

Universidad Abierta Interamericana

Facultad de Tecnología Informática



Carrera: Licenciatura en Matemática

*“Un aspecto de la Dinámica de Poblaciones: Relación Depredador-Presa”*

por

Patricia Mónica García

Directora de Tesis: Dra. María Lorena Bergamini

Tesis presentada para optar al título de Licenciada en Matemática

~Agosto de 2011~

Resumen: Se presenta un análisis detallado de un modelo matemático que describe la relación dinámica entre poblaciones en un mismo hábitat, en particular, la relación depredador-presa. Se estudia la estabilidad de las poblaciones de equilibrio.

Palabras claves: modelos matemáticos en biología, dinámica de poblaciones, Lotka-Volterra, atractor global, Lyapunov.

## Índice

Capítulo I: <i>Introducción</i>	3
1-] Modelos Dinámicos	3
1.1) Sistemas Autónomos	6
1.2) Órbita o Trayectoria	6
1.3) Punto de equilibrio	7
1.4) Estabilidad	8
1.4.1) Definiciones	8
1.4.2) Estabilidad por el método directo de Lyapunov	9
2-] Sistemas Lineales	12
2.1) Análisis de los puntos críticos de sistemas homogéneos lineales planos	14
3-] Sistemas No Lineales	23
3.1) Definición y existencia de solución	23
3.2) Linealización de sistemas no lineales	24
3.3) Estabilidad para sistemas no lineales a través del sistema linealizado	27
3.4) Ciclos límites	28
Capítulo II: <i>Modelo de Lotka-Volterra</i>	29
1-] Modelos de Población	29
2-] Modelo de Lotka-Volterra	31
3-] Puntos críticos del modelo	32
4-] Estabilidad del sistema según Lyapunov	34
5-] Órbitas cerradas en el primer cuadrante	36
6-] Modelo de Lotka-Volterra extendido	39
Capítulo III: <i>Conclusiones</i>	47
Bibliografía	49

El tema del presente trabajo es el análisis matemático de un modelo biológico. La Biología actual requiere de la aplicación de métodos cuantitativos para la descripción, explicación, análisis y predicción de procesos biológicos y todo este tratamiento de los hechos biológicos se los va a brindar la Matemática. La relación interdisciplinaria entre la Matemática y las Ciencias Biológicas se inició, para algunos, en los comienzos del Siglo XX con los trabajos de Volterra, Lotka y otros, sin olvidar que Mendel ya había hecho, en el Siglo XIX, un tratamiento estadístico de la herencia biológica (incomprendido en su momento). El desarrollo actual de la mencionada interdisciplinariedad, entre ambos campos del saber, hace que hoy estemos hablando de Biomatemática, y con augurios de un futuro promisorio.

### **1-] Modelos Dinámicos:**

Describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real, ya sea físico, sociológico o incluso económico, en términos matemáticos, se llama modelizar matemáticamente. Esta descripción matemática sea de un sistema o de un fenómeno, llamada modelo matemático, se construye con ciertos pasos objetivos en mente:

- i) Identificación de las variables: en este paso se especifica el nivel de resolución del modelo cuando se elige incorporar o no todas las variables, determinando el grado de detalle que tendrá el modelo.
- ii) Elaboración de un conjunto de hipótesis (o suposiciones razonables) acerca del sistema que se está intentando describir.

Las suposiciones que se hicieron con respecto a un sistema con frecuencia tienen que ver con una rapidez de cambio de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones podría ser una o más ecuaciones con derivadas. En otras palabras, el modelo matemático puede ser una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

- iii) Una vez que se formula el modelo matemático que es una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, se está ante el problema de tratar de encontrar la solución. Si se puede resolver, entonces se considera que el modelo es razonable si su solución es consistente con datos experimentales o hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema.

Sin embargo, si las predicciones que genera la solución son malas, se incrementa el nivel de detalle del modelo, se hacen otras suposiciones acerca de los mecanismos de cambio en el sistema. Por supuesto, que al incrementar el nivel de detalle (o descripción) se agrega complejidad al modelo matemático y se incrementa la probabilidad de que no se obtenga una solución explícita.

Los modelos son aproximaciones más o menos precisas del sistema o fenómeno que se modeliza para facilitar su comprensión y estudiar su comportamiento.

Un modelo dinámico constituye una descripción, generalmente matemática, del comportamiento de un sistema. Como ya se mencionó, uno de los modelos matemáticos más útiles para describir procesos dinámicos continuos es la *ecuación diferencial*.

Las palabras diferencial y ecuaciones, sin duda, indican resolver alguna clase de ecuaciones que contiene derivadas. Formalmente, se dice que una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una o más variables independientes, es una *ecuación diferencial*. Ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

a)  $\frac{dA}{dt} = k.A$  se puede usar para modelar crecimiento o decrecimiento exponencial (descomposición radiactiva, crecimiento de población de bacterias, etc.).

b)  $\frac{dT}{dt} = k.(T - T_m)$  es un modelo, por ejemplo, de la difusión de calor en un cuerpo.

c)  $\frac{dx}{dt} = k.x.(n+1-x)$  se puede utilizar para predecir la diseminación de una enfermedad provocada por virus.

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de orden  $n$ ,  $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  es *lineal* si  $F$  es lineal en  $y, y', \dots, y^{(n)}$ . Esto significa que es de la forma:

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y - g(t) = 0$$

o bien

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = g(t) \quad (1)$$

En el primer miembro de la ecuación (1) se ve que las dos propiedades características de una ecuación diferencial ordinaria lineal son como sigue:

- \* La variable dependiente “y” y todas sus derivadas  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  son de primer grado, es decir, la potencia de cada término en que interviene “y” es 1.
- \* Los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  de  $y, y', \dots, y^{(n)}$  dependen sólo de la variable independiente  $t$ .

Los ejemplos a) y b) son ejemplos de modelos lineales de primer orden mientras que el ejemplo c) corresponde a un modelo no lineal.

En muchos procesos y sistemas son necesarias varias ecuaciones diferenciales para describir adecuadamente su dinámica.

Un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de varias variables es de la forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Una solución de (2) consiste en  $n$  funciones  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , tales que  $\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Además de la ecuación (2) se imponen con frecuencia condiciones iniciales sobre las funciones  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Dichas condiciones serán de la forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \tag{3}$$

La ecuación (2), junto con las condiciones iniciales (3), se conocen como problema de valor inicial. La solución de tal problema consiste en  $n$  funciones  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  que satisfacen (2) y las condiciones iniciales (3).

Algunos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden provienen de ecuaciones de orden superior para una variable  $y(t)$ .

Toda ecuación diferencial de orden  $n$  en la variable  $y$ , puede expresarse como un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden para las variables

$$x_1(t) = y, x_2(t) = \frac{dy}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$$



en el intervalo  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Conforme  $t$  aumenta de  $t_0$  a  $t_1$ , el conjunto de puntos  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  describe una curva  $C$  en espacio de dimensión  $n$ . Esta curva es la *órbita* o *trayectoria* de la solución  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , para  $t_0 \leq t \leq t_1$ , y el espacio de dimensión  $n$ , es el *espacio de fases* de las soluciones de (5).

Se suele denotar también con  $\mathbf{j}_t(\mathbf{x}_0)$  a la trayectoria que comienza en el punto  $\mathbf{x}_0$  (es decir, con  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ ).

### 1.3) Punto de Equilibrio:

Un punto de equilibrio, punto fijo o punto crítico es un punto  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  que anula las funciones  $f_j$  de (4), es decir, es una solución del sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Dependiendo de las formas particulares de  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , el sistema (4) puede tener cualquier cantidad de puntos críticos, que van desde cero hasta una cantidad infinita. Para el punto  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  tal que

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \quad y \\ f_2(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \quad y \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

se cumple que

$$x_1(t) \equiv x_1^* \quad y \quad x_2(t) \equiv x_2^* \quad y \quad \dots \quad y \quad x_n(t) \equiv x_n^*$$

es una solución constante del sistema de ecuaciones (4). Por eso se lo llama *punto de equilibrio* o *fijo*, ya que determina una solución constante. En términos físicos, si una partícula en  $R^n$  cuya velocidad está descrita por (4), se encuentra en el punto de equilibrio, ésta permanece quieta (con velocidad cero).

### 1.4) Estabilidad

#### 1.4.1) Definiciones:

Se considera un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  de un sistema  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

-Se dice que  $\mathbf{x}^* = 0$  es un punto fijo *atractor* si todas las trayectorias que comienzan cerca de  $\mathbf{x}^*$  se acercan a él cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto es,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , si  $\mathbf{x}(0)$  está cerca de  $\mathbf{x}^*$ .

En sistemas lineales, un atractor  $\mathbf{x}^*$  atrae todas las trayectorias en el plano de fases, por lo tanto es llamado *atractor global* o *general*.

Formalmente un punto  $\mathbf{x}^*$  es *atractor* si existe  $d > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$  siempre que  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < d$ . En otras palabras, si una trayectoria comienza a una distancia menor que  $d$  de  $\mathbf{x}^*$  está garantizado que converge a  $\mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

- Se dice que un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  es Liapunov estable si todas las trayectorias que comienzan cerca de  $\mathbf{x}^*$  permanecen cerca del punto todo el tiempo

Formalmente, un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  es *Liapunov estable* si para cada  $e > 0$ , existe un  $d > 0$  tal que  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < e$  para todo  $t \geq 0$  si  $\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < d$ . Así esas trayectorias que empiezan a una distancia  $d$  de  $\mathbf{x}^*$  permanecen a una distancia  $e$  de  $\mathbf{x}^*$  para todo  $t \geq 0$  (Figura 1).

Finalmente,  $\mathbf{x}^*$  es *asintóticamente estable* si el punto es *atractor* y *Liapunov estable*.

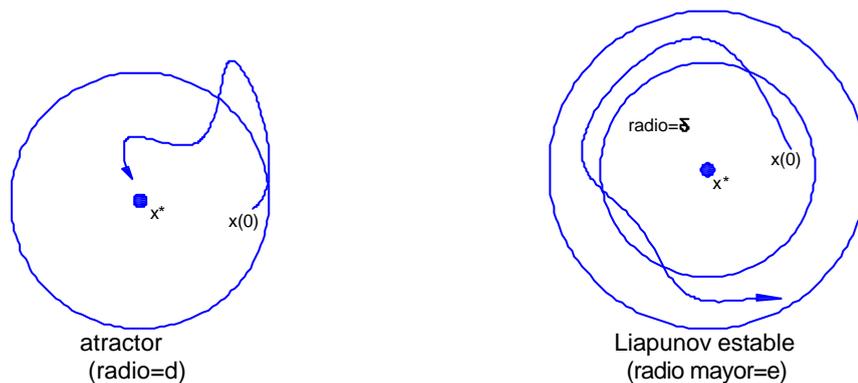


Figura 1

Como se muestra en la figura 1, si un punto fijo es atractor, las trayectorias que comienzan cercanamente pueden alejarse de  $\mathbf{x}^*$  en algún momento, pero deben volver y tender a  $\mathbf{x}^*$ . En contraste, la estabilidad de Liapunov requiere que la cercanía de las trayectorias se mantenga en todo tiempo.

Un punto fijo puede ser Liapunov estable pero no atractor.. Cuando un punto fijo es Liapunov estable pero no atractor es llamado punto neutralmente estable.

Finalmente, un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  es inestable si no es ni atractor ni Liapunov estable.

Un punto  $P$  es *globalmente estable* en un conjunto  $B \subset R^n$  si toda trayectoria en  $B$  es atraída por él.

#### 1.4.2) Estabilidad por el método directo de Lyapunov:

En 1892, Lyapunov mostró que algunas funciones pueden usarse para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio. Sea  $V : D \rightarrow R$  una función continuamente diferenciable en un dominio  $D \subset R^n$  que contiene el origen. La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

La derivada de  $V$  a lo largo de las trayectorias de un sistema depende de la ecuación del sistema. Por lo tanto,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  será diferente para los diferentes sistemas. Si  $\mathbf{j}_t(\mathbf{x})$  es la trayectoria de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  que se inicia en el estado inicial  $\mathbf{x}$  en el tiempo  $t=0$ , entonces

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} V(\mathbf{j}_t(\mathbf{x}))_{t=0}$$

Por lo tanto, si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es negativa,  $V$  disminuirá a lo largo de la solución de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$

Enunciaremos un primer teorema de existencia de soluciones que se usará en la demostración del teorema de Lyapunov.

**Teorema 1:** Sea  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  continua por partes en  $t$  y localmente Lipschitz en  $\mathbf{x}$   $\forall t \geq t_0$  y todo  $\mathbf{x}$  en un dominio  $D \subset R^n$ . Sea  $W$  un subconjunto compacto de  $D$ ,  $\mathbf{x}_0 \in W$ , y supongamos que se sabe que toda solución de

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

permanece todo el tiempo en  $W$ . Entonces existe una solución única que está definida  $\forall t \geq t_0$

**Teorema 2 (Lyapunov):** Sea el origen  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  un punto de equilibrio de  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  donde  $\mathbf{f}$  es continua por partes y localmente Lipschitz para todo  $\mathbf{x}$  en un

dominio  $D \subset \mathbb{R}^n$  que contiene al origen. Sea  $V: D \rightarrow \mathbb{R}$  una función continuamente diferenciable tal que

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{y} \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{en} \quad D - \{\mathbf{0}\} \quad (7)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{en} \quad D \quad (8)$$

Entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es estable. Más aún, si

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{en} \quad D - \{\mathbf{0}\} \quad (9)$$

Entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable.

*Demostración:* Dado  $\epsilon > 0$ , elijamos  $r \in (0, \epsilon]$  tal que

$$B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subset D$$

Sea  $a = \min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(\mathbf{x})$ . Entonces  $a > 0$  por (7). Tomemos  $b \in (0, a)$  y sea

$$\Omega_b = \{\mathbf{x} \in B_r / V(\mathbf{x}) \leq b\}$$

Entonces  $\Omega_b$  está en el interior de  $B_r$ . Si no fuera así, existiría un punto  $p \in \Omega_b$  que se encuentra sobre la frontera de  $B_r$ . En este punto,  $V(p) \geq a > b$ , pero para todo  $\mathbf{x} \in \Omega_b$ ,  $V(\mathbf{x}) \leq b$ , lo cual es una contradicción (ver figura 2).

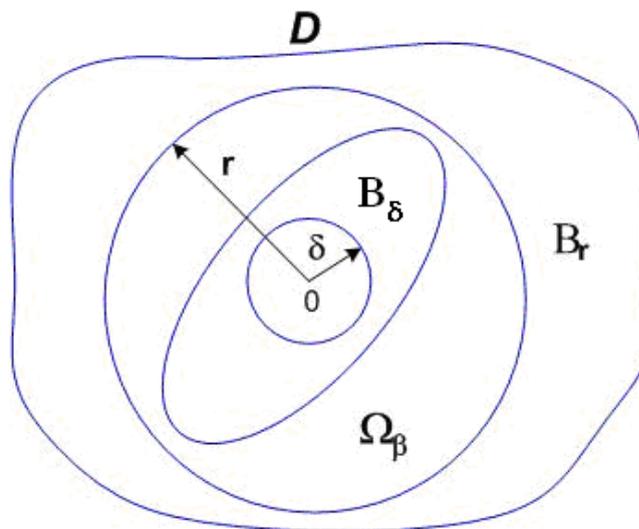


Figura 2: Representación geométrica de los conjuntos en la demostración del Teorema 2

El conjunto  $\Omega_b$  tiene la propiedad de que toda trayectoria que comienza en  $\Omega_b$  en  $t = 0$  permanece en  $\Omega_b$  para todo  $t \geq 0$ .

Es decir, si  $\mathbf{x}(0) \in \Omega_b$ , entonces  $\mathbf{x}(t) \in \Omega_b$ , para todo  $t \geq 0$ . Esto es así ya que de (8) se observa que

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \Rightarrow V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0)) \leq b, \quad \forall t \geq 0$$

Como  $\Omega_b$  es un conjunto compacto (cerrado por definición y acotado porque está contenido en  $B_r$ ), concluimos por el Teorema 1 que el problema de valor inicial  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  tiene una solución única definida para todo  $t \geq 0$  cuando  $\mathbf{x}_0 \in \Omega_b$ . Como  $V$  es continua y  $V(\mathbf{0}) = 0$ , existe  $d > 0$  tal que

$$\|\mathbf{x}\| \leq d \Rightarrow V(\mathbf{x}) < b$$

Entonces

$$B_d \subset \Omega_b \subset B_r, \quad \text{y}$$

$$\mathbf{x}(0) \in B_d \Rightarrow \mathbf{x}(0) \in \Omega_b \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in \Omega_b \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in B_r \quad \forall t \geq 0$$

Por lo tanto

$$\|\mathbf{x}(0)\| < d \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < r \leq e, \quad \forall t \geq 0$$

lo que demuestra que el punto de equilibrio en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es *estable*.

Supongamos ahora que (9) también vale. Para mostrar estabilidad asintótica debemos probar que  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V$  es continua y  $V(\mathbf{0}) = 0$ , es suficiente mostrar que  $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Como  $V(\mathbf{x}(t))$  es monotónicamente decreciente y acotada inferiormente por cero,

$$V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow c \geq 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

Mostramos que  $c = 0$  por contradicción. Supongamos que  $c > 0$ . Por continuidad de  $V(\mathbf{x})$ , existe  $d > 0$  tal que  $B_d \subset \Omega_c$ . El límite  $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow c > 0$  implica que la trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  permanece fuera de la bola  $B_d$  para todo  $t \geq 0$ .

Sea  $-g = \max_{d \leq \|\mathbf{x}\| \leq r} \dot{V}(\mathbf{x})$ , el cual existe porque la función continua  $\dot{V}(\mathbf{x})$  alcanza un máximo sobre el conjunto compacto  $\{d \leq \|\mathbf{x}\| \leq r\}$ . Sabemos que  $-g < 0$  por (9). Integrando  $\dot{V}(\mathbf{x})$  tenemos que

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}(t)) dt \leq V(\mathbf{x}(0)) - g t$$

Como el lado derecho se hará negativo después de un cierto tiempo, la desigualdad contradice (7). Entonces, no es cierto que  $c > 0$ , luego  $c = 0$  y el punto de equilibrio  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  es asintóticamente estable.

Una función continuamente diferenciable que satisface (7) y (8) se denomina *función de Lyapunov*. La superficie  $V(\mathbf{x}) = c$  se denomina *superficie de Lyapunov* o *superficie de nivel*. Usando superficies de Lyapunov, la figura 3 da una interpretación intuitiva del Teorema 2. La condición  $\dot{V} \leq 0$  implica que

cuando la trayectoria cruza la superficie de Lyapunov  $V(\mathbf{x})=c$  se introduce en el conjunto  $\Omega_c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / V(\mathbf{x}) \leq c\}$  y nunca puede salir de él. Cuando  $\dot{V} < 0$ , la trayectoria se mueve de una superficie de Lyapunov a otra superficie de Lyapunov interior con un “c” menor. A medida que “c” decrece, la superficie de Lyapunov  $V(\mathbf{x})=c$  se achica hasta transformarse en un punto (el origen), mostrando que la trayectoria tiende al origen cuando  $t \rightarrow \infty$ . Si sólo sabemos que  $\dot{V} \leq 0$ , no podemos asegurar que la trayectoria tienda al origen, pero podemos concluir que el origen es estable porque la trayectoria puede ser encerrada en cualquier bola  $B_\epsilon$  sólo con requerir que el estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  pertenezca a una superficie de Lyapunov contenida en dicha bola.

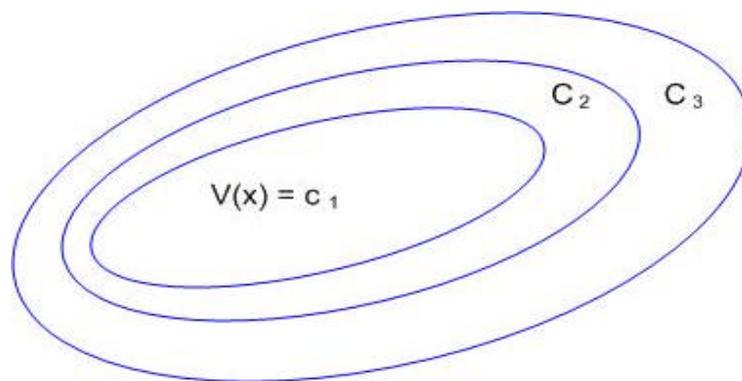


Figura 3: Curvas de nivel de una función de Lyapunov ( $c_1 < c_2 < c_3$ )

Una función  $V(\mathbf{x})$  que satisface (7) se dice *definida positiva*. Si satisface la condición más débil  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  para  $\mathbf{x} \neq 0$ , se dice *semidefinida positiva*. Una función se dice *definida negativa* o *semidefinida negativa* si  $-V(\mathbf{x})$  es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente. Si  $V(\mathbf{x})$  no tiene signo definido con respecto a alguno de estos cuatro casos se dice *indefinida*.

El Teorema 2 se puede enunciar, usando esta nueva terminología como: *el origen es estable si existe una función definida positiva y continuamente diferenciable tal que  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es semidefinida negativa, y es asintóticamente estable si  $\dot{V}(\mathbf{x})$  es definida negativa.*

## **2-] Sistemas Lineales:**

Un sistema de ecuaciones diferenciales de orden  $n$  es *lineal* cuando es de la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t).x_1 + a_{12}(t).x_2 + \dots + a_{1n}(t).x_n + g_1(t) \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t).x_1 + a_{22}(t).x_2 + \dots + a_{2n}(t).x_n + g_2(t) \\
&\quad \cdot \quad \cdot \\
&\quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t).x_1 + a_{n2}(t).x_2 + \dots + a_{nn}(t).x_n + g_n(t)
\end{aligned} \tag{10}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}$  y las funciones  $g_i$  son continuas en un intervalo común ? Cualquier sistema que no puede representarse en términos del sistema de ecuaciones (10) se dice que es *no lineal*.

Cuando  $g_i(t) = 0$  con  $i = 1, 2, \dots, n$  se dice que el sistema lineal es *homogéneo*, en caso contrario es *no homogéneo*.

Forma matricial de un sistema lineal: Si  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}(t)$  y  $\mathbf{g}(t)$  denotan matrices respectivas

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden (10) se puede escribir como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdot & \cdot & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdot & \cdot & a_{2n}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdot & \cdot & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

o simplemente,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{g} \tag{11}$$

Si el sistema es homogéneo, entonces su forma matricial es

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} \tag{12}$$

Un vector solución en un intervalo  $I$  es cualquier matriz columna  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$

cuyos elementos son funciones diferenciables que satisfacen el sistema (11) en el intervalo  $I$ .

Un vector solución de (11) es, por supuesto, equivalente a  $n$  ecuaciones escalares  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$ , ...,  $x_n = x_n(t)$  y se puede interpretar desde el punto de vista geométrico como un conjunto de ecuaciones paramétricas de una curva en el espacio. En el caso  $n=2$ , las ecuaciones  $x_1 = x_1(t)$ ,  $x_2 = x_2(t)$  representan una curva en el plano  $x_1x_2$ .

### 2.1) Análisis de los puntos críticos de sistemas homogéneos lineales planos:

De acuerdo a lo desarrollado anteriormente, las definiciones fueron dadas para sistemas de ecuaciones diferenciales en  $R^n$  y como el modelo que se estudia en este trabajo es un sistema en  $R^2$ , se expone la descripción de los tipos de puntos críticos restringidos en un espacio bidimensional (es decir,  $n=2$ ).

Consideremos el sistema

$$\frac{dx}{dt} = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y$$

que tiene al origen como punto crítico. La matriz  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  se denomina

matriz de coeficientes del sistema. Suponemos que

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0 \quad (14)$$

es decir, el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo. Así,  $(0,0)$  es el único punto crítico

Los tipos de puntos críticos que se encuentran en sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en  $R^2$  son los siguientes:

-*Nodo*: Se distinguen dos tipos de nodos, nodos propios y nodos impropios. En los nodos propios el retrato de fases está formado por semirrectas donde todas entran (o todas salen) del punto crítico. Se le llama también nodo estrella.

Cuando las trayectorias tienden al punto crítico cuando  $t \rightarrow \infty$ , se dice que es un sumidero y cuando salen de él, o sea si tienden al punto crítico cuando  $t \rightarrow -\infty$ , se dice que es una fuente. En los nodos impropios, tienden e incluso entran las trayectorias cuando  $t \rightarrow \infty$  (o  $t \rightarrow -\infty$ ), para este nodo existen cuatro trayectorias en forma de semirrectas con extremos en el punto crítico y las restantes trayectorias tienen el aspecto de ramas de parábola y al tender hacia el origen sus pendientes tienden a la pendiente de una de las semirrectas.

-*Punto silla*: El punto crítico  $\mathbf{x}^*$  es un punto silla si el retrato de fases muestra que a este punto tienden y hacia él entran dos semirrectas con extremos en  $\mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y hay otras dos semirrectas que salen del punto crítico cuando  $t \rightarrow -\infty$ . Entre estas cuatro semirrectas hay cuatro regiones, las cuales contienen una familia de trayectorias en forma de hipérbolas; estas trayectorias no tienden hacia  $\mathbf{x}^*$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , sino que son asintóticas a alguna de las semirrectas cuando  $t \rightarrow \infty$ .

-*Centro* (o *vórtice*): Es un punto crítico que está rodeado por una familia de trayectorias cerradas. Ninguna trayectoria tiende a él cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

-*Foco*: Un punto crítico  $\mathbf{x}^*$  se llama foco o punto espiral si el retrato de fases muestra que hacia él tienden (o salen de él) las trayectorias de una familia que gira en forma espiral un número infinito de veces cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . Se observa que aunque las trayectorias tienden al punto crítico  $\mathbf{x}^*$ , no entran a él en una dirección determinada, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{dy}{dx} \text{ no existe}$$

El tipo de punto crítico de un sistema en particular depende de los coeficientes del sistema, específicamente de los autovalores de la matriz de coeficientes, como se describe a continuación.

El sistema (13) tiene una solución no trivial de la forma  $\begin{cases} x = Ae^{I t} \\ y = Be^{I t} \end{cases}$  siempre que

$I$  sea un autovalor de la matriz de coeficientes y además se calcula como raíz de la ecuación cuadrática

$$|A - I \cdot I| = I^2 - (a_1 + b_2) \cdot I + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) = 0 \quad (15)$$

La ecuación cuadrática indicada en (15) se conoce como ecuación característica del sistema. Nótese que la condición (14) implica que cero no puede ser raíz de (15). Sean  $I_1$  y  $I_2$  las raíces de (15). Se probará que la

naturaleza del punto crítico (0,0) del sistema (13) viene determinada por los números  $I_1$  y  $I_2$ . Se espera tres posibilidades, según que  $I_1$  y  $I_2$  sean reales y distintos, reales e iguales, o complejos conjugados. A continuación se distinguen cinco casos clasificados como sigue:

Caso A: Si las raíces  $I_1$  y  $I_2$  son reales, distintas y del mismo signo, el punto crítico (0,0) es un *nodo*.

*Demostración*: Supongamos que  $I_1$  y  $I_2$  son ambas negativas, y elegimos la notación de modo que  $I_1 < I_2 < 0$ .

La solución general de (13) en este caso es

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{I_1 t} + c_2 A_2 e^{I_2 t} \\ y = c_1 B_1 e^{I_1 t} + c_2 B_2 e^{I_2 t} \end{cases} \quad (16)$$

donde las A y las B son constantes definidas tales que  $B_1/A_1 \neq B_2/A_2$  y donde las constantes c son arbitrarias. Cuando  $c_2=0$ , obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_1 A_1 e^{I_1 t} \\ y = c_1 B_1 e^{I_1 t} \end{cases} \quad (17)$$

y cuando  $c_1=0$  obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_2 A_2 e^{I_2 t} \\ y = c_2 B_2 e^{I_2 t} \end{cases} \quad (18)$$

Para cualquier  $c_1 > 0$ , la solución (17) representa una trayectoria consistente en la semirrecta  $A_1 y = B_1 x$  con pendiente  $B_1/A_1$ ; y para  $c_1 < 0$  representa una trayectoria que consta de la semirrecta complementaria a la anterior (la que está al otro lado del origen). Como  $I_1 < 0$ , ambas trayectorias en forma de semirrecta tienden a (0,0) para  $t \rightarrow \infty$ , y como  $y/x = B_1/A_1$ , ambas entran a (0,0) con pendiente  $B_1/A_1$  (figura 4)

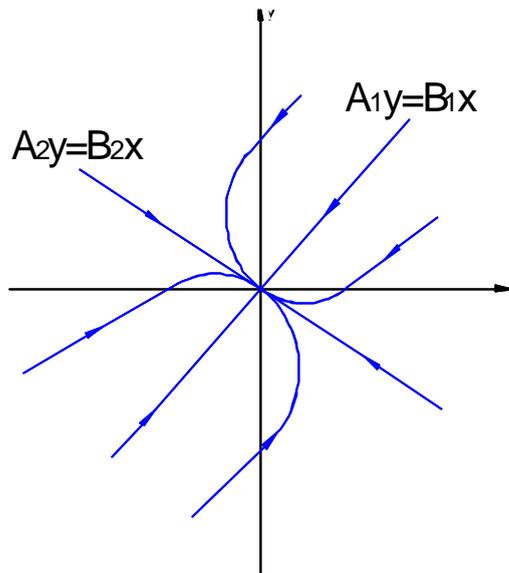


Figura 4

Exactamente del mismo modo las soluciones (18) representan dos semirrectas en la recta  $A_2 \cdot y = B_2 \cdot x$ , con pendiente  $B_2/A_2$ . Estas dos trayectorias también tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , y entran a él con pendiente  $B_2/A_2$ .

Si  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$ , la solución general (16) representa trayectorias curvas. Como  $I_1 < 0$  y  $I_2 < 0$ , estas trayectorias también tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además, al ser  $I_1 - I_2 < 0$  y

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 e^{I_1 t} + c_2 B_2 e^{I_2 t}}{c_1 A_1 e^{I_1 t} + c_2 A_2 e^{I_2 t}} = \frac{(c_1 B_1 / c_2) e^{(I_1 - I_2)t} + B_2}{(c_1 A_1 / c_2) e^{(I_1 - I_2)t} + A_2}$$

Es claro que  $y/x \rightarrow B_2/A_2$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , así que todas ellas entran a  $(0,0)$  con pendiente  $B_2/A_2$ . La figura 4 presenta un gráfico cualitativo de esta situación. Es evidente que el punto crítico es un nodo, y que es asintóticamente estable.

Si  $I_1$  y  $I_2$  son ambos positivos y elegimos la notación de manera que  $I_1 > I_2 > 0$ , la situación es exactamente la misma excepto que todas las trayectorias tienden a  $(0,0)$  y entran a él cuando  $t \rightarrow -\infty$ . La gráfica de las trayectorias es como en la figura 4 pero con las flechas invertidas. En este caso se trata de un nodo inestable

**Caso B:** Si las raíces  $I_1$  y  $I_2$  son reales, distintas y de signos opuestos, el punto crítico  $(0,0)$  es un *punto silla*.

*Demostración:* Elegimos la notación de modo que  $I_1 < 0 < I_2$ . La solución general de (13) puede escribirse como (16), y de nuevo tenemos soluciones particulares de la forma (17) y (18).

Las dos trayectorias con forma de semirrecta representadas por (17) tienden y entran a (0,0) cuando  $t \rightarrow \infty$ , pero esta vez las representadas por (18) lo hacen para  $t \rightarrow -\infty$ . Si  $c_1 \neq 0$  y  $c_2 \neq 0$ , la solución general (16) representa trayectorias curvas, pero al ser  $I_1 < 0 < I_2$ , ninguna de ellas tiende a (0,0) cuando  $t \rightarrow \infty$  o  $t \rightarrow -\infty$ . En lugar de eso, cuando  $t \rightarrow \infty$ , cada una de esas trayectorias es asintótica a una de las semirrectas (18), y cuando  $t \rightarrow -\infty$ , cada una de ellas es asintótica a una de las semirrectas (17). La figura 5 muestra una gráfica cualitativa de este comportamiento. En este caso el punto crítico es un punto silla inestable. Siempre el punto silla es inestable porque casi todas las trayectorias se apartan de él a medida que  $t$  aumenta.

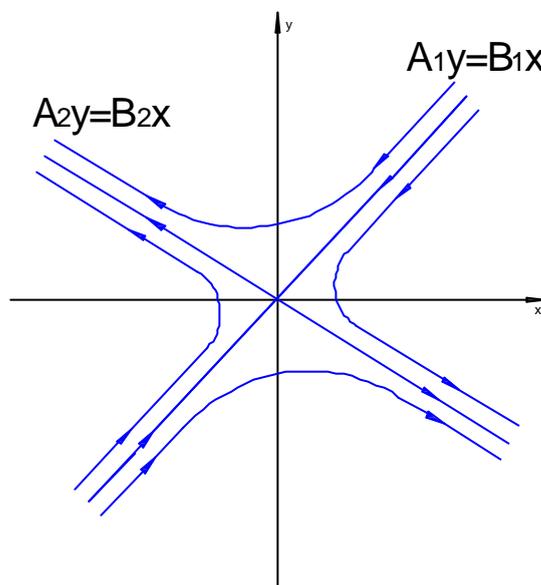


Figura 5

Caso C: Si las raíces  $I_1$  y  $I_2$  son complejas conjugadas, pero no puramente imaginarias, el punto crítico es un *foco* (o punto espiral).

*Demostración:* En este caso  $I_1$  y  $I_2$  tienen la forma  $a \pm ib$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales no nulos.

El discriminante  $D$  de la ecuación (15) es negativo:

$$D = (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1) = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0 \quad (19)$$

La solución general de (13) en este caso es:

$$\begin{cases} x = e^{at} [c_1(A_1 \cos bt - A_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(A_1 \operatorname{sen} bt + A_2 \cos bt)] \\ y = e^{at} [c_1(B_1 \cos bt - B_2 \operatorname{sen} bt) + c_2(B_1 \operatorname{sen} bt + B_2 \cos bt)] \end{cases} \quad (20)$$

Donde las  $A_i$  y  $B_i$  son constantes definidas y las  $c_i$  son constantes arbitrarias. Supongamos primero que  $a < 0$ . Entonces está claro de (20) que  $x \rightarrow 0$  e

$y \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , de modo que todas las trayectorias tienden a (0,0) cuando  $t \rightarrow \infty$ . Además las trayectorias no entran a (0,0) cuando  $t \rightarrow \infty$ , sino que giran en torno a él en forma de espirales. Para probar esto introducimos la coordenada polar  $q$  y se demostrará que, a lo largo de cualquier trayectoria,  $dq/dt$  es de signo constante para todo  $t$ . Recordando que  $q = \arctg(y/x)$ , así que

$$\frac{dq}{dt} = \frac{x \cdot dy/dt - y \cdot dx/dt}{x^2 + y^2};$$

Y usando las ecuaciones (13) obtenemos

$$\frac{dq}{dt} = \frac{a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2}{x^2 + y^2} \quad (21)$$

Suponemos que  $x^2 + y^2 \neq 0$  (ya que solo sirven las soluciones que representan trayectorias). Ahora (19) implica que  $a_2$  y  $b_1$  tienen signos opuestos. Consideremos el caso que  $a_2 > 0$  y  $b_1 < 0$ . Cuando  $y=0$ , (21) da  $\frac{dq}{dt} = a_2 > 0$ . Si  $y \neq 0$ ,  $dq/dt$  no puede ser 0; porque, si lo fuera, (21) implicaría que

$$a_2 x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1 y^2 = 0,$$

o sea

$$a_2 \left(\frac{x}{y}\right)^2 + (b_2 - a_1)\frac{x}{y} - b_1 = 0 \quad (22)$$

para algún número real  $x/y$ , cosa que no puede ser cierta por cuanto el discriminante D de la ecuación (22) es negativo por (19). Esto demuestra que  $\frac{dq}{dt}$  es siempre positiva si  $a_2 > 0$ . Análogamente se ve que  $\frac{dq}{dt}$  es siempre negativa si  $a_2 < 0$ .

Puesto que, por (20),  $x$  e  $y$  cambian de signo infinitas veces cuando  $t \rightarrow \infty$ , todas las trayectorias giran en espiral en torno al origen (en sentido contrario al de las agujas del reloj o al revés según sea  $a_2 > 0$  o  $a_2 < 0$ ). En este caso el punto crítico es un foco, asintóticamente estable.

Si  $a > 0$ , la situación es la misma salvo que las trayectorias tienden a (0,0) cuando  $t \rightarrow -\infty$  y el punto crítico es inestable.

La figura 6 ilustra la forma de las trayectorias cuando  $a_2 > 0$  y cuando  $a_2 < 0$  el recorrido de las trayectorias se presentará en forma invertida.

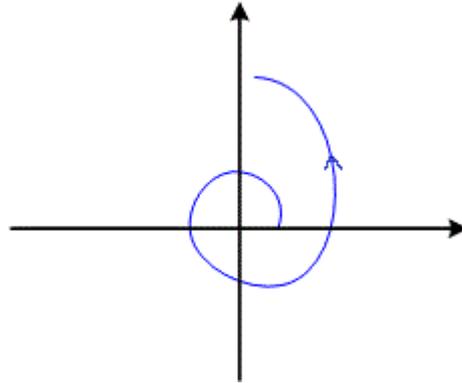


Figura 6

**Caso D:** Si las raíces  $I_1$  y  $I_2$  son reales e iguales, el punto crítico  $(0,0)$  es un *nodo*.

*Demostración:* Suponemos que  $I_1 = I_2 = I < 0$ . Hay dos subcasos que requieren ser discutidos por separado:

(i)  $a_1 = b_2 \neq 0$  y  $a_2 = b_1 = 0$ ;

(ii) todas las demás posibilidades que conducen a una raíz doble de la ecuación (15).

Considerando el subcaso (i): Si  $a$  denota el valor común de  $a_1$  y  $b_2$ , la ecuación (15) se convierte en  $I^2 - 2aI + a^2 = 0$  y  $I = a$ . El sistema (13) es, por tanto,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = ay \end{cases}$$

Y su solución general es

$$\begin{cases} x = c_1 e^{I t} \\ y = c_2 e^{I t} \end{cases} \quad (23)$$

Donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias. Las trayectorias definidas por (23) son semirrectas de todas las pendientes posibles (figura 7) y como  $I < 0$  vemos que cada una de ellas tiende y entra a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . En consecuencia, el punto crítico es un nodo asintóticamente estable. Si  $I > 0$ , tenemos la misma situación excepto que las trayectorias entran a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ , las flechas de la figura 7 se invierten y  $(0,0)$  es inestable.

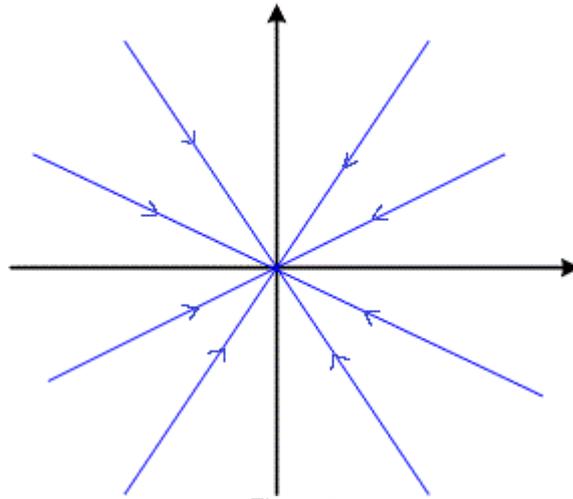


Figura 7

Discutiendo el subcaso (ii), la solución general de (13), se puede escribir

$$\begin{aligned} x &= c_1 \cdot A \cdot e^{I \cdot t} + c_2 (A_1 + A \cdot t) \cdot e^{I \cdot t} \\ y &= c_1 \cdot B \cdot e^{I \cdot t} + c_2 (B_1 + B \cdot t) \cdot e^{I \cdot t} \end{aligned} \quad (24)$$

donde las A y las B son constantes definidas y las constantes c arbitrarias. Cuando  $c_2 = 0$ , obtenemos las soluciones

$$\begin{cases} x = c_1 A e^{I t} \\ y = c_1 B e^{I t} \end{cases} \quad (25)$$

Estas soluciones representan dos semirrectas de la recta  $A \cdot y = B \cdot x$ , con pendiente  $B/A$ , y como  $I < 0$ , ambas trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (figura 8). Además, como  $y/x = B/A$ , ambas trayectorias entran en  $(0,0)$  con pendiente  $B/A$ . Si  $c_2 \neq 0$ , las soluciones (24) representan trayectorias curvas, y como  $I < 0$ , es claro de (24) que esas trayectorias tienden a  $(0,0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Más aún, se deduce de

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B e^{I t} + c_2 (B_1 + B t) e^{I t}}{c_1 A e^{I t} + c_2 (A_1 + A t) e^{I t}} = \frac{c_1 B / c_2 + B_1 + B t}{c_1 A / c_2 + A_1 + A t}$$

que  $y/x \rightarrow B/A$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , así que estas trayectorias curvadas entran todas a  $(0,0)$  con pendiente  $B/A$ . Se observa también que  $y/x \rightarrow B/A$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ . La figura 8 muestra una gráfica cualitativa del comportamiento de las trayectorias. Es claro que  $(0,0)$  es un nodo asintóticamente estable. Si  $I > 0$ , la situación es similar, salvo que las direcciones de las flechas deben invertirse y el punto crítico pasa a ser inestable.

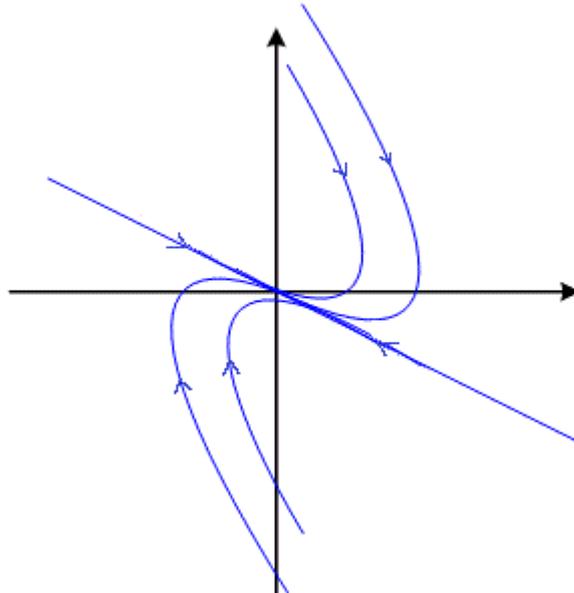


Figura 8

Caso E: Si las raíces  $I_1$  y  $I_2$  son imaginarias puras, el punto crítico  $(0,0)$  es un *centro*.

*Demostración*: Basta referirse a la discusión del caso C, porque ahora  $I_1$  y  $I_2$  son de la forma  $a \pm ib$  con  $a=0$  y  $b \neq 0$ . La solución general de (13) viene dada por tanto por (20) sin el factor exponencial, así que  $x(t)$  e  $y(t)$  son periódicas y cada trayectoria es una curva cerrada que rodea al origen. Como sugiere la figura 9, esas curvas son elipses. El punto crítico  $(0,0)$  es evidentemente un centro pero no asintóticamente estable.

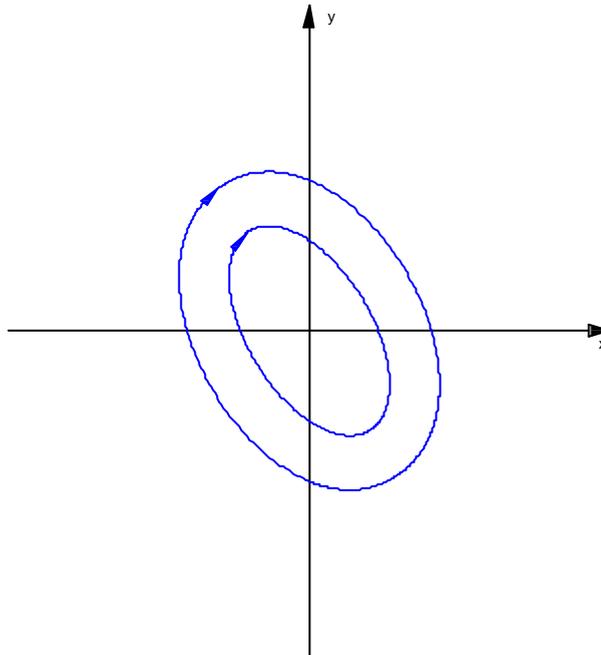


Figura 9

Si ahora escribimos la ecuación (15) en la forma

$$(I - I_1)(I - I_2) = I^2 + pI + q = 0, \quad (26)$$

De modo que  $p = -(I_1 + I_2)$  y  $q = I_1 I_2$ , luego los cinco casos anteriores son sencillos de describir en términos de  $p$  y  $q$  como en términos de  $I_1$  y  $I_2$ . Si se interpreta esos casos en el plano  $pq$ , se logra saber la naturaleza y las propiedades de la estabilidad en el punto crítico (0,0). Lo primero a observar es que el eje  $p$  (o sea  $q=0$ ) está excluido, ya que por (14) sabemos que  $I_1 I_2 \neq 0$ . Toda la información de los cinco casos condensada proviene directamente de que

$$I_1, I_2 = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Así pues, por encima de la parábola  $p^2 - 4q = 0$  se tiene  $p^2 - 4q < 0$ , luego  $I_1$  y  $I_2$  son números complejos conjugados que son imaginarios si y sólo si  $p = 0$ ; correspondería a los casos C y E de focos y centros. Por debajo del eje  $p$  tenemos  $q < 0$ , lo que significa que  $I_1$  y  $I_2$  son reales, distintos y de signos opuestos; lo que origina los puntos silla del Caso B. Y finalmente, la zona entre la parábola y el eje  $p$  (incluida la parábola pero excluido el eje  $p$ ) se caracteriza por las relaciones  $p^2 - 4q \geq 0$  y  $q > 0$ , de modo que  $I_1$  y  $I_2$  son reales y del mismo signo (nodos del caso A) y sobre la parábola  $I_1 = I_2$  (nodos del caso D). El primer cuadrante excluyendo los ejes, es una región con estabilidad asintótica; el semieje positivo  $q$  corresponde a centros y por tanto es estable; el segundo, tercero y cuarto cuadrantes son regiones inestables.

Finalmente, se observa que el punto crítico (0,0) del sistema lineal (13) es estable si y solo si ambas raíces de la ecuación (15) tienen partes reales no positivas, y es asintóticamente estable si y solo si ambas raíces tienen partes reales negativas.

### **3-] Sistemas No Lineales:**

#### **3.1) Definición y existencia de solución:**

Un sistema  $n$ -dimensional de primer grado que no puede representarse en términos del sistema de ecuaciones (10) se dice que es no lineal. Si es homogéneo su forma vectorial es de la forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

con  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Teorema 3: Teorema de existencia y unicidad:

Se considera el problema con valor inicial  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  con  $x(0) = x_0$ . Se supone

que  $f$  es continua y que todas sus derivadas parciales  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  con  $i, j = 1, \dots, n$

son continuas para todo  $x$  en algún conjunto abierto conexo  $D \subset R^n$ . Luego para  $x_0 \in D$ , el problema de valor inicial tiene una solución  $x(t)$  en algún intervalo  $(-e, e)$  con  $e > 0$  y esa solución es única.

En otras palabras, la existencia y unicidad de las soluciones están garantizadas si  $f$  es continuamente diferenciable.

Corolario: Diferentes trayectorias nunca se intersecan.

Si dos trayectorias se cruzan, habrá dos soluciones para un mismo punto (el punto de intersección) y esto violaría la condición de unicidad del teorema.

En el espacio bidimensional este resultado tiene fuertes consecuencias topológicas. Por ejemplo, supongamos que hay una trayectoria cerrada  $C$  en el espacio de fases. Luego, cualquier trayectoria que se inicie dentro de  $C$  queda atrapada en él. Si hay puntos críticos, la trayectoria puede acercarse a uno de ellos, en caso contrario, la trayectoria debe aproximarse finalmente a la órbita cerrada.

3.2) Linealización de sistemas no lineales:

Consideramos el sistema autónomo en  $R^2$

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y) \quad (27)$$

con un punto crítico aislado en  $(x^*, y^*)$  (es decir  $f(x^*, y^*) = 0$  y  $g(x^*, y^*) = 0$ ).

Si  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  se pueden desarrollar en series de potencias de  $u = x - x^*$  y  $v = y - y^*$ , entonces utilizando un desarrollo de Taylor alrededor de  $(x^*, y^*)$ , el sistema (27) adopta la forma

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + v \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + O(u, v, uv) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u, v, uv) \end{aligned} \quad (28)$$

donde las derivadas parciales son evaluadas en  $(x^*, y^*)$  y  $O(u, v, uv)$  denota el resto de términos en  $u^n, v^n, u^i v^j$ , con  $n \geq 2$  e  $i + j \geq 2$ . De manera similar

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O'(u, v, uv) \quad (29)$$

Escribiendo matricialmente lo anterior, tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O(u, v, uv) \\ O'(u, v, uv) \end{pmatrix} \quad (30)$$

La matriz

$$J(f(x, y), g(x, y))_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix}$$

se llama la matriz jacobiana del sistema (27) evaluada en el punto crítico  $(x^*, y^*)$ . Cuando  $|u|$ ,  $|v|$  son pequeños, es decir, cuando  $(u, v) \rightarrow (0, 0)$  los términos de segundo orden y de orden superior son pequeños. Despreciando estos términos, se conjetura que el comportamiento cualitativo de (28) y (29) cerca al punto crítico  $(x^*, y^*)$  es similar al del sistema lineal asociado:

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (31)$$

Se supone que

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} \neq 0$$

y se observa que si  $(x^*, y^*)$  es un punto crítico entonces  $(0, 0)$  es el punto crítico en el nuevo sistema de (31), por esto los teoremas descriptos a continuación están referidos al punto crítico  $(0, 0)$ . El proceso anterior de sustituir el sistema (27) por el sistema (31) se le llama *linealización* de (27) en el punto crítico  $(x^*, y^*)$ .

La linealización es un procedimiento que permite aproximar un modelo no lineal por otro que sí lo es y que cumple por lo tanto las propiedades de los sistemas lineales, se verá que esta aproximación no tiene validez universal sino únicamente en el entorno del punto crítico, como muestra la región ampliada en la figura 10 que interpreta gráficamente la idea de linealización:

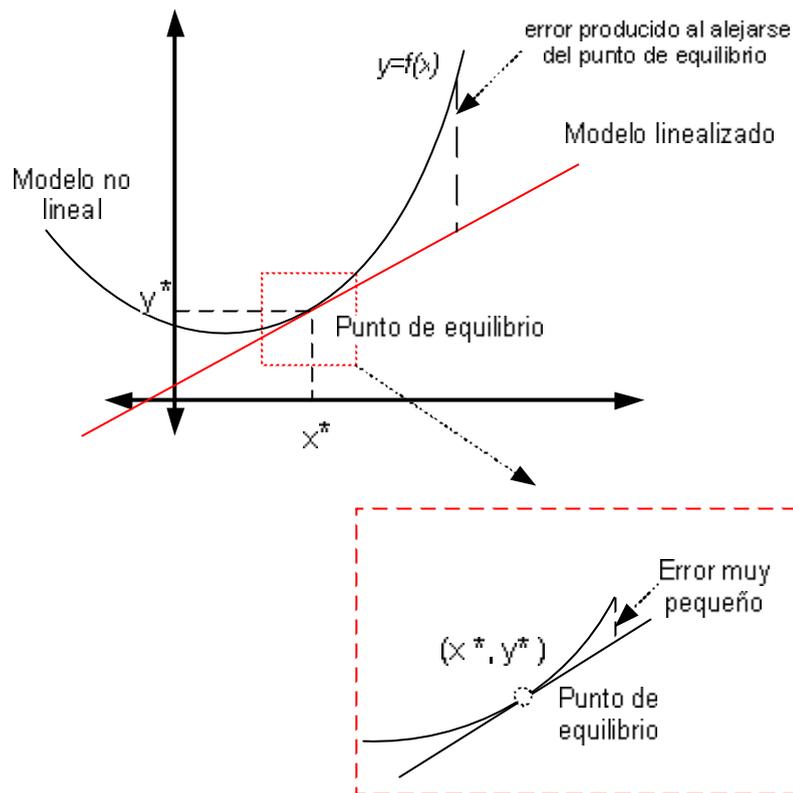


Figura 10

En forma general considerando el sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + r(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + s(x, y) \end{aligned} \quad (32)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*), & b_1 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*), \\ a_2 &= \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*), & b_2 &= \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{aligned}$$

y  $f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0$

se supone también que

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (33)$$

de tal manera que el sistema lineal asociado tiene a (0,0) como punto crítico aislado y se supone que f y g son funciones continuas con primeras derivadas parciales continuas para todo (x,y) y que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (34)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{s(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (35)$$

Estas dos últimas condiciones implican, debido a la continuidad de  $f$  y  $g$ , que  $r(0,0) = 0$  y  $s(0,0) = 0$ , de manera que  $(0,0)$  es punto crítico del sistema (32). Con las restricciones indicadas, al punto  $(0,0)$  se le llama *punto crítico simple* del sistema (32).

Teorema 4: Sea  $(0,0)$  un punto crítico simple del sistema no lineal (32), y consideremos el sistema lineal asociado (31). Si el punto crítico  $(0,0)$  de (31) pertenece a alguno de los tres casos A, B o C descritos en la Sección 2-] item 2.2), el punto crítico  $(0,0)$  de (32) es del mismo tipo.

Hay que resaltar que si bien el tipo de punto crítico  $(0,0)$  es el mismo para el sistema no lineal (32) que para el sistema lineal (31), en los casos aludidos por el teorema 4, la apariencia concreta de las trayectorias puede ser bastante diferente. Por ejemplo, la figura 5 muestra un punto silla típico para un sistema lineal, no obstante para un sistema no lineal la representación gráfica de las trayectorias de un punto silla presentará cierta distorsión.

Observación: Es natural cuestionarse sobre los dos casos D y E de la Sección 2-] no mencionados en el teorema 4. Si el sistema lineal asociado (31) tiene un nodo frontera en el origen (caso D), el sistema no lineal (32) puede tener un nodo o un foco; y si el sistema (31) tiene un centro en el origen (caso E), entonces el sistema no lineal (32) puede tener un centro o un foco estable o inestable.

En resumen, linealizar el sistema proporciona un cuadro cualitativo correcto del plano de fases siempre y cuando el punto crítico del sistema linealizado no sea un punto de los casos fronterizos D y E. Si el sistema linealizado predice un punto silla, nodo o espiral, el tipo de punto crítico corresponde también al sistema no lineal original. En cambio, si el sistema linealizado predice un punto de los casos D y E, pueden ser alterados por la supresión de los pequeños términos no lineales.

### 3.3) Estabilidad para sistemas no lineales a través del sistema linealizado:

Teorema 5: Sea  $(0,0)$  un punto crítico simple del sistema no lineal (32) y consideremos el sistema lineal asociado (31), se cumple que:

- a) Si el punto crítico  $(0,0)$  del sistema lineal asociado es asintóticamente estable, entonces el punto crítico  $(0,0)$  del sistema (32) también es asintóticamente estable.

- b) Si el punto crítico  $(0,0)$  del sistema lineal asociado es inestable, entonces el punto crítico  $(0,0)$  del sistema no lineal (32) es inestable.
- c) Si el punto crítico  $(0,0)$  del sistema lineal asociado es estable, pero no asintóticamente estable, entonces el punto crítico  $(0,0)$  del sistema no lineal (32) puede ser estable, asintóticamente estable o inestable.

#### 3.4) Ciclos límites:

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada. Aislada significa que las trayectorias vecinas no son cerradas; son espirales que se mueven desde o hacia el ciclo límite. Si todas las trayectorias vecinas se acercan al ciclo límite, éste es estable o atractor; de lo contrario, el ciclo límite es inestable, o excepcionalmente, semi-estable. Los ciclos límites son inherentes de sistemas no lineales; ellos no pueden ocurrir en sistemas lineales. Un sistema lineal puede tener orbitas cerradas, pero no son aisladas.

#### **1-] Modelos de Población:**

-Modelo de Fibonacci: El modelo más antiguo de crecimiento de poblaciones es el modelo que Leonardo de Pisa (o Fibonacci como se lo conoce desde el siglo XVIII) utilizó para describir el crecimiento de una población de conejos y que describió en su famoso libro Liber Abaci publicado en 1202. Ante el problema de que partiendo de una pareja de conejos (macho y hembra), Fibonacci se planteaba: ¿cuántas parejas habrá al principio de cada temporada? y ¿qué cantidad habrá después de “h” temporadas?. Para resolverlo supuso ciertas reglas:

1. Se comienza con una única pareja de conejos
2. Cada pareja de conejos madura pasado cierto tiempo T
3. Cada pareja madura de conejos produce una única nueva pareja de conejos cada temporada de crianza
4. Los conejos son inmortales

Si se denota por  $N_t$  el número de parejas de conejos al principio de cada temporada y por  $t$  la correspondiente temporada, entonces la población de conejos se describe por la *ecuación en diferencias* (recurrencia)

$$N_{t+1} = N_t + N_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

Si se empieza por  $t=1$  con las condiciones iniciales  $N_0 = N_1 = 1$ , la fórmula anterior nos genera la famosa sucesión de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

La ecuación que modela la población de conejos es una ecuación en diferencias lineal y homogénea. Si se busca la solución en forma  $N_t = I^t$ , sustituyendo en la ecuación anterior se obtiene

$$I^2 - I - 1 = 0 \Rightarrow I_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5});$$

así, puesto que es una ecuación lineal de orden dos, su solución general es:

$$N_t = A I_1^t + B I_2^t,$$

y usando las condiciones iniciales  $N_0 = N_1 = 1$  se obtiene:

$$N_t = \frac{1}{\sqrt{5}} (I_1^{t+1} - I_2^{t+1})$$

-Modelo maltusiano o exponencial: Considerando que se tiene un número bastante alto de individuos, sea  $p(t)$  el número de individuos de una especie en el momento  $t$ . Se supone que la población está aislada (o sea, no hay emigración ni inmigración).

Sea  $r(t,p)$  la diferencia entre la razón de natalidad y mortalidad de la población.

Entonces

$$p(t+h) - p(t) = r(t,p) p(t) h$$

si se toma límites cuando  $h \rightarrow 0$  se obtiene

$$p'(t) = r(t,p) p(t)$$

La ecuación más sencilla posible se obtiene si se considera  $r(t,p) = r$ , constante. Así, la población de individuos de la especie puede ser modelizada mediante el problema de valores iniciales

$$p'(t) = r p(t) \quad p(t_0) = p_0, \quad t > t_0 \quad (36)$$

cuya solución  $p(t) = p_0 e^{r(t-t_0)}$ . Este modelo se lo conoce como modelo de Malthus o modelo maltusiano dado que fue propuesto por el economista inglés Thomas R. Malthus. Si  $r < 0$ , la especie está condenada a la extinción y, si  $r > 0$ , ésta crece en proporción geométrica.

-Modelo Logístico: Aunque se ha visto que el modelo anterior funciona razonablemente bien para poblaciones grandes, hay que hacer varias correcciones pues si  $p(t)$  empieza a crecer demasiado habrá otros factores como la falta de espacio o de alimentos que frenará el crecimiento. Así pues, varios años después, en 1837, un matemático y biólogo holandés, P. F. Verhulst, propuso un modelo algo más realista conocido como el modelo logístico. Verhulst razonó que, como estadísticamente el encuentro de dos individuos es proporcional a  $p^2$  entonces el término  $r.p$  de la ecuación (36) habría que sustraerle el término  $c.p^2$ , con  $c > 0$ . El problema de valores iniciales que modeliza el crecimiento de la población será:

$$p'(t) = r p(t) - c p^2(t), \quad p(t_0) = p_0, \quad t > t_0 \quad (37)$$

En general "c" ha de ser mucho más pequeño que "r" ya que si "r" no es muy grande la ecuación (36) es una aproximación bastante buena, pero si  $p$  comienza a crecer demasiado entonces el término  $-c.p^2$  no se puede obviar y termina frenando el crecimiento exponencial. Usualmente "c" se escribe como el cociente  $r/K$  donde  $K$  es la capacidad de carga que está ligada a los recursos del hábitat.

La ecuación diferencial ordinaria es una ecuación separable. Luego

$$\frac{dp}{p(r - cp)} = dt \quad ? \quad \frac{dp}{p(r - cp)} = \frac{1}{r} \log \left| \frac{p}{r - cp} \right| = t + C \quad ? \quad \frac{p}{r - cp} = C e^{rt} \text{ y, por lo}$$

tanto, la solución del problema de valores iniciales (37) es:

$$p(t) = \frac{rp_0 e^{r(t-t_0)}}{r - cp_0 + cp_0 e^{r(t-t_0)}} = \frac{rp_0}{cp_0 + (r - cp_0) e^{-r(t-t_0)}}.$$

Nótese que  $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \frac{r}{c} = K$  independientemente del valor inicial  $p_0$ . En el

caso  $0 < p_0 < \frac{r}{c}$ , la evolución de la población está representada por una curva (en el plano  $tp$ ) que indica que a medida que “ $t$ ” crece, “ $p$ ” crece y se aproxima más y más a  $\frac{r}{c}$  sin sobrepasar este valor.

Este modelo se ha probado con varias especies y el hecho de que la población se estabilice ha sido comprobado en distintos experimentos. No tiene en cuenta ni las guerras ni las epidemias.

-Modelos generales: En general, los modelos discretos de poblaciones más usados tienen la forma

$$u(t+1) = f(u(t)) = u(t) F(u(t))$$

donde  $u(t)$  mide la población en el período  $t$  y  $f$  es una función no lineal.

## 2-] Modelo de Lotka-Volterra

En un intento por aclarar el origen de los ciclos de población, Alfred J. Lotka y Vito Volterra proporcionaron en forma independiente las primeras descripciones matemáticas de las interacciones depredador-presa durante la década de 1920. Sus modelos (que utilizan ecuaciones diferenciales) predicen oscilaciones en el tamaño de las poblaciones de depredadores y presas, donde los números de los depredadores se desfasan respecto de los de sus presas. Estas interacciones las representaron matemáticamente con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (38)$$

donde  $f(x, y)$  y  $g(x, y)$  determinan la velocidad de crecimiento de cada una de las poblaciones con  $x(t)$  representando a la población de las presas e  $y(t)$  a la población de los depredadores. Este modelo se basa en las siguientes hipótesis:

i. En ausencia de depredador ( $y=0$ ) la población de presas crece proporcionalmente a su tamaño, es decir, tiene espacio y alimento suficiente.

Es decir, el crecimiento de la población está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a x, \quad a > 0, \\ x(t) &= x_0 e^{at} \end{aligned} \quad (39)$$

El número de presas en ausencia del depredador crece exponencialmente.

ii. El depredador  $y(t)$  sólo se alimenta de la presa  $x(t)$ . De modo que si no hay presas, su tamaño decae con una velocidad proporcional a su población, esto es

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -c y, \quad c > 0, \\ y(t) &= y_0 e^{-ct} \end{aligned} \quad (40)$$

El número de depredadores en ausencia de la presa, decrece exponencialmente hasta extinguirse.

iii. El número de encuentros entre el depredador y la presa es proporcional al producto de sus poblaciones. Además, cada uno de los encuentros favorece al número de depredadores y disminuye el número de las presas. Por lo tanto, la presencia de la presa beneficia el crecimiento del depredador como

$$q x y, \quad q > 0$$

Mientras que la interacción entre ellas, disminuye el crecimiento de la presa por

$$-b x y, \quad b > 0$$

Bajo las hipótesis anteriores se tiene un modelo de interacción entre  $x(t)$  y  $y(t)$  dado por el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = qxy - cy \end{cases} \quad (41)$$

con  $x > 0$ ,  $y > 0$  y los parámetros  $a, b, c, q$ , son números reales positivos

### 3-] Puntos críticos del modelo

El sistema de ecuaciones (41) conocido como el modelo de Lotka-Volterra consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) = a x - b x y = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = -y(c - qx) = -c y + q x y = g(x, y)$$

La matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ qy & -c + qx \end{pmatrix}$$

Para hallar los puntos críticos resolvemos el sistema

$$0 = ax - bxy = f(x, y)$$

$$0 = -cy + qxy = g(x, y)$$

Resulta que los puntos críticos son  $(0,0)$  y  $(\frac{c}{q}, \frac{a}{b})$  (también llamados puntos de equilibrio)

? En el punto  $(0,0)$  tenemos que la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a - I & 0 \\ 0 & -c - I \end{pmatrix} = (a - I)(-c - I)$$

$$(a - I)(-c - I) = 0$$

$$\therefore I_1 = a \quad \wedge \quad I_2 = -c$$

Como  $I_1$  y  $I_2$  son reales, distintos y de signos opuestos, entonces el punto crítico  $(0,0)$  es un punto silla del sistema linealizado, y entonces, por Teorema 4 es un punto silla del sistema (41). En una vecindad del  $(0,0)$  las trayectorias tienen el comportamiento mostrado en la figura 5. Por Teorema 5 parte b) el punto  $(0,0)$  es inestable.

? En el punto  $(\frac{c}{q}, \frac{a}{b})$  tenemos que la matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{c}{q}, \frac{a}{b}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{c}{q}, \frac{a}{b}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\frac{c}{q}, \frac{a}{b}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\frac{c}{q}, \frac{a}{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -bc/q \\ aq/b & -0 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0-I & -bc/q \\ aq/b & 0-I \end{pmatrix} = I^2 + ac$$

$$I^2 + ac = 0$$

$$I_{1,2} = \pm \sqrt{-ac}$$

$$\therefore I_1 = \sqrt{ac} i \quad \wedge \quad I_2 = -\sqrt{ac} i$$

Como  $I_1$  y  $I_2$  son imaginarias puras, el sistema linealizado predice un centro. Este caso no está contemplado en el teorema 4 entonces no se puede predecir la estabilidad del punto crítico  $(c/q, a/b)$  del sistema no lineal (41) con ese teorema y por la observación siguiente al teorema se desconoce qué tipo de trayectorias posee.

#### 4-] Estabilidad del sistema según Liapunov:

Como el teorema 4 no brinda información sobre el tipo de punto crítico

$P_{xy} = \left( \frac{c}{q}, \frac{a}{b} \right)$ , esto nos conduce a recurrir a otra herramienta que nos permita

determinar su comportamiento. Por eso, se realizará el estudio de la estabilidad del punto crítico  $P_{xy}$  con el método de Lyapunov. Con el fin de construir una función de Lyapunov para el sistema (41), se propone una función  $H$  como una suma de dos funciones

$$H(x, y) = a(x) + b(y) \quad (42)$$

Se calculará cómo deben ser  $a$  y  $b$  de tal manera que  $H$  satisfaga las condiciones sobre la derivada para ser una función de Lyapunov.

Si se calcula la derivada de  $H$  a lo largo de la solución del sistema (41), se obtiene

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \frac{da}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{db}{dy} \frac{dy}{dt} = x \frac{da}{dx} (a - by) + y \frac{db}{dy} (qx - c)$$

Para que las soluciones de (41) vivan en las curvas de nivel de  $H$  se debe cumplir

$$\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = 0$$

Al separar las variables  $x$  e  $y$  se tiene

$$\frac{x \frac{da}{dx}}{qx - c} = \frac{y \frac{db}{dy}}{by - a} \quad (43)$$

Como  $x$  e  $y$  son variables independientes, la ecuación (43) se tiene, si y sólo si

$$\frac{x \frac{da}{dx}}{qx - c} = \frac{y \frac{db}{dy}}{by - a} = \text{cte.}$$

Ya que esta constante puede ser uno, se tiene que

$$\frac{da}{dx} = q - \frac{c}{x}$$

Por lo tanto,  $a(x) = qx - c \ln x$

De igual manera,

$$\frac{db}{dy} = b - \frac{a}{y}$$

Por lo tanto,  $b(y) = by - a \ln y$

Así,  $H$  es de la forma  $H(x, y) = qx - c \ln x + by - a \ln y$ , y está definida para  $x > 0$  y  $y > 0$ .

A partir de  $H$  se busca proponer una función de Lyapunov, por lo que es necesario determinar los puntos críticos de  $H$ .

Como,

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \left( q - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y} \right)$$

se tiene que el punto crítico de  $H$  es  $P_{xy}$ .

Es decir,

$$\left( \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right)_{P_{xy}} = 0$$

Mostraremos que  $P_{xy}$  es un mínimo de  $H$ . Para ello, es suficiente probar que la matriz hessiana de  $H$  en  $P_{xy}$  es definida positiva<sup>1</sup>. Por definición,

$$\text{Hess}(H) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{y^2} \end{pmatrix}$$

Así

---

<sup>1</sup> Una matriz de  $n \times n$  es definida positiva si  $\mathbf{x}^t \mathbf{H} \mathbf{x} > 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Para  $n=2$ , la definición equivale a:  $h_{11} > 0$  y  $\det(\mathbf{H}) > 0$ .

$$\text{Hess}(H(P_{xy})) = \begin{pmatrix} \frac{q^2}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Como  $\frac{q^2}{c} > 0$  y  $|\text{Hess}(H(P_{xy}))| > 0$ , se tiene en que  $H$  tiene un mínimo en  $P_{xy}$ .

Si

$$m = H(P_{xy}) = q\frac{c}{q} - c\ln\frac{c}{q} + b\frac{a}{b} - a\ln\frac{a}{b}$$

$$m = c - c\ln\frac{c}{q} + a - a\ln\frac{a}{b}$$

entonces la función

$$V(x, y) = H(x, y) - m,$$

es una función de Lyapunov en el primer cuadrante para el sistema (41). Al efectuar

$$\frac{dV(x, y)}{dt} = \dot{V}(x, y) = \frac{d(qx - c\ln x)}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d(by - a\ln y)}{dy} \frac{dy}{dt} - m$$

$$\dot{V}(x, y) = \left(q - \frac{c}{x}\right)x(a - by) + \left(b - \frac{a}{y}\right)y(qx - c) - m$$

$$\dot{V}(x, y) = qax - qbx - ac + bcy + bqxy - bcy - aqx + ac - m$$

Resulta

$$\dot{V}(x, y) = 0$$

Por lo tanto el punto de equilibrio  $P_{xy}$  es estable. Además las soluciones viven en las curvas de nivel de  $V$  y en consecuencia en las curvas de nivel de  $H$ , ya que  $V$  es sólo una traslación de  $H$ .

### 5-] Órbitas cerradas en el primer cuadrante

Llamamos  $j_t(x_0, y_0): I \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a la trayectoria solución del problema autónomo  $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$ , con condiciones iniciales  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ .

**Teorema 6:** Cada trayectoria en el primer cuadrante del sistema Lotka-Volterra, es una órbita cerrada salvo el punto  $P_{xy}$  y los ejes coordenados.

*Demostración:* Se demuestra por el absurdo. Se supone que no se tienen órbitas cerradas en el primer cuadrante. Teniendo en cuenta que la aproximación lineal posee un centro (por tener raíces imaginarias puras), el

sistema no lineal (41) puede tener un centro o un foco (espiral) estable o inestable. Al suponer por el absurdo que las órbitas no son cerradas, luego necesariamente deben ser espirales. Se considera un punto  $w = (x, y) \in R^2, x > 0, y > 0$  tal que  $w \neq P_{xy}$ , luego existe una sucesión doblemente infinita  $\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots$  tal que  $j_{t_n}(w)$  está sobre la recta  $x = \frac{c}{q}$ , de tal manera que cuando  $n \rightarrow \infty, t_n \rightarrow \infty$  y cuando  $n \rightarrow -\infty, t_n \rightarrow -\infty$ .

Si  $w$  no está en una órbita cerrada entonces los puntos  $j_{t_n}(w)$  forman una sucesión monótona a lo largo de la recta  $x = \frac{c}{q}$ .

Como el sistema (41) no tiene ciclos límites porque estamos suponiendo que no tiene órbitas cerradas,  $j_{t_n}(w)$  converge a  $P_{xy}$  cuando  $n \rightarrow \infty$  o  $j_{t_n}(w)$  converge a  $P_{xy}$  cuando  $n \rightarrow -\infty$ .

Ya que  $H$  es constante sobre la trayectoria de  $w$ , se concluye que  $H(P_{xy}) = H(w)$ . Pero esto contradice la hipótesis de que  $H$  tiene un mínimo en  $P_{xy}$ , porque al ser  $w \neq P_{xy}$  se tendría dos mínimos. Por lo tanto, las soluciones de (41) en el primer cuadrante son trayectorias cerradas.

Así, dada cualquier condición inicial  $(x(0), y(0))$ , con  $x(0) > 0$  y  $y(0) > 0$  y diferente de  $P_{xy}$ , se tiene que las poblaciones de presas y depredadores oscilan cíclicamente en el paso del tiempo, como se observa en la figuras 11 y 12. Las trayectorias mostradas en las figuras fueron obtenidas numéricamente.

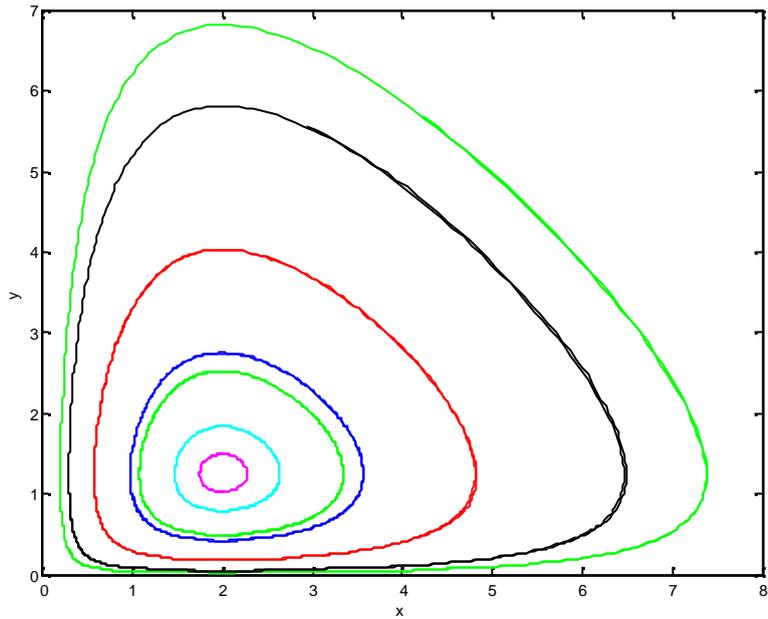


Figura 11: Órbitas cerradas alrededor de  $P_{xy}$

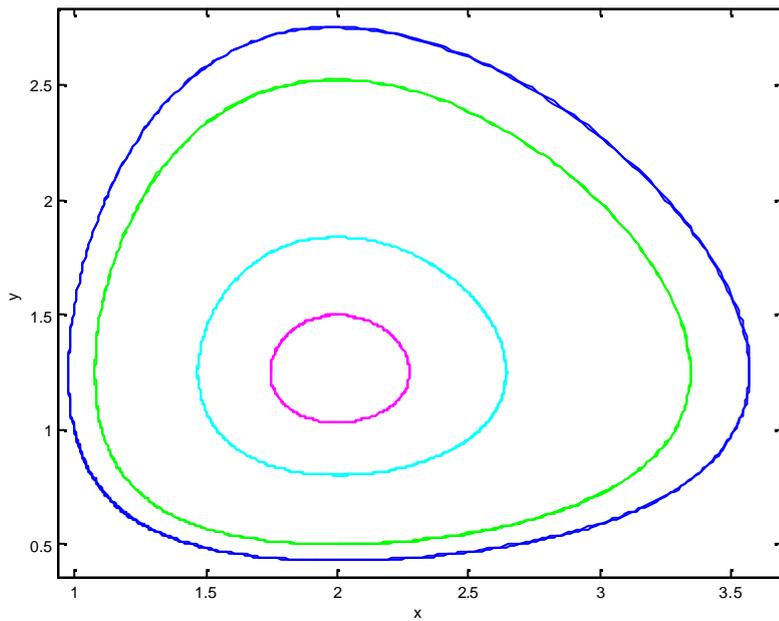


Figura 12: Zoom para observar las curvas cerca del centro

En (41) cuando  $y=0$  se obtiene  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$  que tiene por curva solución

$x(t) = x_0 e^{at}$ ,  $y(t) = 0$  y de la cual se interpreta que al aumentar la variable  $t$  la población de la presa crece indefinidamente. Por lo cual se afirma que el eje  $x$  ( $y=0$ ) es una trayectoria del sistema (41). En (41) cuando  $x=0$  se obtiene

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = -cy \end{cases} \quad \text{que tiene por curva solución } y(t) = y_0 e^{-ct}, x(t) = 0 \text{ y de la cual se}$$

interpreta que al aumentar la variable  $t$  la población de los predadores tiende a cero (extinción). Por lo cual, el eje  $y$  ( $x=0$ ) es una trayectoria del sistema (41).

## 6-] Modelo de Lotka-Volterra extendido

Si se modifica el modelo de Lotka-Volterra considerando que la población  $x$  compite por espacio o alimento, entonces se introduce un nuevo término a la primera ecuación del sistema (41), resultando

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by) - bx^2$$

De forma análoga, si se supone lo mismo para la población  $y$ , se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - by) - bx^2 = x(a - by - bx) = xL(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(qx - c) - my^2 = y(qx - c - my) = yM(x, y) \end{aligned} \quad (44)$$

donde  $a, b, c, q, m, b$ , son números reales positivos;  $b$  y  $m$  representan la proporción de sobrepoblación de presas y depredadores respectivamente.

Para este nuevo sistema los puntos críticos son:

$$P_{00} = (0,0) \quad P_{x0} = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \quad P_{0y} = \left(0, -\frac{c}{m}\right) \quad P_{xy} = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{cb + ma}{qb + bm}, \frac{qa - bc}{qb + bm}\right)$$

Se descarta el punto  $P_{0y}$  dado que no está en el primer cuadrante.

Para estudiar el tipo y estabilidad de estos puntos críticos, intentaremos aplicar los teoremas 4 y 5 a cada uno de ellos. La matriz jacobiana de este sistema es:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by - 2bx & -bx \\ qy & qx - c - 2my \end{pmatrix}$$

Analicemos  $P_{00}$

$$\begin{aligned} J(P_{00}) &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} a - I & 0 \\ 0 & -c - I \end{pmatrix} &= (a - I)(-c - I) \end{aligned}$$

$$(a - 1)(-c - 1) = 0$$

$$\therefore I_1 = a \quad \wedge \quad I_2 = -c$$

Como los autovalores de  $J(P_{00})$  son  $a$  y  $-c$  (reales, distintos y de signos opuestos) por el teorema 4 se tiene que el punto crítico  $P_{00}$  es un punto silla, y por el teorema 5, es inestable.

En el segundo punto crítico,  $P_{x_0}$ , la matriz jacobiana es

$$J(P_{x_0}) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ab}{b} \\ 0 & \frac{aq}{b} - c \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -a-1 & -\frac{ab}{b} \\ 0 & \frac{aq}{b} - c - 1 \end{pmatrix} = (-a-1) \cdot \left(\frac{aq}{b} - c - 1\right)$$

$$(-a-1) \cdot \left(\frac{aq}{b} - c - 1\right) = 0$$

de donde 
$$I_1 = -a \quad \wedge \quad I_2 = \frac{aq}{b} - c$$

O sea que los autovalores de  $J(P_{x_0})$  son  $-a$  y  $\frac{aq}{b} - c$ .

Si  $\frac{aq}{b} - c < 0$ , o sea,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{q}$ , (con lo cual ambos autovalores son reales, distintos y del mismo signo ya que ambos son negativos) entonces el punto crítico  $P_{x_0}$  es un nodo estable (atractor) y el punto de equilibrio no trivial  $P_{xy}$  no está en el primer cuadrante, ya que  $\frac{aq}{b} - c < 0$ ,  $aq < cb$ ,  $aq - cb < 0$  (figura 13).

Si  $\frac{aq}{b} - c > 0$ , o sea,  $\frac{a}{b} > \frac{c}{q}$ , (con lo cual ambos autovalores son reales, distintos y de signos opuestos) entonces el punto de crítico  $P_{x_0}$  es un punto silla y el punto de equilibrio  $P_{xy}$  está en el primer cuadrante, por lo que es necesario analizar su comportamiento local.

Como

$$J(P_{xy}) = \begin{pmatrix} -b\bar{x} & -b\bar{x} \\ q\bar{y} & -m\bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\det(J(P_{xy}) - I) = \begin{vmatrix} -b\bar{x} - 1 & -b\bar{x} \\ q\bar{y} & -m\bar{y} - 1 \end{vmatrix} = (-b\bar{x} - 1)(-m\bar{y} - 1) + qb\bar{x}\bar{y}$$

$$I^2 + I(b\bar{x} + m\bar{y}) + (qb + bm)\bar{x}\bar{y} = 0$$

$$I_{1,2} = \frac{-(b\bar{x} + m\bar{y}) \pm \sqrt{(b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y})}}{2}$$

de donde se puede concluir:

1) Si  $(b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y}) > 0$  resulta que una raíz es negativa:

$$I = \frac{-(b\bar{x} + m\bar{y}) - \sqrt{(b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y})}}{2}$$

y la otra raíz también en negativa, ya que

$$(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y}) > 0 \Rightarrow (b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y}) < (b\bar{x} + m\bar{y})^2$$

luego, tomando raíz cuadrada en ambos miembros, se obtiene:

$$\sqrt{(b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y})} < (b\bar{x} + m\bar{y})$$

restando el segundo miembro:

$$-(b\bar{x} + m\bar{y}) + \sqrt{(b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y})} < 0$$

lo que indicaría que la otra raíz también es negativa. Al ser ambas raíces negativas; tenemos autovalores reales, distintos y del mismo signo, con lo cual el punto crítico  $P_{xy}$  es un nodo asintóticamente estable.

2) Si  $(b\bar{x} + m\bar{y})^2 - 4(qb\bar{x}\bar{y} + b\bar{x}m\bar{y}) < 0$ , las dos raíces son complejas conjugadas con parte real negativa:  $-(b\bar{x} + m\bar{y})$

En este caso, el punto  $P_{xy}$  es asintóticamente estable por el teorema 5 a).

Por lo cual al punto crítico  $P_{xy}$  se lo llama foco estable, alrededor del cual las trayectorias espirales se aproximan a él como se observa en la figura 14.

Las trayectorias de las figuras 13 y 14 muestran el comportamiento cualitativo, no cuantitativo, ya que no fueron obtenidas numéricamente.

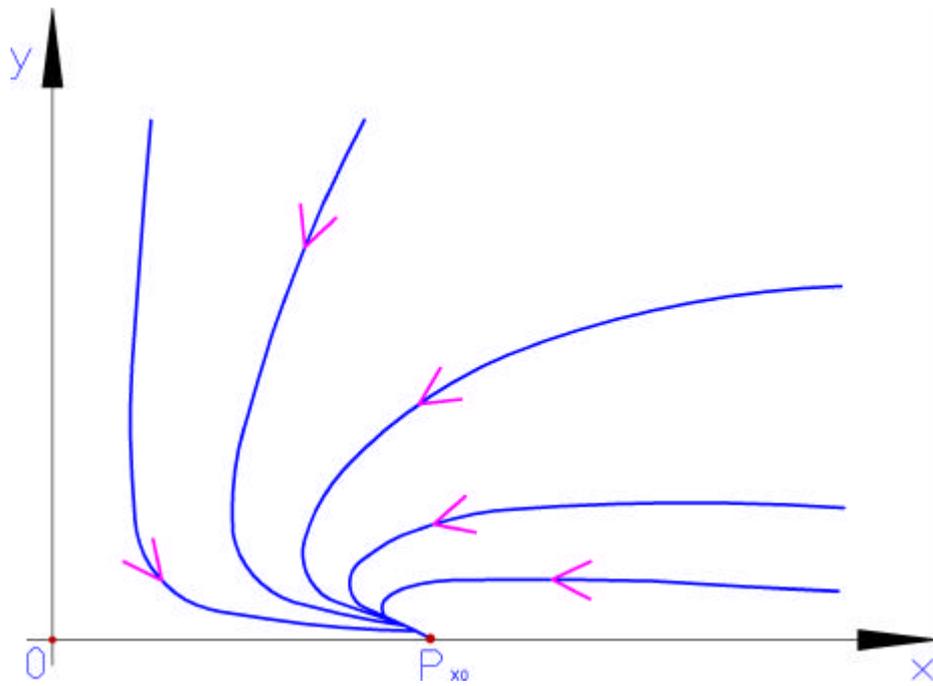


Figura 13 Atractor en  $P_{x_0}$

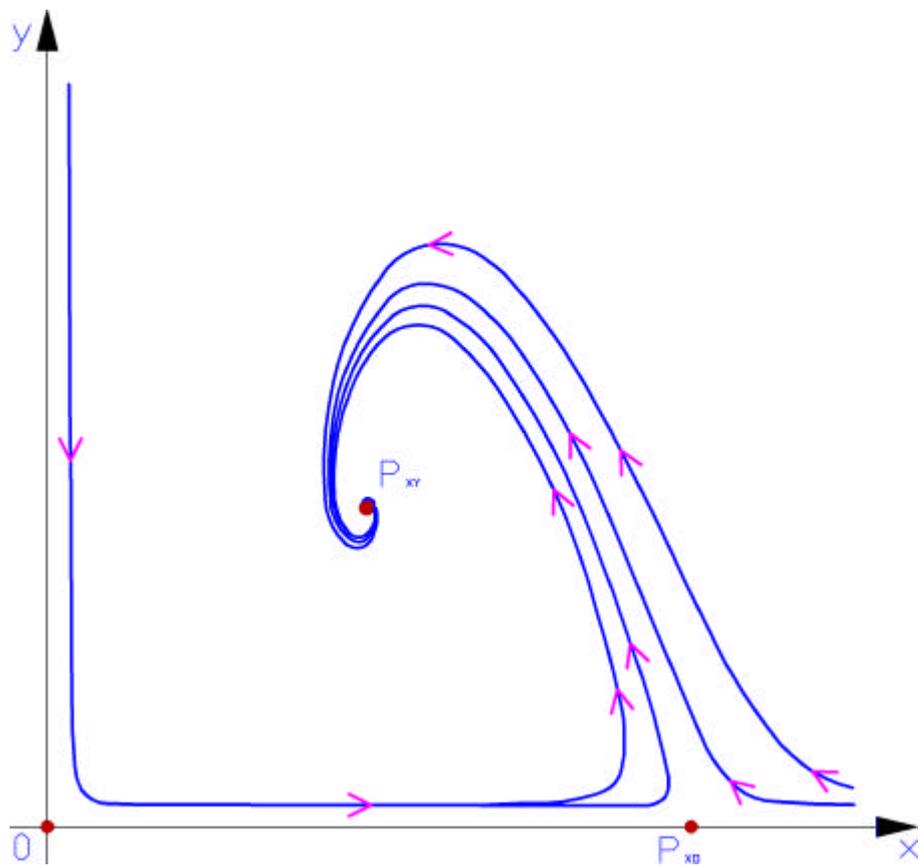


Figura 14: Atractor global en  $P_{xy}$

Para determinar el comportamiento global del sistema (44) en  $P_{xy}$  se recurrirá al siguiente teorema para sistemas en el plano

Teorema 7: Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$ , una región simplemente conexa  $r$ ,  $F, G \in C^1(D)$ . Si  $\frac{\partial}{\partial x}(r(x,y)F(x,y)) + \frac{\partial}{\partial y}(r(x,y)G(x,y))$  es estrictamente positiva o estrictamente

negativa en  $D$ , entonces el sistema  $\dot{x} = F(x,y)$ ,  $\dot{y} = G(x,y)$  no tiene órbitas periódicas en  $D$

Teorema 8: El sistema (44) no tiene órbitas periódicas en el primer cuadrante

*Demostración:* Se hace notar que el primer cuadrante es una región simplemente conexa. Además, si se toma  $r(x,y) = \frac{1}{xy}$  se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}(r\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(r\dot{y}) = \frac{L_x(x,y)}{y} + \frac{M_y(x,y)}{x} = -\frac{b}{y} - \frac{m}{x} < 0$$

Dado que esta ecuación es estrictamente negativa y  $r \in C^1$  en el primer cuadrante  $D = \{(x,y) / x > 0, y > 0\}$ , se concluye por el teorema 7 que el sistema (44) no tiene órbitas periódicas en el primer cuadrante.

A continuación se verá que el punto de equilibrio  $P_{xy}$  del sistema (44) es globalmente estable. Es decir, toda órbita en  $D$  tiende a  $P_{xy}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Para ello se usará la Tricotomía de Poincaré-Bendixson.

El conjunto  $\omega$ -límite es el conjunto de puntos del plano a los que se acerca la órbita  $j_t(x_0, y_0)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  (denotado por  $\omega(x_0, y_0)$ ).

El conjunto  $\alpha$ -límite es el conjunto de puntos del plano a los que se acerca la órbita  $j_t(x_0, y_0)$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  (denotado por  $\alpha(x_0, y_0)$ ).

Tricotomía de Poincaré-Bendixson: Sea  $j_t(x_0, y_0); t > 0$  una órbita en una región  $B$  cerrada y acotada del plano. Supongamos que  $B$  contiene sólo un número finito de puntos de equilibrio, entonces el conjunto  $\omega$ -límite toma una de las siguientes formas:

- i.  $\omega(x_0, y_0)$  es un punto de equilibrio
- ii.  $\omega(x_0, y_0)$  es una órbita periódica
- iii.  $\omega(x_0, y_0)$  contiene un número finito de puntos de equilibrios y un conjunto de trayectorias  $j_i$ , cuyos conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límite consisten en uno de estos equilibrios para cada trayectoria  $j_i$ .

Dado  $(x_0, y_0) \in D$ ,  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ , mostraremos que la órbita  $j_t(x_0, y_0); t \geq 0$  permanece en un conjunto cerrado y acotado dado por

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e \leq x \leq A, d \leq y \leq F\}$$

con  $e$  y  $d$  suficientemente chicos y  $A$  y  $F$  suficientemente grandes. Se mostrará que  $j_t(x_0, y_0) \in B$  para  $t \geq 0$ .

[a] Veamos que en la recta que une  $(A, d)$  y  $(A, F)$  la derivada de  $x$  es negativa.

Si no fuera así:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by - bx) > 0 \begin{cases} x > 0 \wedge a - by - bx > 0 \\ \vee \\ x < 0 \wedge a - by - bx < 0 \text{ (se descarta porque } x > 0) \end{cases} \quad (45)$$

En (45) con  $x = A$ :  $a - by - bA > 0$

$$a - bA > by$$

$$\frac{a - bA}{b} > y \quad (\text{por ser } b > 0) \quad (46)$$

Eligiendo  $A$  suficientemente grande tal que  $A > x_0$  y  $\frac{a - bA}{b} < 0$ , la desigualdad (46) no se verifica para ningún “ $y$ ” en  $B$ , ya que  $y > 0$

$$\therefore \frac{dx}{dt} < 0$$

y entonces, una órbita que comienza dentro de  $B$ , no puede salir de  $B$  por el lado  $x=A$ .

[b] En la recta que une  $(A, F)$  y  $(e, F)$  la derivada de  $y$  es negativa. Si no fuera así:

$$\frac{dy}{dt} = y(cx - q - my) > 0 \begin{cases} y > 0 \wedge cx - q - my > 0 \\ \vee \\ y < 0 \wedge cx - q - my < 0 \text{ (se descarta porque } y > 0) \end{cases} \quad (47)$$

En (47) con  $y = F$ :  $cx - q - mF > 0$

$$cx > q + mF$$

$$x > \frac{q + mF}{c} \quad (\text{por ser } c > 0) \quad (48)$$

Eligiendo  $F$  suficientemente grande tal que  $F > y_0$  y  $\frac{q + mF}{c} > A$ , la desigualdad (48) no se verifica para ningún  $x$  en  $B$ , ya que  $x \leq A$ .

$$\therefore \frac{dy}{dt} < 0$$

y entonces, una órbita que comienza dentro de  $B$ , no puede salir de  $B$  por el lado  $y=F$ .

[c] Sea  $d = \frac{\min\{y : (x,y) = j_t(x_0,y_0), \text{ para } t \geq 0\}}{2}$ . Resulta  $d > 0$ , ya que si fuera  $d \leq 0$  quiere decir que la órbita  $j_t(x_0,y_0)$  corta el eje x. Pero esto es imposible, ya que el eje x es una trayectoria distinta a  $j_t(x_0,y_0)$  y distintas trayectorias no pueden cortarse, salvo en el punto crítico  $P_{0x}$  o en el punto  $P_{00}$ . Si esto ocurriera, (es decir, que  $j_t(x_0,y_0)$  corta o toca el eje x en un punto crítico), significaría que esta trayectoria ingresa en ese punto crítico. Pero esto no puede ser, ya que  $P_{0x}$  y  $P_{00}$  son puntos silla, donde sólo entran dos trayectorias, las que están sobre los ejes.

[d] Sea  $e = \frac{\min\{x : (x,y) = j_t(x_0,y_0), \text{ para } t \geq 0\}}{2}$ . Resulta  $e > 0$ , ya que si fuera  $e \leq 0$  quiere decir que la órbita  $j_t(x_0,y_0)$  corta el eje y. Pero, igual al caso anterior, esto es imposible, ya que el eje y es una trayectoria distinta a  $j_t(x_0,y_0)$ , y no pueden cortarse, salvo en  $P_{00}$ . Como este punto crítico es un punto silla, la trayectoria  $j_t(x_0,y_0)$  no puede entrar en él.

Por los ítems [a], [b], [c] y [d] se puede afirmar que  $j_t(x_0,y_0) \in B$ , para todo  $t \geq 0$  (véase figura 15).

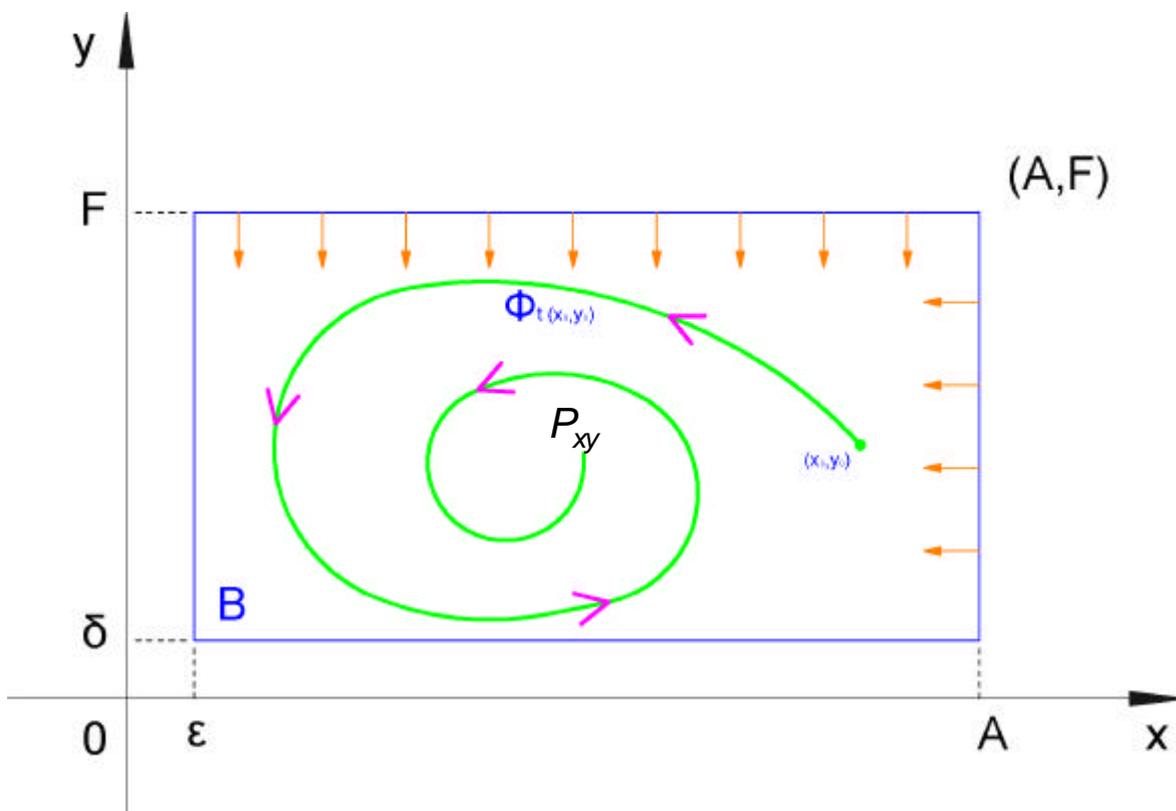


Figura 15

La región  $B$  contiene solamente al único punto crítico  $P_{xy}$ . Por el teorema 8 se descarta que  $(x_0, y_0)$  sea una órbita periódica (descartándose el caso ii de la Tricotomía).

Para que se diera el caso iii de la tricotomía, como  $B$  tiene un único punto crítico, las trayectorias mencionadas deberían salir y entrar en  $P_{xy}$ , ya que debe ser que los conjuntos  $\alpha$  y  $\omega$ -límite de esa trayectoria son ese punto crítico. Pero esto no puede ser cierto, ya que  $P_{xy}$  es un punto asintóticamente estable. Luego, necesariamente debe ocurrir el caso i, es decir, que  $(x_0, y_0) = P_{xy}$  es un punto de equilibrio donde las trayectorias que comienzan en  $D$  se aproximan a  $P_{xy}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Se concluye que todas las órbitas del sistema (44) en el primer cuadrante tienden al punto de equilibrio  $P_{xy}$ , lo que nos permite afirmar que  $P_{xy}$  es un punto *globalmente estable*.

## Capítulo III: Conclusiones

En el desarrollo matemático expuesto del modelo depredador-presa del sistema Lotka-Volterra se observó que todas las soluciones en el primer cuadrante son trayectorias cerradas alrededor del punto de equilibrio  $\left(\frac{c}{q}, \frac{a}{b}\right)$  el cual se demostró que es un punto estable por el criterio de Lyapunov. Esto se interpreta en que los tamaños de las poblaciones de presas y depredadores que cumplen con las hipótesis que establece el modelo (41), oscilan cíclicamente conforme transcurre el tiempo (como se visualiza en las figuras 11 y 12).

Se observa que el modelo predice que en ausencia de presas, los depredadores se extinguen. Y ante la ausencia de depredadores, las presas crecen indefinidamente

Al modificar el sistema de Lotka-Volterra surgió el modelo extendido (competencia) donde se analizaron los diferentes tipos de puntos críticos y su comportamiento.

Bajo ciertas condiciones sobre los parámetros del modelo, se dan dos puntos críticos:  $P_{00}$ , que supone la desaparición de las poblaciones, y el punto  $P_{x0}$  que supone la desaparición de los depredadores. El punto  $P_{00}$  es inestable, por lo que no es esperable la extinción de ambas poblaciones, comenzando con poblaciones positivas. El punto  $P_{x0}$  es estable, lo que indica que, si se cumplen las condiciones mencionadas, los depredadores están condenados a la extinción. La otra situación que puede suceder es la ocurrencia de tres puntos críticos:  $P_{00}$ , que es inestable como antes,  $P_{x0}$  que ahora es inestable, y  $P_{xy}$  que es estable.

Se demostró que las trayectorias del sistema (44) convergen al punto  $P_{xy}$  cuando éste existe, lo que nos estaría indicando que las dos poblaciones (de presas y depredadores) terminan coexistiendo con valores cerca del punto de equilibrio  $P_{xy}$ . Si inicialmente no hay presa el depredador se extingue y la trayectoria tiende al punto (0,0). Si no hay depredador el tamaño de la población de la presa tiende a  $\frac{a}{b}$ .

Tanto en el modelo (41) como en el modelo (44) las poblaciones no se extinguen ambas, siempre que inicialmente el tamaño de las poblaciones sea positivo.

### **Bibliografía:**

- ✓ Álvarez-Nodarse, R. *Modelos matemáticos en Biología: un viaje de ida y vuelta*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. no0 (0000), 1–40, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla (Item 1).
- ✓ Blanchard, P – Devaney, R – Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales*. International Thomson Editores S.A.
- ✓ Boyce, W – DiPrima, R (2000). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera* (4ta edición). Editorial Limusa S.A. Grupo Noriega Editores.
- ✓ Braun M. (1990). *Ecuaciones Diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana.
- ✓ Escobar Acosta, Jaime. *Ecuaciones Diferenciales, con aplicaciones en Maple* Universidad de Antioquia. Departamento de Matemática.
- ✓ Khalil, Hassan K (2002). *Nonlinear Systems* (3ra edición). Prentice Hall
- ✓ López Cruz, JM – Blé González, G. (2008). *Modelo Depredador-Presa*. Revista de Ciencias Básicas UJAT, Volumen 7 Número 2 (Diciembre de 2008): de la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.
- ✓ Simmons G. (1993). *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas*. (2da edición) España: Mc Graw Hill
- ✓ Spiegel, M (1983). *Ecuaciones Diferenciales Aplicadas* (3ra edición). Prentice-Hall Hispanoamérica, S.A.
- ✓ Strogatz S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Massachusetts: Perseus Books.
- ✓ Zill D. y Cullen M. (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. (6ta edición) México Internacional Thomson Editores SA.