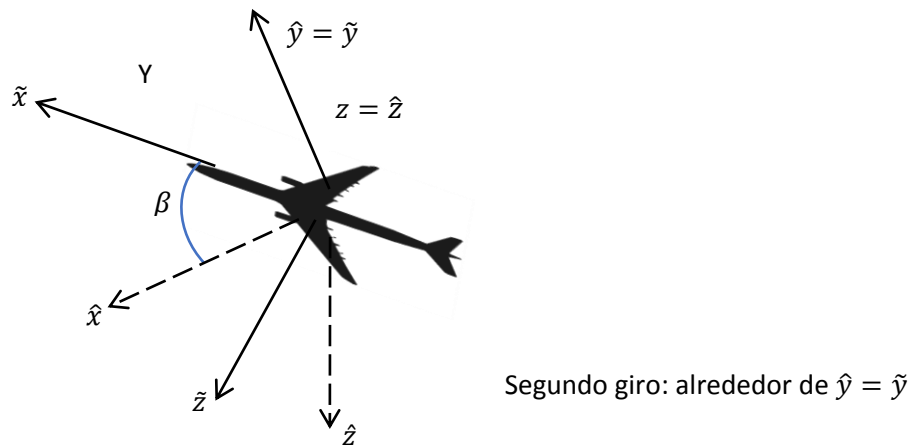
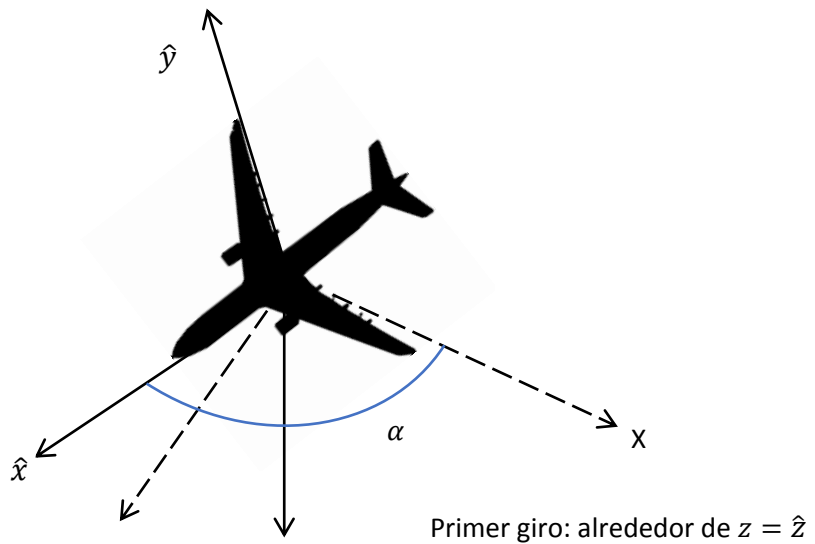
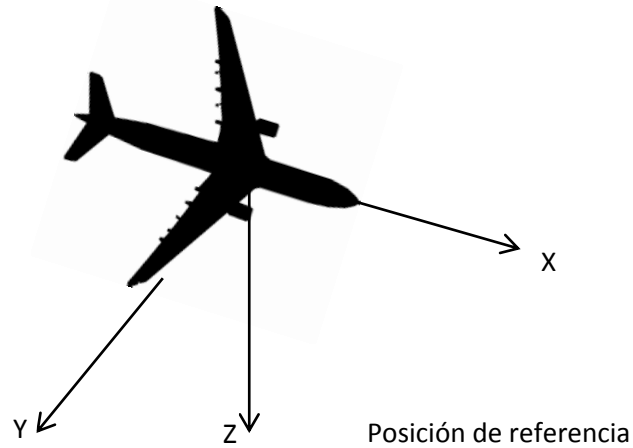
Se va a estudiar ahora tres giros consecutivos del avión sobre los ejes z, y, x , en ese orden y en sentido positivo, suponiendo que se parte de un sistema original xyz .

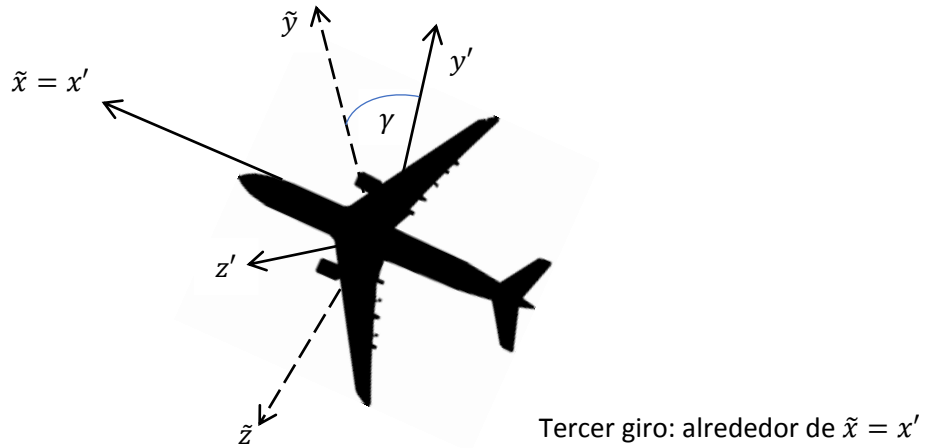
El primer giro, alrededor del eje $z = \hat{z}$, de ángulo α , tiene asociado el cuaternión

$$\mathbf{q}_1 = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), 0, 0, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right), \text{ respecto del sistema de referencia } xyz.$$

A continuación, el segundo giro, de ángulo β , alrededor del eje $\hat{y} = \tilde{y}$, tiene asociado el cuaternión $\mathbf{q}_2 = \left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right), 0, \sin\left(\frac{\beta}{2}\right), 0 \right)$, respecto del sistema de referencia $\hat{x}\hat{y}\hat{z}$.

Por último, el tercer giro, de ángulo γ , alrededor del eje $\tilde{x} = x'$, tiene asociado el cuaternión $\mathbf{q}_3 = \left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), 0, 0 \right)$, respecto del sistema de referencia $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$.





En el primer giro, se muestra la rotación del avión un ángulo α alrededor del eje $z = \hat{z}$, ángulo medido en sentido positivo de $\hat{x}$ respecto de x en el plano xy .

Como $\mathbf{q}_1 = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right), 0, 0, \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right)$ es el cuaternión asociado a este giro, su correspondiente matriz de rotación es:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

En el segundo giro del avión, se muestra la rotación un ángulo β alrededor del eje $\hat{y}$, ángulo medido en sentido positivo de $\hat{z}$ respecto de $\hat{x}$ en el plano xz .

Como $\mathbf{q}_2 = \left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right), 0, \sin\left(\frac{\beta}{2}\right), 0 \right)$ es el cuaternión asociado a este giro, su correspondiente matriz de rotación es:

$$R_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Por último, el tercer giro es en sentido positivo en un ángulo γ alrededor de $\tilde{x}$. La terna $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ cambia a la definitiva $x'y'z'$.

Como $\mathbf{q}_3 = \left(\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right), \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right), 0, 0 \right)$ es el cuaternión asociado a este giro, su correspondiente matriz de rotación es:

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\text{sen}(\gamma) \\ 0 & \text{sen}(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Por lo tanto, la composición de los tres giros del avión tiene asociada la matriz de rotación $M = R_\gamma \cdot R_\beta \cdot R_\alpha$, tal que:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{R_\gamma \cdot R_\beta \cdot R_\alpha}_M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se calculará la expresión de M .

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\text{sen}(\gamma) \\ 0 & \text{sen}(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \text{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & -\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\alpha) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\gamma) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) & -\cos(\beta) \text{sen}(\gamma) \\ \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma) \text{sen}(\beta) & \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \cos(\gamma) + \cos(\alpha) \text{sen}(\gamma) & \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, si se define $C_\omega = \cos(\omega)$ y $S_\omega = \text{sen}(\omega)$, se tiene que:

$$M = \begin{pmatrix} C_\alpha C_\beta & -S_\alpha C_\beta & S_\beta \\ S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma & C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma & -C_\beta S_\gamma \\ S_\alpha S_\gamma - C_\alpha C_\gamma S_\beta & S_\alpha S_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma & C_\beta C_\gamma \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Se iguala ahora la matriz asociada a un cuaternión unitario $\mathfrak{q}$, es decir, $R[\mathfrak{q}]$, con la matriz de rotación M .

$$\begin{pmatrix} 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}}_M$$

Entonces:

$$m_{11} = 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 = \cos(\alpha) \cos(\beta)$$

$$m_{12} = 2(q_1q_2 - q_0q_3) = -\text{sen}(\alpha) \cos(\beta)$$

$$m_{13} = 2(q_0 q_2 + q_1 q_3) = \text{sen}(\beta)$$

$$m_{23} = 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) = -\cos(\beta) \text{sen}(\gamma)$$

$$m_{33} = 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 = \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

De la tercera ecuación se tiene que $\beta = \arcsen(m_{13})$. Con lo cual no queda unívocamente definido β , salvo que se imponga, por ejemplo, que $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Para definir γ se usará la siguiente relación, suponiendo denominador no nulo:

$$\frac{-m_{23}}{m_{33}} = \frac{\text{sen}(\gamma) \cos(\beta)}{\cos(\gamma) \cos(\beta)} \Rightarrow \gamma = \begin{cases} \text{atan2}(-m_{23}, m_{33}), & \text{si } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{atan2}(m_{23}, -m_{33}), & \text{si } \beta \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Por último, para definir α , suponiendo denominador no nulo, se usará la siguiente relación:

$$\frac{-m_{12}}{m_{11}} = \frac{\text{sen}(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)} \Rightarrow \alpha = \begin{cases} \text{atan2}(-m_{12}, m_{11}), & \text{si } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \text{atan2}(m_{12}, -m_{11}), & \text{si } \beta \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Donde, se define:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad \text{atan2}(y, x) &= \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0, y \geq 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases} \\ \blacksquare \quad \text{atan2}(y, 0) &= \frac{\pi}{2}, \text{ si } y > 0 \\ \blacksquare \quad \text{atan2}(y, 0) &= -\frac{\pi}{2}, \text{ si } y < 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, si $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, los tres ángulos quedan unívocamente determinados, y resulta:

$$\alpha = \text{atan2}(-m_{12}, m_{11})$$

$$\beta = \text{arcsen}(m_{13})$$

$$\gamma = \text{atan2}(-m_{23}, m_{33})$$

Por otro lado, de la expresión $R[\tilde{\mathbf{q}}]$ de la proposición 2.5.4, se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{tr}(R[\tilde{\mathbf{q}}]) &= 2q_0^2 + 2q_1^2 - 1 + 2q_0^2 + 2q_2^2 - 1 + 2q_0^2 + 2q_3^2 - 1 \\ &= 6q_0^2 + 2q_1^2 + 2q_2^2 + 2q_3^2 - 3 = 6q_0^2 + 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) - 3 \\ &= 6q_0^2 + 2(1 - q_0^2) - 3 \\ &= 4q_0^2 - 1 \end{aligned}$$

Como $q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, entonces $\text{tr}(R[\tilde{\mathbf{q}}]) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1$. Y, además, por la identidad trigonométrica $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$, resulta:

$$\text{tr}(R[\tilde{\mathbf{q}}]) = 4\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 4\left(\frac{1+\cos(\theta)}{2}\right) - 1 = 1 + 2\cos(\theta)$$

Como $R[\tilde{\mathbf{q}}] = M$, se tiene que $\text{tr}(R[\tilde{\mathbf{q}}]) = \text{tr}(M)$. Entonces:

$$\begin{aligned} 4q_0^2 - 1 &= m_{11} + m_{22} + m_{33} \\ |q_0| &= \sqrt{\frac{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}}{4}} \\ |q_0| &= \frac{\sqrt{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}}}{2} \end{aligned}$$

Si se recuerda que los cuaterniones $\tilde{\mathbf{q}}$ y $-\tilde{\mathbf{q}}$ generan la misma matriz M , no es posible determinar el signo de q_0 .

Ahora, si se adopta que $q_0 > 0$, se tienen las siguientes expresiones:

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + m_{11} + m_{22} + m_{33}}}{2} \tag{3.5}$$

$$q_1 = \frac{(m_{23} - m_{32})}{4q_0} \quad (3.6)$$

$$q_2 = \frac{(m_{31} - m_{13})}{4q_0} \quad (3.7)$$

$$q_3 = \frac{(m_{12} - m_{21})}{4q_0} \quad (3.8)$$

Estas expresiones permiten obtener el cuaternión a partir de la matriz M .

Para obtener el cuaternión a partir de los ángulos de Euler, se reemplazan en las ecuaciones anteriores los elementos de la matriz M , en función de dichos ángulos.

Resulta:

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + C_\alpha C_\beta + C_\alpha C_\gamma - S_\alpha S_\beta S_\gamma + C_\beta C_\gamma}}{2} \quad (3.9)$$

$$q_1 = \frac{(-C_\beta S_\gamma - (S_\alpha S_\beta C_\gamma + C_\alpha S_\gamma))}{4q_0} \quad (3.10)$$

$$q_2 = \frac{(S_\alpha S_\gamma - C_\alpha C_\gamma S_\beta - S_\beta)}{4q_0} \quad (3.11)$$

$$q_3 = \frac{(-S_\alpha C_\beta - (S_\alpha C_\gamma + C_\alpha S_\beta S_\gamma))}{4q_0} \quad (3.12)$$

Capítulo 4

Utilización del acelerómetro en un teléfono móvil para describir rotaciones en $\mathbb{R}^3$

4.1. Sensores en el teléfono móvil

En la actualidad, los teléfonos móviles inteligentes poseen distintos sensores. Entre ellos, se pueden mencionar acelerómetro, giroscopio, magnetómetro, sensor de temperatura, sensor de humedad, GPS, etc.

Ahora, la pregunta es: ¿qué es un sensor?

Un sensor puede ser definido, de una manera sencilla, como un dispositivo capaz de dar respuesta eléctrica a estímulos físicos externos. Se trata, básicamente, de un elemento que traduce una magnitud física y real, como la temperatura, la aceleración o la longitud, en unidades que pueden ser interpretadas de forma sencilla por un dispositivo electrónico.

Los sensores de un teléfono móvil son utilizados cotidianamente por las personas, aunque ellas no se detengan a pensar realmente cómo funcionan. Por ejemplo, si se quiere utilizar la pantalla del teléfono en posición vertical u horizontal; se contesta una llamada agitando el teléfono; se resbala el aparato y, antes de impactar con el suelo, se apaga para proteger el sistema operativo y sus datos; se agita el teléfono para apagar una alarma.

En todos estos ejemplos actúan los sensores del teléfono móvil.

4.2. ¿Qué es un acelerómetro?

El acelerómetro es un dispositivo que convierte aceleraciones o cambios de velocidad, en una señal eléctrica. Los más usados en un teléfono móvil son los de tipo capacitivo. Pero los hay también de tipo mecánicos, piezoeléctricos, láser, de inducción magnética, ópticos, etc.

En un teléfono móvil, el acelerómetro es parecido a un chip, es de un tamaño reducido porque funciona con nanotecnología. La base de su funcionamiento es un condensador, un dispositivo que generalmente está integrado por dos placas metálicas fijas, una en frente de la otra; y por un material dieléctrico, que puede ser, entre otras cosas, poliéster o papel.

En el caso de los acelerómetros, una de esas placas es móvil, de tal forma que cuando se aplica una aceleración sobre el teléfono móvil, la capacidad del condensador cambiará. Se hará mayor o menor en función del movimiento, ya que la placa móvil se desplazará y, de esta manera, reduce o aumenta la distancia entre las placas.

El material dieléctrico, que, como se dijo, puede llegar a ser papel, se encargará de almacenar la energía que llega de las placas.

El sensor cuantificará y enviará la carga al chip del teléfono para que procese y halle qué aceleración se ha producido.

4.3. Estimación de los ángulos pitch y roll

Si se retoma lo desarrollado en el capítulo 3, se tendrá en cuenta ahora la definición 3.1.1, en la cual se nombra la terna (γ, β, α) correspondiente a los ángulos de Euler, donde γ designa el giro alrededor del eje x , β designa el giro alrededor del eje y , y α designa el giro alrededor del eje z .

Recordando que x, y, z reciben, respectivamente, los nombres *roll*, *pitch* y *yaw*.

Se utilizará ahora no un avión, sino un teléfono móvil. Esto último queda ilustrado en la siguiente figura:

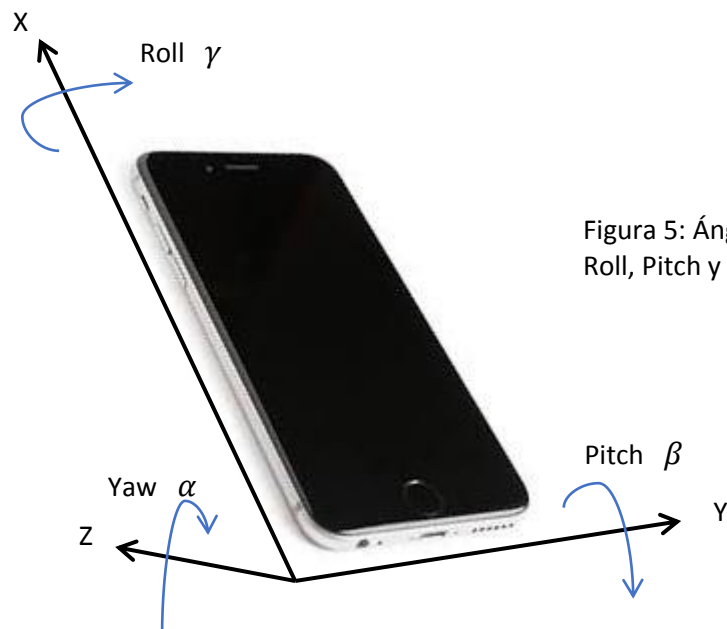


Figura 5: Ángulos Roll, Pitch y Yaw

Como puede observarse, el eje x está alineado a lo largo del cuerpo del teléfono. Notemos, además, que el eje z está alineado con la fuerza de gravedad terrestre, cuando el teléfono está apoyado sobre un plano horizontal.

Definición 4.3.1. Un acelerómetro montado en un teléfono móvil, orientado sobre el vector del campo gravitacional terrestre, que se denota $g = (0 \ 0 \ 1)^T$, tendrá una salida dada por:

$$G_p = \begin{pmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{pmatrix} = R \cdot g = R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Donde R es la matriz de rotación que describe la orientación del teléfono móvil relativa al marco de coordenadas de la Tierra.

La orientación del teléfono puede definirse por las rotaciones de roll, pitch y yaw, desde una posición inicial. Las matrices de rotación de roll, pitch y yaw, que transforman un vector, como el vector g del campo gravitacional terrestre, bajo una rotación del sistema de coordenadas de la figura 5 a través de los ángulos de Euler, son las matrices descritas en (2.32), que se repiten a continuación:

$$R_x(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hay seis posibles ordenamientos de estas tres matrices de rotación y, en principio, todos son igualmente válidos. Sin embargo, estas matrices de rotación no se pueden conmutar en el sentido de que la matriz de rotación R depende del orden en que se sean aplicadas las rotaciones de roll, pitch y yaw.

Se verán, a continuación, estas seis posibles matrices de rotación R .

Caso 1.

$$R_{xyz} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_x(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot R_z(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta) \cos(\alpha) & \cos(\beta) \sin(\alpha) & -\sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\beta) \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \sin(\alpha) & \cos(\gamma) \cos(\alpha) + \sin(\beta) \sin(\gamma) \sin(\alpha) & \cos(\beta) \sin(\gamma) \\ \cos(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\gamma) \sin(\alpha) & \cos(\gamma) \sin(\beta) \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \sin(\gamma) & \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \sin(\gamma) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (4.2)
\end{aligned}$$

Esta última ecuación puede ser reescrita en relación a los ángulos γ y β normalizando G_p . Entonces:

$$\frac{G_p}{\|G_p\|} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \sin(\gamma) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{G_{px}^2 + G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \cdot \begin{pmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\beta) \\ \cos(\beta) \sin(\gamma) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Como $(0 \ 0 \ 1)^T$ tiene módulo 1, y las rotaciones conservan módulos, entonces:

$$\|G_p\| = \left\| R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 1$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
G_{px} &= -\sin(\beta) \\
G_{py} &= \cos(\beta) \sin(\gamma) \\
G_{pz} &= \cos(\beta) \cos(\gamma)
\end{aligned}$$

Ahora, si se resuelve la ecuación (4.3) para los ángulos γ y β , y utilizando el subíndice xyz para denotar que se trabaja sobre la secuencia de rotación R_{xyz} , se tiene:

$$\tan(\gamma)_{xyz} = \frac{\cos(\beta) \sin(\gamma)}{\cos(\beta) \cos(\gamma)} = G_{py} / G_{pz} \quad (4.4)$$

$$\tan(\beta)_{xyz} = \left(\frac{-G_{px}}{G_{py} \cdot \sin(\gamma) + G_{pz} \cdot \cos(\gamma)} \right) = \frac{-G_{px}}{\sqrt{G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \quad (4.5)$$

Se mostrará esta última ecuación, no tan obvia como la (4.4). Por un lado:

$$\begin{aligned}
 \tan(\beta)_{xyz} &= \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{-G_{px}}{\cos(\beta)} = \frac{-G_{px}}{\cos(\beta) \cdot (\text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\gamma))} \\
 &= \frac{-G_{px}}{\cos(\beta) \text{sen}^2(\gamma) + \cos(\beta) \cos^2(\gamma)} \\
 &= \frac{-G_{px}}{(\cos(\beta) \text{sen}(\gamma)) \cdot \text{sen}(\gamma) + (\cos(\beta) \cos(\gamma)) \cdot \cos(\gamma)} \\
 &= \frac{-G_{px}}{G_{py} \cdot \text{sen}(\gamma) + G_{pz} \cdot \cos(\gamma)}
 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 \tan(\beta)_{xyz} &= \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{-G_{px}}{\sqrt{\cos^2(\beta)}} = \frac{-G_{px}}{\sqrt{\cos^2(\beta) \cdot (\text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\gamma))}} \\
 &= \frac{-G_{px}}{\sqrt{\cos^2(\beta) \text{sen}^2(\gamma) + \cos^2(\beta) \cos^2(\gamma)}} \\
 &= \frac{-G_{px}}{\sqrt{(\cos(\beta) \text{sen}(\gamma))^2 + (\cos(\beta) \cos(\gamma))^2}} \\
 &= \frac{-G_{px}}{\sqrt{G_{py}^2 + G_{pz}^2}}
 \end{aligned}$$

Caso 2.

$$R_{yxz} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) \cdot R_z(\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) \text{sen}(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma) \cos(\alpha) & -\text{sen}(\beta) \cos(\gamma) \\ -\cos(\gamma) \text{sen}(\alpha) & \cos(\gamma) \cos(\alpha) & \text{sen}(\gamma) \\ \cos(\beta) \text{sen}(\gamma) \text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) \cos(\alpha) & -\cos(\alpha) \cos(\beta) \text{sen}(\gamma) + \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\text{sen}(\beta) \cos(\gamma) \\ \text{sen}(\gamma) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Esta última ecuación puede ser reescrita en relación a los ángulos γ y β normalizando G_p . Entonces:

$$\frac{G_p}{\|G_p\|} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\beta) \cos(\gamma) \\ \text{sen}(\gamma) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{G_{px}^2 + G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \cdot \begin{pmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\beta) \cos(\gamma) \\ \text{sen}(\gamma) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Recordando que $\|G_p\| = 1$, entonces:

$$G_{px} = -\text{sen}(\beta) \cos(\gamma)$$

$$G_{py} = \text{sen}(\gamma)$$

$$G_{pz} = \cos(\beta) \cos(\gamma)$$

Ahora, si se resuelve la ecuación (4.7) para los ángulos γ y β , y utilizando el subíndice yxz para denotar que se trabaja sobre la secuencia de rotación R_{yxz} , se tiene:

$$\begin{aligned} \tan(\gamma)_{yxz} &= \frac{\text{sen}(\gamma)}{\cos(\gamma)} = \frac{G_{py}}{\sqrt{\cos^2(\gamma)}} = \frac{G_{py}}{\sqrt{\cos^2(\gamma)(\text{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta))}} \\ &= \frac{G_{py}}{\sqrt{\cos^2(\gamma)\text{sen}^2(\beta) + \cos^2(\gamma)\cos^2(\beta)}} \\ &= \frac{G_{py}}{\sqrt{(\cos(\gamma)\text{sen}(\beta))^2 + (\cos(\gamma)\cos(\beta))^2}} \\ &= \frac{G_{py}}{\sqrt{G_{px}^2 + G_{pz}^2}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\tan(\beta)_{yxz} = \frac{\text{sen}(\beta)}{\cos(\beta)} = \frac{\text{sen}(\beta)\cos(\gamma)}{\cos(\beta)\cos(\gamma)} = \frac{-G_{px}}{G_{pz}} \quad (4.9)$$

Caso 3.

$$\begin{aligned}
R_{xzy} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= R_x(\gamma) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) & \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ -\cos(\gamma)\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\gamma)\sin(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\alpha) & \cos(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta)\sin(\alpha)\sin(\gamma) + \cos(\gamma)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\gamma) & \cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\gamma)\sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Caso 4.

$$\begin{aligned}
R_{yzx} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= R_y(\beta) \cdot R_z(\alpha) \cdot R_x(\gamma) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\beta)\sin(\alpha) + \sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\gamma) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\gamma)\cos(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\gamma) \\ \cos(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\beta)\sin(\gamma) + \cos(\gamma)\sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\gamma) \\ \cos(\alpha)\sin(\gamma) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Caso 5.

$$\begin{aligned}
R_{zxy} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= R_z(\alpha) \cdot R_x(\gamma) \cdot R_y(\beta) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) & \cos(\gamma)\sin(\alpha) & \cos(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ -\cos(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\gamma)\sin(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\gamma)\sin(\beta) & -\sin(\gamma) & \cos(\beta)\cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\beta)\sin(\gamma)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\alpha) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Caso 6.

$$\begin{aligned}
 R_{zyx} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= R_z(\alpha) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\gamma) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & \cos(\gamma) \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\gamma) \sin(\beta) & \sin(\gamma) \sin(\alpha) - \cos(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\beta) \sin(\gamma) \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\gamma) \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \sin(\gamma) & \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin(\gamma) \sin(\alpha) - \cos(\gamma) \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\gamma) \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \cos(\gamma) \end{pmatrix} \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Se puede observar que las ecuaciones (4.2), (4.6), (4.10), (4.11), (4.12) y (4.13), que indican las matrices de rotación obtenidas, son todas diferentes entre sí.

Una consecuencia de esto es que los ángulos de rotación roll, pitch y yaw quedan sin sentido si no se define previamente el orden en el cual estas rotaciones son aplicadas.

Las rotaciones que se obtienen desde el caso 3, inclusive, en adelante, pueden ser dejadas de lado para determinar la orientación del teléfono móvil.

La salida del acelerómetro tiene tres componentes pero, como el vector g (que se encuentra sobre la superficie de una esfera de radio 1) posee norma igual a 1, solamente se tienen dos grados de libertad.

Por lo tanto no es posible resolver estas rotaciones para tres únicos valores de los ángulos roll, pitch y yaw. En estos cuatro últimos casos, la salida del acelerómetro se corresponde a una función de los tres ángulos de rotación y, por lo tanto, no pueden ser resueltas.

Sin embargo, las matrices de rotación obtenidas en los dos primeros casos, dependen solamente de los ángulos γ (roll) y β (pitch), y pueden ser resueltas. La falta de dependencia del ángulo de rotación α (yaw) se puede comprender físicamente desde la primera rotación con un ángulo α alrededor del eje z del teléfono, que está, inicialmente, alineado con el campo gravitacional terrestre y apunta hacia abajo.

Todos los acelerómetros son insensibles a las rotaciones con eje en la dirección del campo gravitacional y no pueden ser usados para determinar tal rotación.

De esta manera, se terminan utilizando las secuencias de rotaciones R_{xyz} , del caso 1, o R_{yxz} , del caso 2, para poder eliminar la rotación sobre el ángulo α y, así, encontrar la solución para los ángulos γ y β .

4.4. Eliminación de soluciones duplicadas limitando los ángulos pitch y roll

En la sección anterior se mostró por qué se utilizan las secuencias de rotaciones R_{xyz} o R_{yxz} . Sin embargo, estas rotaciones presentan un número infinito de soluciones para los ángulos γ y β .

Restringiendo los ángulos roll y pitch entre $-\pi$ y π ayuda de alguna manera, pero, como se verá, esto conduce a dos soluciones únicas de los ángulos nombrados.

Si se evalúa la expresión (4.2) para el ángulo roll $\gamma + \pi$ y para el ángulo pitch $\pi - \beta$, y aplicando identidades trigonométricas, la medición del acelerómetro es la misma que resulta de las rotaciones de γ y β , es decir:

$$= \begin{pmatrix} -\text{sen}(\beta) \\ \cos(\beta)\text{sen}(\gamma) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\pi - \beta) \\ \cos(\pi - \beta)\text{sen}(\gamma + \pi) \\ \cos(\pi - \beta)\cos(\gamma + \pi) \end{pmatrix}$$

Similarmente, si se evalúa la expresión (4.6) para el ángulo roll $\pi - \gamma$ y para el ángulo pitch $\beta + \pi$, también la medida del acelerómetro coincide con la que surge de las rotaciones de γ y β , o sea:

$$= \begin{pmatrix} -\text{sen}(\beta)\cos(\gamma) \\ \text{sen}(\gamma) \\ \cos(\beta)\cos(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}(\beta + \pi)\cos(\pi - \gamma) \\ \text{sen}(\pi - \gamma) \\ \cos(\beta + \pi)\cos(\pi - \gamma) \end{pmatrix}$$

La solución es restringir el ángulo roll o el ángulo pitch, pero no ambos, entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

La convención utilizada en la secuencia aeroespacial es que el ángulo roll esté entre $-\pi$ y π , mientras que el ángulo pitch esté entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

La convención usada por los teléfonos móviles Android y por Microsoft es lo contrario: el ángulo roll entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, y el ángulo pitch entre $-\pi$ y π .

Cualquiera sea la convención utilizada, lo que se obtiene es la eliminación de una de las dos soluciones duplicadas.

4.5. Implementación del software Mathematica para la visualización de una rotación de un teléfono móvil

En esta sección se describe una simulación de un objeto rotando en el espacio, usando el software Mathematica. En particular, el objeto es un teléfono móvil. Se registra su orientación a través de los datos del acelerómetro, que luego se procesan en Mathematica.

Para poder visualizar una rotación determinada de un teléfono móvil a través del software Mathematica, es necesario instalar en el teléfono una aplicación que lea los datos del sensor, en el caso estudiado, el acelerómetro, y los grabe.

La aplicación que se utiliza se llama AndroSensor, en su versión 1.9.6.3. Una vez instalada, se comienza a grabar mientras el teléfono rota durante un determinado intervalo de tiempo. Luego, al detener la grabación, se genera un archivo .CSV (comma-separated values o valores separados por coma).

Por último, se importa el archivo .CSV desde Mathematica.

Se generan los vectores $G_{px}(t)$, $G_{py}(t)$ y $G_{pz}(t)$, que contienen el registro del acelerómetro en cada instante t , $t = 1, 2, \dots, t_{fin}$, donde t_{fin} es la cantidad total de datos almacenados. Si la frecuencia con la que AndroSensor registra la salida del acelerómetro es f registros por segundo, y se graban s segundos, $t_{fin} = f \cdot s$ datos.

A continuación se obtienen, usando las ecuaciones 4.4 y 4.5 (o las ecuaciones 4.8 y 4.9) los ángulos roll y pitch para cada t . Se determina que $\alpha = 0$ en todo instante.

Para definir la rotación se implementaron tres alternativas:

- Definiendo la matriz de rotación M usando la ecuación 3.4
- Aplicando secuencialmente las tres rotaciones R_α , R_β y R_γ , a partir de las ecuaciones 3.1, 3.2, 3.3 (obviamente, siendo $\alpha = 0$, $R_\alpha = I$. Pero en la programación se considera la matriz R_α para poder usarse en otros casos más genéricos).
- Definiendo el cuaternión correspondiente a la orientación en cada instante, usando las ecuaciones 3.9, 3.10, 3.11, 3.12, y aplicando la rotación al objeto usando ecuación 2.30. Ya que $\alpha = 0$, las componentes del cuaternión resultan:

$$q_0 = \frac{\sqrt{1 + C_\beta + C_\gamma + C_\beta C_\gamma}}{2}$$

$$q_1 = \frac{-C_\beta S_\gamma - S_\gamma}{4q_0}$$

$$q_2 = \frac{-C_\gamma S_\beta - S_\beta}{4q_0}$$

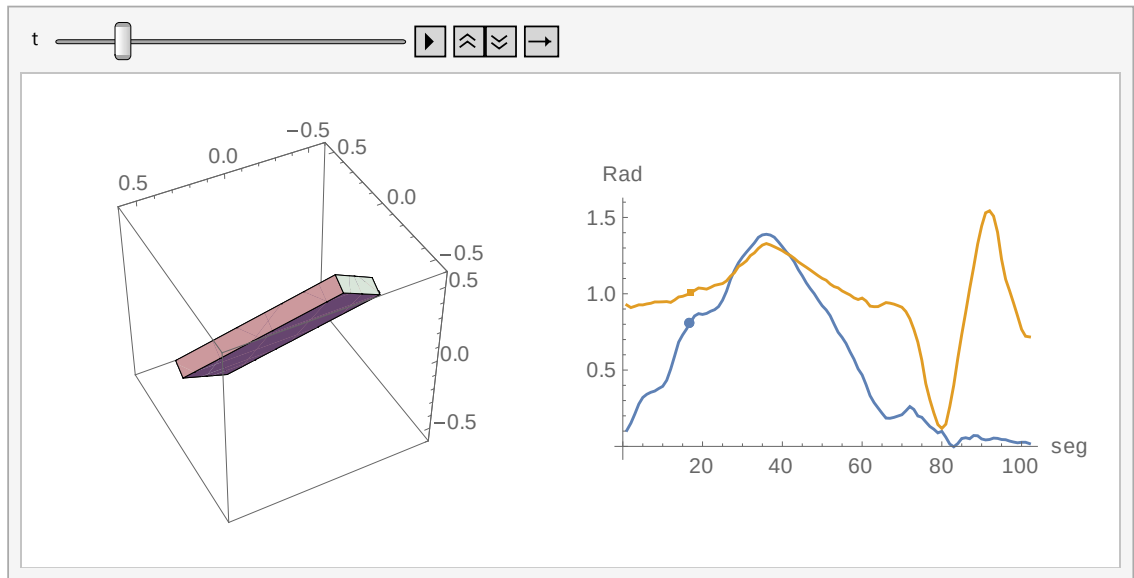
$$q_3 = \frac{-S_\beta S_\gamma}{4q_0}$$

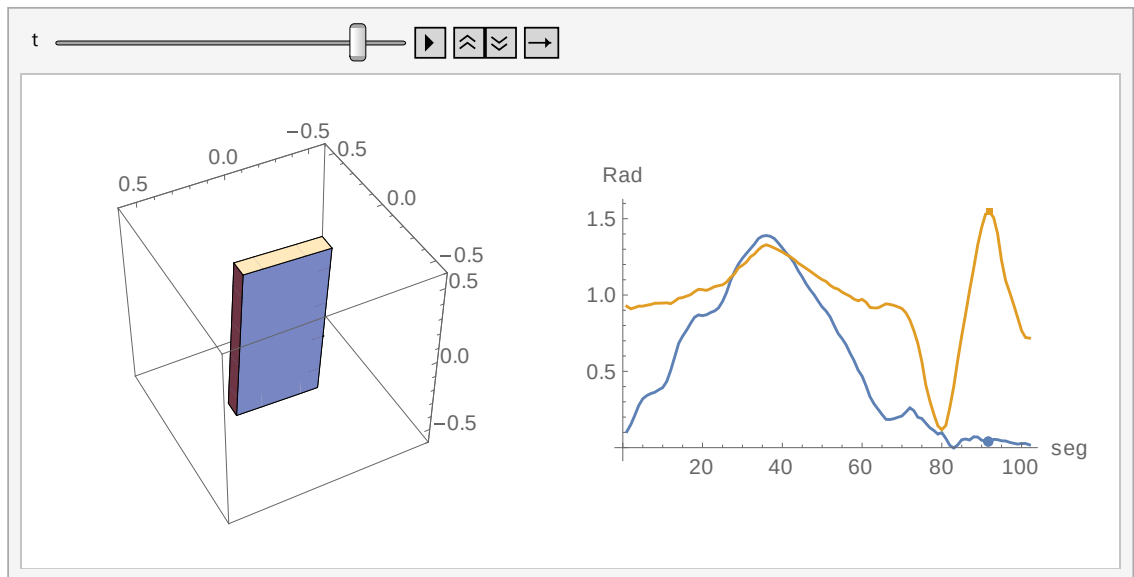
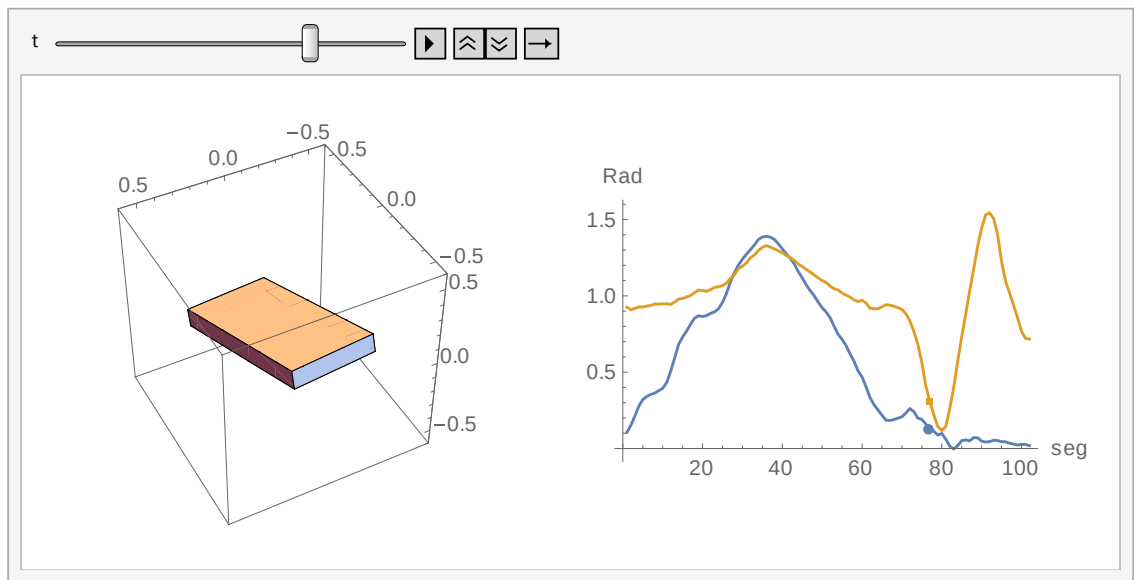
El objeto simulado se define como un cuboide de dimensiones 1x0.5x0.1.

Al cuboide se le aplica la rotación definida por los datos del sensor, para cada instante t , y se visualiza como una animación. Así, el cuboide reproduce el movimiento del teléfono.

Como ejemplo, se muestran tres instantes determinados que muestran la posición del teléfono a partir de los datos registrados con AndroSensor.

En la figura también se muestra la evolución de los ángulos pitch y roll en los s segundos que se registraron (en este caso, $s = 102$) donde el ángulo pitch está representado por la curva azul y el ángulo roll por la curva amarilla.





Cabe aclarar que el resultado de la simulación es el mismo para las tres alternativas de definir la transformación de rotación del cuboide.

Capítulo 5

A modo de cierre

Los llamados cuaterniones o números hipercomplejos fueron usados por la Física a fines del siglo XIX y principios del XX. Sin embargo, el desarrollo del cálculo vectorial, posterior a la invención de los cuaterniones, terminó dominando el estudio del espacio n -dimensional, dejando de lado a los mismos, a pesar de que el álgebra de los cuaterniones posee notables ventajas si se desea trabajar en el espacio tridimensional.

Para describir rotaciones de un objeto en $\mathbb{R}^3$, los ángulos de Euler y las matrices de rotaciones desplazaron a los cuaterniones, relegando así las ventajas vinculadas con su eficiencia y sus características algebraicas.

Cabe destacar que, en la actualidad, y desde hace varios años, ha crecido la utilización de los cuaterniones en diferentes disciplinas, como, por ejemplo, la robótica, la visión artificial en 3D, la navegación aeroespacial, los videojuegos, etc. A través de diversas implementaciones en dichas disciplinas, y en otras más, se pueden observar las múltiples aplicaciones que tienen los cuaterniones. Son, por lo tanto, muy importantes para el desarrollo de aplicaciones en el ámbito científico-tecnológico.

El objetivo de este trabajo es mostrar una alternativa al uso de los ángulos de Euler y las matrices de rotaciones para describir cómo rota un objeto en el espacio tridimensional. Esa alternativa fueron los cuaterniones.

También se ha estudiado detenidamente la forma de pasar de una representación a otra. Se vio que, debido a la periodicidad y propiedades de paridad/imparidad de las funciones trigonométricas, las soluciones pueden no ser únicas, a menos que se impongan restricciones en los valores de los ángulos.

Referencias:

- [1] Eduardo Serrano, Ricardo Oscar Sirne, Guillermo La Mura. *Rotaciones, secuencia aeroespacial y cuaterniones. Una revisión de las relaciones fundamentales*. Ciencia y Tecnología, 14, 2014, pp. 11-28.

- [2] María Lorena Bergamini, Jorge Alejandro Kamlofsky. *Parametrizaciones de Movimientos Rígidos en 3D para Visión Artificial*. Actas del 3er. Congreso Nacional de Ingeniería Informática / Sistemas de Información CoNaIISI 2015, pp. 365-369.

- [3] María Lorena Bergamini. *Números hipercomplejos*. VIII JORNADAS DE MATEMÁTICA – 2015. Universidad Abierta Interamericana.

- [4] G. F. Torres del Castillo. *La representación de rotaciones mediante cuaterniones*. Miscelánea Matemática 29, 1999, pp. 43-50.

- [5] José Dorronzoro, Eugenio Hernández. *Números, grupos y anillos*. Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid. 1996.

- [6] William Rowan Hamilton. *On quaternions*. Proceedings of the Royal Irish Academy, 3. 1847, pp. 1-16.

- [7] David Eberly. *Quaternion algebra and calculus*. Geometric Tools, LLC, 1999. Versión actualizada: 2010.

- [8] Mark Pedley. *Tilt Sensing Using a Three-Axis Accelerometer*. Freescale Semiconductor, Inc, 6, 2013.

- [9] José García Tíscar. *Android + Mathematica: Sensor de orientación*. www.wechoosethemoon.es, 2012.