



UNIVERSIDAD ABIERTA INTERAMERICANA
FACULTAD DE TECNOLOGÍA INFORMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

La Geometría de Borda

Autor: Tomás Ignacio YACACHURY

Directora: Dra. Lorena BERGAMINI

Título: Licenciado en Matemática

Abril 2014

Índice general

Introducción	2
1. Teoría de la Elección	4
1.1. Relaciones entre alternativas	4
1.2. Función de Bienestar Social	6
1.2.1. Ejemplos de Función de Bienestar Social	7
1.3. Las condiciones de Arrow	8
1.4. Métodos de elección frente a las condiciones de Arrow	10
1.5. La Paradoja de Arrow	12
1.6. Esencialmente, todos los métodos son incorrectos, pero algunos son útiles	17
2. Construcción geométrica de métodos de elección posicionales	18
2.1. Alternativas, rankings y perfiles en el espacio	18
2.1.1. El simplex $\mathbb{S}i(6)$	18
2.1.2. El Triángulo de Representación	19
2.2. Métodos de Elección Posicionales	25
2.2.1. El vector de votación W	25
2.2.2. Vectores de votación equivalentes	27
2.2.3. Los resultados de W_s en el triángulo de representación	29
2.2.4. La recta de procedimientos	32
2.3. Concordancia entre Métodos de Elección Posicionales y el Método de la mayoría por pares	36
2.3.1. Del Triángulo de Representación al Prisma Triangular	37
2.3.2. De vuelta al Triángulo de Representación	38
2.3.3. El método de pluralidad contra la mayoría	41
2.3.4. Los métodos posicionales restantes frente a la mayoría	43
2.3.5. ¿Un posible ganador?	49
3. La Cuenta de Borda	50
3.1. Neutralidad	50
3.2. Invertibilidad	53
3.3. Método de Pares Agregados	58
3.4. Criterio de Condorcet	61
3.5. Las propiedades de Borda	64
Conclusión	65
Bibliografía	68

Introducción

A lo largo de la historia de la humanidad, podemos encontrar innumerables casos donde, frente a una elección que compete a un número de individuos, surge la necesidad de traducir las preferencias individuales de los miembros de una sociedad en una preferencia colectiva. Elecciones presidenciales, decisiones sobre presupuesto de la junta de directores de una empresa, la elección del Papa por el cónclave o incluso algo tan simple como un grupo de amigos intentando decidir qué película ver en el cine. Ante tal desafío, la pregunta que surge es ¿qué método utilizaremos de forma que el resultado sea un verdadero reflejo de las elecciones individuales de los miembros de la sociedad?; o mejor dicho ¿Existe algún método que logre tal objetivo? Esta pregunta resulta no ser trivial, y ha desatado una gran cantidad de trabajos, con abordajes económicos, sociales y matemáticos.

El presente trabajo pretende desarrollar esta problemática, que representa el objeto de estudio de la Teoría de la Elección. Si bien encontraremos una respuesta a dicho dilema, el enfoque principal será sobre un tipo de métodos de elección social, los métodos posicionales. Utilizando herramientas geométricas, se podrá observar, y a la vez demostrar, distintas propiedades que cumplen los métodos mencionados. Entre ellos, se resaltarán los métodos de pluralidad, antipluralidad y la Cuenta de Borda, que, como se verá, cumplen funciones muy particulares cuando se las observa desde un punto de vista geométrico. Por último, se intentará establecer a la Cuenta de Borda como el método óptimo entre los posicionales.

Uno de los escritos más relevantes frente a nuestra pregunta es el de Kenneth J. Arrow en su trabajo “Social Choice and Individual Values”. Aquí, el autor desarrolla una teoría sobre los métodos de elección y establece 5 condiciones, que podrían considerarse básicas, intuitivas y razonables, que un método debe cumplir para traducir de forma efectiva las preferencias individuales de los miembros de una sociedad en una preferencia colectiva. Finalmente, Arrow nos muestra que no existe método alguno que cumpla con la totalidad de las condiciones, dando lugar a la paradoja de lleva su nombre.

En el primer capítulo desarrollaremos formalmente la Teoría de la Elección. Comenzaremos por introducir conceptos básicos como *alternativas* y *preferencias individuales*. Luego presentaremos las *funciones de bienestar social*, las cuales nos permitirán determinar una preferencia social a partir de un conjunto de preferencias individuales. Basándonos en el trabajo de Arrow, arribaremos a su famosa paradoja, la cual nos dice que no existe ninguna función de bienestar social verdaderamente justa.

La decepción sufrida por los resultados de Arrow no detendrá nuestro estudio, por eso en el segundo capítulo nos enfocaremos en los métodos de elección posicionales, es decir, aquellos métodos que asignan una cantidad de puntos a cada candidato dependiendo de la posición en la que se encuentre dentro de las preferencias de cada individuo. Este capítulo trae consigo un abordaje muy distinto al del capítulo anterior. Dicho desarrollo se realizará basado en el trabajo de Donald G. Saari en su libro “Geometry of Voting”, donde el autor utiliza la geometría como principal herramienta para arribar a complejos resultados. Por lo tanto, reintroduciremos desde un punto de vista geométrico algunos conceptos vistos en el capítulo 1. Luego nos adentraremos en los métodos posicionales, atravesando varios desarrollos muy interesantes para finalmente arribar a un teorema que destaca a la Cuenta de Borda por sobre el resto de dichos métodos.

En el tercer capítulo, ahondaremos en la Cuenta de Borda y sus ventajas frente al resto de los métodos posicionales. Diversas propiedades colocarán una y otra vez a la Cuenta de Borda como el método posicional predilecto.

Los conceptos geométricos utilizados por Saari podrían considerarse básicos, como puede ser la utilización de rectas, propiedades de triángulos, envolturas convexas o transformaciones lineales, pero a la vez representan una herramienta clave a la hora de demostrar ciertos resultados más complejos, como por ejemplo, que en determinados casos, cambios pequeños en los puntajes asignados a cada candidato pueden generar resultados en la elección diametralmente opuestos.

Por último, cabe destacar que el presente trabajo no pretende desarrollar una teoría alternativa a las ya existentes respecto a los métodos de elección social, sino ser una recolección de los resultados desarrollados por Arrow y Saari, expandiéndolos matemáticamente al incluir demostraciones que fueron obviadas o desarrolladas sólo parcialmente en los trabajos originales.

Capítulo 1

Teoría de la Elección

Nuestro primer capítulo introduce una serie de conceptos básicos que componen la Teoría de la Elección.

Las definiciones y resultados aquí tratados están basados en los trabajos desarrollados por Kenneth J. Arrow¹ en su monografía de 1951 "Social Choice and Individual Values"[1], donde enuncia su famoso teorema de imposibilidad.

1.1. Relaciones entre alternativas

Como hemos descrito con anterioridad, nuestra pregunta de qué método de elección es el mejor, surge de una situación en la que un conjunto de *individuos* expresa sus *preferencias* sobre un grupo de *alternativas*, y cómo traducimos tales preferencias en una sola preferencia del conjunto.

Para comenzar a analizar este problema, primero deberemos establecer una serie de definiciones, axiomas y lemas, que servirán de base para nuestro estudio.

Definición 1.1. Sean x, y dos alternativas, entonces xRy si y solo si x es preferida o indiferente a y . De lo contrario, diremos que $-(xRy)$.

Esta simple relación nos permite comparar alternativas. Es decir, si Juan prefiere desayunar con café a desayunar con té, entonces café R té. Por otro lado, si a María le es indiferente desayunar con leche a desayunar con chocolatada, entonces leche R chocolatada.

Axioma 1.1. $\forall x, y, xRy \vee yRx$.

Axioma 1.2. $\forall x, y, z, \text{ si } xRy \wedge yRz \implies xRz$.

Estos dos axiomas establecen respectivamente que, la relación definida anteriormente, se trata de una relación conexa y transitiva. No sólo eso, sino que el Axioma 1.1 no excluye el caso en que $x = y$, pues x es indiferente a si mismo $\forall x$, con lo cual xRx y la relación es reflexiva. Por último, vale notar que la relación es antisimétrica, ya que si x es preferida a y , entonces y no es ni preferida ni indiferente a x , y por lo tanto $-(yRx)$.

¹Kenneth J. Arrow (1921-presente) es un economista estadounidense nacido en 1921. Ganador del Premio Nobel de Economía en 1972 junto a Sir John R. Hicks. Actualmente profesor en la Universidad de Stanford, muchos de sus alumnos han llegado a ganar Premios Nobel, como Eric Maskin, Michael Spence y Roger Myerson.

Por lo tanto nos encontramos con una relación conexa, reflexiva, antisimétrica y transitiva, que admite igualdades o indiferencias entre alternativas; es decir, una relación de orden débil. Es decir, R nos permite ordenar al conjunto de alternativas, por ejemplo, sean x, y, z las alternativas, podemos decir que yRx, yRz, xRz , con lo cual obtendríamos

$$y \geq x \geq z$$

donde \geq indica preferida o indiferente.

Si bien las nociones de preferencia e indiferencia son comunes y fáciles de entender, es importante expresarlas en función de R . Para ello, utilizaremos las letras P e I para referirnos respectivamente a preferencia e indiferencia.

Definición 1.2. Sean x, y dos alternativas, entonces xPy si y solo si $\neg(yRx)$.

Definición 1.3. Sean x, y dos alternativas, entonces xIy si y solo si $xRy \wedge yRx$.

Lema 1.1. Sean x, y, z alternativas, entonces:

- (a) $xPy \implies xRy$
- (b) $xPy \wedge yPz \implies xPz$
- (c) $xIy \wedge yIz \implies xIz$
- (d) $\forall x, y, xRy \vee yPx$
- (e) $xPy \wedge yRz \implies xPz$

Demostración.

- (a) Por Definición 1.2, $xPy \implies \neg(yRx)$, y por Axioma 1.1 obtenemos que si $\neg(yRx) \implies xRy$. Por lo tanto $xPy \implies xRy$.
- (b) Por la parte (a), $xPy \implies xRy$. Supongamos que $\neg(xPz)$, es decir, por Definición 1.2, zRx . Por lo tanto, como $zRx \wedge xRy$, obtenemos zRy . Pero yPz y por lo tanto, $\neg(zRy)$, lo que nos lleva a un absurdo. Entonces, xPz .
- (c) Por Definición 1.3, $xIy \wedge yIz$ implican $xRy \wedge yRz$, y por lo tanto xRz . Por otro lado, $xIy \wedge yIz$ implica $yRx \wedge zRy$, es decir zRx . Entonces obtenemos, $xRz \wedge zRx$, que nuevamente por Definición 1.3, implica xIz .
- (d) Esta es una redefinición del Axioma 1.1 utilizando un o excluyente. Para cualquier par de alternativas x, y , vale que o xRy o $\neg(xRy)$. Por lo tanto, por Definición 1.2, o xRy o yPx .
- (e) Supongamos que $\neg(xPz)$, es decir, zRx . Como yRz , obtenemos por transitividad que yRx . Pero xPy , lo cual implica que $\neg(yRx)$, llegando así a una contradicción. Por lo tanto, xPz .

□

Definición 1.4. Sea S el conjunto de alternativas, entonces definimos el *conjunto elección* como:

$$C(S) = \{x \in S / xRy \forall y \in S\}$$

Lema 1.2.

$$(a) \quad xPy \iff C([x, y]) = \{x\}$$

$$(b) \quad xIy \iff C([x, y]) = \{x, y\}$$

Demostración.

(a) \Rightarrow) Supongamos que xPy , entonces, por definición, xRy . También $xRx \forall x$, por lo tanto $x \in C([x, y])$. Dado que xPy , entonces $\neg(yRx)$, por lo tanto $y \notin C([x, y])$. Es decir $C([x, y]) = \{x\}$.

\Leftarrow) Sea x el único elemento de $C([x, y])$, entonces $y \notin C([x, y])$, por lo que $\neg(yRx)$ y por definición, xPy .

(b) \Leftrightarrow) Por definición, $xIy \iff xRy \wedge yRx \iff x \in C([x, y]) \wedge y \in C([x, y]) \iff C([x, y]) = \{x, y\}$.

□

¿Cuál es la motivación detrás de esta definición y consecuente lema? Conocer cómo es el conjunto elección para todo par de alternativas x, y nos define totalmente P e I , y por lo tanto R . Pero la Definición 1.4 nos dice que la relación R define el conjunto elección para la totalidad del conjunto S , es decir $C(S)$. Es decir, basta con conocer las preferencias de pares de alternativas para conocer la preferencia del conjunto en su totalidad.

1.2. Función de Bienestar Social

Ya hemos definido formalmente una relación entre alternativas, que permite a un individuo ordenarlas según sus preferencias. El siguiente paso, es definir un método o función que transforme las preferencias individuales de los miembros de una sociedad, en una preferencia del conjunto.

Definición 1.5. Sea n el número de individuos en una sociedad, X el conjunto de alternativas x_1, x_2, \dots, x_m , A el conjunto de todos los posibles rankings sobre las alternativas, $R_i \in A$ el ranking o preferencia del individuo i , y $P \in A^n$, $P = (R_1, R_2, R_3, \dots, R_n)$ el perfil de la sociedad, definimos la *función de bienestar social* f como:

$$f : A^n \Rightarrow A$$

$$f(R_1, R_2, R_3, \dots, R_n) = R$$

donde R es la preferencia de la sociedad.

Si bien función de bienestar social es el término utilizado por Arrow, también utilizaremos en adelante el término método de elección.

Nota. De aquí en más, para facilitar la escritura, también utilizaremos los símbolos $>$ y \sim para denotar respectivamente preferencia e indiferencia entre alternativas

1.2.1. Ejemplos de Función de Bienestar Social

A continuación describiremos algunos ejemplos de funciones de bienestar social. Para su mejor entendimiento, observemos qué sucede con los siguientes dos perfiles:

$$P = (R_1, \dots, R_{12}) \quad P' = (R'_1, \dots, R'_{15})$$

$$R_i = \begin{cases} x > y > z & \text{para } 1 \leq i \leq 5 \\ y > z > x & \text{para } 6 \leq i \leq 9 \\ z > x > y & \text{para } 10 \leq i \leq 12 \end{cases} \quad R'_i = \begin{cases} y > x > z & \text{para } 1 \leq i \leq 5 \\ x > z > y & \text{para } 6 \leq i \leq 10 \\ z > y > x & \text{para } 11 \leq i \leq 15 \end{cases}$$

Es decir, el perfil P posee 12 individuos mientras que P' posee 15 individuos que votan de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll} 5 & x > y > z \\ 4 & y > z > x \\ 3 & z > x > y \end{array} \quad \begin{array}{ll} 5 & y > x > z \\ 5 & x > z > y \\ 5 & z > y > x \end{array}$$

Método de Pluralidad

Es el método por el cual se elige aquel candidato que más veces ocupa el primer puesto de los rankings individuales.

Para el perfil P , x ocupa el primer lugar para 5 individuos, y para 4 y z para 3, con lo cual la función arroja el ranking $x > y > z$.

En el caso de P' , cada alternativa ocupa la primera posición la misma cantidad de veces, con lo cual el ranking social será $x \sim y \sim z$.

Método de Antipluralidad

Es el método por el cual se elige aquel candidato que menos veces ocupa el último puesto de los rankings individuales.

Con P podemos observar que z ocupa el último lugar en más ocasiones, seguido por x y por último y , con lo cual el ranking es $y > x > z$.

Procediendo de igual manera con P' , es fácil ver que al igual que con el Método de Pluralidad, el resultado de la elección es $x \sim y \sim z$.

Cuenta de Borda²

Aquí se asignan puntajes a cada candidato dependiendo del lugar que ocupen dentro del ranking. Si tenemos k alternativas, entonces se asignan $k - 1$ puntos al primer puesto, $k - 2$ al segundo; es decir, $k - j$ puntos al puesto j . En el caso de 3 alternativas, como venimos tratando, se asignan los puntajes 2, 1 y 0 a cada puesto.

Bajo el perfil P , x obtiene 2 puntos en 5 ocasiones y 1 punto en 3, con lo cual obtiene un total de 13 puntos. De la misma manera, y obtiene 13 puntos y z obtiene solo 10. Por lo tanto, el ranking propuesto por la Cuenta de Borda es $x \sim y > z$.

²Jean Charles de Borda (1733-1799) fue un matemático, físico y navegante francés. Realizó grandes trabajos en el área de la hidrodinámica y astronomía marina. En 1770 formuló el sistema de votación conocido como la Cuenta de Borda.

Bajo el perfil P' , podemos ver que las 3 alternativas ocupan el 1er y 2do lugar la misma cantidad de veces, por lo que todas obtienen 15 puntos. Una vez más, el resultado de la elección es $x \sim y \sim z$. Cabe destacar que no es pura coincidencia que la Cuenta de Borda determine el mismo resultado que el del Método de Pluralidad y Antipluralidad para este perfil. En el Capítulo 2 veremos que de coincidir los rankings obtenidos por los métodos de Pluralidad y Antipluralidad, entonces inevitablemente la Cuenta de Borda ha de coincidir con ellos.

Método de la mayoría por pares

Elaborado por el Marqués de Condorcet³. En este método se computan todas las comparaciones de a pares de alternativas, y se elige como ganador aquel candidato que gane la mayoría.

En el perfil 1, podemos observar que $x > y$ para 8 individuos mientras que $y > x$ para sólo 4, con lo cual el método determina que $x > y$. De la misma manera, observamos $y > z$ y que $z > x$. Si juntamos los resultados de las dos primeras comparaciones, obtenemos el ranking $x > y > z$, pero por otro lado sabemos que $z > x$ ¡Hemos obtenido un ciclo!

En el perfil 2, sucede algo muy similar al perfil 1, obteniéndose otro ciclo donde $y > x$, $z > y$ y $x > z$.

Estos dos perfiles son conocidos como Perfiles de Condorcet, pues dan lugar a la famosa Paradoja de Condorcet. Esta paradoja establece que, si bien la preferencias individuales son transitivas, las preferencias de la mayoría no necesariamente lo son.

Por lo tanto observamos que, por un lado, bajo un mismo método, distintos perfiles pueden arrojar distintos rankings sociales, lo cual es un propiedad ciertamente deseable, ya que de lo contrario el resultado de la elección vendría impuesto por el método elegido. Por otro lado vemos como fijando el perfil, el resultado de la elección puede variar con el método utilizado, con lo cual cabe preguntarnos ¿Qué método verdaderamente representa las preferencias del conjunto? ¿Cuáles son las propiedades que debe tener un método para garantizar un verdadero reflejo de los gustos del grupo?

1.3. Las condiciones de Arrow

Arrow [1] se plantea la existencia de una función que represente de forma justa las preferencias de los individuos de una sociedad y establece 5 condiciones razonables que una función de bienestar social debería cumplir si su objetivo es representar apropiadamente los intereses individuales de un grupo.

³Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat (1743-1794), más conocido como el Marqués de Condorcet, fue un matemático francés, quién también se destacó como filósofo, politólogo y político. Se dice que sus ideas y escritos encarnan los ideales de La Ilustración.

Transitividad y Conexión

Definición 1.6. Sea f una función de bienestar social, A el conjunto de todos los posibles rankings, entonces decimos que $S \in A^n$ es un *conjunto admisible de preferencias individuales*, o perfil admisible, si $f|_S$ define una relación de orden entre las alternativas que satisface los Axiomas 1.1 y 1.2, es decir, una relación conexa y transitiva.

Arrow dice que no es necesario que todo conjunto de preferencias individuales sea admisible bajo f , sino que basta sólo con un conjunto suficientemente grande, de forma tal que exista un conjunto S de 3 alternativas para el cual todos los posibles perfiles sobre S puedan ser deducidos a partir de un perfil admisible sobre todas las alternativas.

Condición 1. Sea X el conjunto de alternativas, entonces existe $S \subset X$, $S = \{x, y, z\}$ conjunto de 3 alternativas tal que para todo perfil T_1, T_2, \dots, T_n sobre S , existe un perfil admisible R_1, R_2, \dots, R_n sobre X , tal que para todo individuo i , xR_iy si y solo si xT_iy , con $x, y \in S$.

Monotonía

Condición 2. Sea f una función de bienestar social, R_1, R_2, \dots, R_n y R'_1, R'_2, \dots, R'_n dos perfiles, R y R' relaciones de orden tal que $f(R_1, R_2, \dots, R_n) = R$ y $f(R'_1, R'_2, \dots, R'_n) = R'$, y P y P' las relaciones de preferencia asociadas a R y R' respectivamente. Supongamos que dado x , para todo i vale que:

- $x'R_iy' \iff x'R'_iy', \forall x', y'$ distinto de x .
- $xR_iy' \implies xR'_iy', \forall y'$.
- $xP_iy' \implies xP'_iy', \forall y'$.

Entonces, $xPy \implies xP'y$

La segunda condición nos dice que si las preferencias individuales cambian de forma tal que una alternativa x suba en los rankings mientras que las otras relaciones de a pares se mantengan constantes, entonces si x era preferida a y , x lo seguirá siendo, es decir, nunca puede ser indiferente o perder frente a y . Esta condición nos asegura que votar de forma favorable a una alternativa, generará un efecto positivo en el ranking final, y nunca el efecto contrario.

Independencia de Alternativas Irrelevantes

Condición 3. Sean R_1, R_2, \dots, R_n y R'_1, R'_2, \dots, R'_n dos perfiles, R y R' relaciones de orden tal que $f(R_1, R_2, \dots, R_n) = R$ y $f(R'_1, R'_2, \dots, R'_n) = R'$, $S \subset X$ un subconjunto de alternativas. Si para todo i , para todo $x, y \in S$, vale que xR_iy si y solo si xR'_iy , entonces vale xRy si y solo si $xR'y$.

La condición de Independencia de Alternativas Irrelevantes (IAI) establece que la relación entre 2 alternativas está totalmente determinada por las preferencias sobre estas y nunca por la intervención de una tercera alternativa.

Soberanía

Definición 1.7. Decimos que f es una *función de bienestar social impuesta* si, para algún par de alternativas x, y , $x \neq y$, vale que xRy para todo perfil R_1, R_2, \dots, R_n , donde R es tal que $f(R_1, R_2, \dots, R_n) = R$.

Condición 4. f no debe ser impuesta.

Cumpliendo la condición de soberanía, nos aseguramos que la relación entre dos alternativas dependa de las preferencias individuales y no venga impuesta de antemano. Es decir, si todos los miembros de la sociedad expresan que xP_iy , entonces es razonable exigirle a la función de bienestar social que nos diga que xPy .

No Dictatorial

Definición 1.8. Decimos que f es una *función de bienestar social dictatorial* si existe un individuo i tal que para todo x, y , vale que si xP_iy entonces xPy , para todo $R_1, \dots, R_{i-1}, R_{i+1}, \dots, R_n$, donde P es la relación de preferencia asociada a $f(R_1, \dots, R_n) = R$.

Condición 5. f no debe ser dictatorial.

La última condición nos asegura que las preferencias de un grupo nunca dependan solamente de las preferencias de un solo individuo, sin importar las preferencias del resto.

Estas condiciones que enumera Arrow están abiertas a la discusión; pero es innegable su capacidad de síntesis de lo que uno podría considerar razonable a la hora de intentar traducir las preferencias individuales de los miembros de una sociedad.

1.4. Métodos de elección frente a las condiciones de Arrow

En la Sección 1.2, introdujimos algunos ejemplos de métodos de elección. Ya enumeradas las condiciones de Arrow, es interesante ver si estos prevalecen frente a ellas.

Teorema 1.1. Sea $k = 2$ el número de alternativas, f el método de la mayoría por pares, entonces f es una función de bienestar social que cumple con las condiciones 2-5 y sostiene un orden social completo y transitivo para todo perfil $\{R_1, \dots, R_n\}$.

Nota. Observar que si el número de alternativas es 2, entonces el método de la mayoría por pares, la Cuenta de Borda, el método de pluralidad y el de antipluralidad son equivalentes.

Demostración. Sean x, y las dos alternativas, entonces definimos $N(x, y)$ como el número de individuos tal que xR_iy . Por lo tanto,

$$xRy \iff N(x, y) \geq N(y, x)$$

Veamos que f cumple con las condiciones de Arrow:

1. La 1ra condición debe modificarse levemente ya que no contamos con 3 alternativas. Por lo tanto pediremos que f sea transitiva y conexa \forall perfil R_1, \dots, R_n . Es claro que $N(x, y) \geq N(y, x)$ o $N(y, x) \geq N(x, y)$, por lo tanto, $\forall x, y, xRy$ o yRx . Es decir, f es conexa.

Por otro lado, supongamos xRy y yRz , es decir $N(x, y) \geq N(y, x)$ y $N(y, z) \geq N(z, y)$, y queremos ver que entonces xRz , osea, $N(x, z) \geq N(z, x)$. Dado que tenemos sólo 2 alternativas, si $z = y$ entonces por hipótesis vale la desigualdad, y si $z = x$ entonces obtenemos $N(x, x) \geq N(x, x)$, lo cual es valido $\forall x$. Por lo tanto, f es transitiva.

2. Sea R_1, \dots, R_n tal que xPy , es decir, xRy y $-(yRx)$, entonces $N(x, y) \geq N(y, x)$ pero no vale $N(y, x) \geq N(x, y)$, por lo tanto

$$N(x, y) > N(y, x) \quad (1)$$

Sea R'_1, \dots, R'_n un perfil que cumpla con las hipótesis de la Condición 2, en particular, con las últimas dos para $y' = y$. Es decir,

$$xR_i y \implies xR'_i y \quad (2)$$

$$xP_i y \implies xP'_i y \quad (3)$$

Supongamos que para algún i , $yR'_i x$, es decir, $-(xP'_i y)$. Por (3) obtenemos que $-(xP_i y)$ y por lo tanto $yR_i x$. Entonces,

$$yR'_i x \implies yR_i x \quad (4)$$

Sean $N'(x, y)$ y $N'(y, x)$, entonces por (2) todo individuo que cumple $xR_i y$, cumple $xR'_i y$ y por lo tanto vale que $N'(x, y) \geq N(x, y)$. De manera similar, por (4) vale que $N(y, x) \geq N'(y, x)$. Por (1) y las dos desigualdades expresadas, obtenemos que $N'(x, y) > N'(y, x)$, con lo cual $xP'y$ y la Condición 2 queda satisfecha.

3. La condición de IAI es trivial ya que S puede contener una sola alternativa o las dos. Si S contiene una sola alternativa, por ejemplo x , entonces $xRx \forall y$. Si $S = \{x, y\}$ entonces no existen alternativas fuera de S y por lo tanto las relaciones quedan determinadas solo por alternativas en S .
4. Supongamos que $\forall i$ vale que $-(xR_i y)$, es decir $yP_i x$ y por lo tanto $yR_i x$. Entonces $N(y, x) \geq N(x, y)$ pero no vale que $N(x, y) \geq N(y, x)$, y por lo tanto, $N(y, x) > N(x, y)$. De aquí obtenemos que $-(xRy)$.
La condición 4 se cumple ya que encontramos un perfil para el cuál no vale xRy .
5. Supongamos que \exists un individuo k para el cual $xP_k y$, mientras que $yP_i x \forall i \neq k$. Entonces tenemos que $xR_k y$, $-(xR_i y) \forall i \neq k$, es decir, $N(x, y) = 1$. Por otro lado, $yR_i x \forall i \neq k$, por lo tanto, $N(y, x) \geq 1 = N(x, y)$. De esta forma, yRx o mejor dicho, $-(xPy)$.
La condición 5 se cumple ya que demostramos que el individuo k no puede ser un dictador.

□

En nuestra demostración, podemos observar que el cumplimiento de las condiciones 2, 4 y 5 es independiente del número de alternativas.

Respecto a la condición de IAI, si $x, y \in S$, por definición de f , xRy está totalmente determinado por la cantidad de individuos para los cuales $xR_i y$, y esta relación se mantiene invariante en caso de no cambiar las posiciones relativas de x e y entre todas las alternativas. Es decir, la condición 3 también se cumple para más de 2 alternativas.

Ya hemos visto en el ejemplo utilizado a la hora de introducir el Método de la mayoría por pares, que la propiedad de transitividad no siempre se da y el método admite ciclos. Por lo tanto la Condición 1 no se cumple.

Lema 1.3. *Para cualquier espacio de alternativas, el Método de la mayoría por pares es una función de bienestar social que cumple con las Condiciones 2-5.*

Observemos qué sucede con los otros métodos introducidos anteriormente frente a las condiciones de Arrow. Veremos que ninguno de ellos cumple con la condición de IAI. Para ello, utilizaremos el perfil presentado a la hora de introducir los distintos métodos.

$$\begin{array}{l} 5 \quad x > y > z \\ 4 \quad y > z > x \\ 3 \quad z > x > y \end{array}$$

Si $S = \{x, z\}$ podemos observar que el perfil en S es

$$\begin{array}{l} 5 \quad x > z \\ 7 \quad z > x \end{array}$$

Por lo tanto, si f es el método de pluralidad, $f|S$ nos dice que zRx . Sin embargo, cuando introducimos la alternativa y , xRz . Por lo tanto, el método de pluralidad no cumple con IAI.

Utilizando el mismo S , podemos ver que al método de antipluralidad tampoco cumple IAI, ya que en S obtenemos que zPx , pero cuando introducimos y , x ocupa menos veces el último lugar que z y por lo tanto xPz .

Sea f la Cuenta de Borda, vemos que zPx si nos restringimos a S , pero viendo todas las alternativas, esa preferencia se invierte a xPz pues x obtiene 13 puntos y z solo 10.

1.5. La Paradoja de Arrow

Como hemos visto en la sección anterior, cuando el número de alternativas es mayor o igual a 3, todos los métodos introducidos no logran cumplir con todas las condiciones de Arrow.

Podríamos seguir proponiendo métodos y ponerlos frente a las condiciones, pero este patrón observado nos genera una pregunta muy importante ¿Acaso existe algún método que cumpla con todas las condiciones de Arrow? La respuesta se encuentra en el siguiente teorema.

Teorema 1.2 (Teorema de Arrow). *Sea $k \geq 3$ el número de alternativas, y f una función de bienestar social que cumple con las condiciones 1, 2 y 3, entonces o f es impuesta o f es dictatorial.*

Para demostrar este teorema central en nuestro estudio, primero deberemos introducir un concepto nuevo y analizar ciertas consecuencias.

En primer lugar, asumiremos que las Condiciones 1-5 se cumplen, y veremos cómo llegaremos a una contradicción. También, sin pérdida de generalidad, nos limitaremos a un conjunto de tres alternativas x, y, z , donde todo perfil sobre x, y, z es admisible. En caso de querer ser más formales y utilizar todas las alternativas, se puede reemplazar cada conjunto de preferencias sobre x, y, z por uno admisible sobre todas las alternativas de modo que ordene a x, y, z de la misma manera (esto es posible gracias a la Condición 1).

Definamos V un conjunto de individuos, V' un conjunto integrado por un solo individuo y V'' el conjunto de todos los individuos.

Definición 1.9. Decimos que el conjunto V es *decisivo* para x contra y , si $x \neq y$ y xPy para todos los perfiles admisibles tales que $xP_iy \forall i \in V$.

Consecuencia 1. Sean R_1, \dots, R_n y R'_1, \dots, R'_n dos perfiles tales que dado x, y , $xP'_iy \forall i$ tal que xR_iy , entonces $xPy \implies xP'y$, donde P y P' son las relaciones de preferencia asociadas a R_1, \dots, R_n y R'_1, \dots, R'_n respectivamente.

Esta consecuencia representa una expansión de la Condición 2. Si x se encuentra por encima de y y se mantiene por encima, o si x es indiferente a y y sube en el ranking, entonces si x era socialmente preferida a y , lo seguirá siendo más allá de los rankings relativos de las otras alternativas.

Demostración. Sean x, y, z las alternativas, entonces definimos para cada i la relación R''_i de la siguiente manera

$$x'R''_iy' \iff (x'R_iy' \wedge x' \neq z) \vee y' = z \quad (1)$$

lo cual se traduce a mover a z a la última posición dejando a x e y invariantes. Es decir, que para cada i , R''_i ordena a las variables x, y de la misma manera que R_i , con lo que obtenemos

$$x'R''_iy' \iff x'R_iy' \forall x', y' \in \{x, y\} \quad (2)$$

Por hipótesis sabemos que xPy , y como la ecuación (2) cumple con las hipótesis de IAI, obtenemos

$$xP''y \quad (3)$$

Análogamente a lo realizado en (1) con R_i , definimos R^*_i a partir de R'_i

$$x'R^*_iy' \iff (x'R'_iy' \wedge x' \neq z) \vee y' = z \quad (4)$$

De (1) y (4) podemos observar que $-(zR''_iy)$ y $-(zR^*_iy)$, y por lo tanto, yP''_iz y $yP^*_iz \forall i$. Entonces,

$$\forall i, \text{ si } x' \neq x, y' \neq x, x'R''_iy' \iff x'R^*_iy' \quad (5)$$

También por (1) y (4) podemos afirmar que xP''_iz y $xP^*_iz \forall i$.

Por (1) sabemos que $\forall i$ tal que xR''_iy , entonces xR_iy , mientras que por hipótesis, xP'_iy para tal i , y por (4) obtenemos xP^*_iy . Por lo tanto vale

$$\forall y', xR''y' \implies xR^*y' \quad (6)$$

$$\forall y', xP''y' \implies xP^*y' \quad (7)$$

Por (5)-(7), las relaciones R'' y R^* satisfacen las hipótesis de la Condición 2, por lo cual xP^*y . Al igual que R y R'' , R' y R^* satisfacen:

$$x'R^*_iy' \iff x'R'_iy' \forall x', y' \in \{x, y\} \quad (8)$$

Es decir, cumplen con las hipótesis de IAI. Como xP^*y , entonces vale que $xP'y$. \square

Consecuencia 2. Sea R_1, \dots, R_n un perfil tal que $xP_iy \forall i \in V$ y $yP_ix \forall i \notin V$ para algún x, y , tal que la función de bienestar social f determine xPy , entonces V es decisivo para x contra y

La consecuencia 2 nos dice que si para algún x, y , un conjunto de individuos vota a favor de x mientras que el resto vota en contra, y la función falla a favor de x , entonces mientras que el primer conjunto de individuos no cambie su voto, entonces la función siempre arrojará xPy . Esto es evidente pues los que antes votaron en contra de x , sólo pueden cambiar su voto a un resultado que es favorable a esta alternativa.

Demostración. Sea R'_1, \dots, R'_n un perfil tal que $xP'_iy \forall i \in V$. Queremos ver que V es decisivo para x contra y , es decir, que $xP'y$.

Veamos que $xR_iy \implies xP'_iy$, o mejor dicho, que $-(xP'_iy) \implies yP_ix$. Si i es tal que $-(xP'_iy)$ entonces $i \notin V$, y por hipótesis, yP_ix .

Por la Consecuencia 1, dado que xPy , entonces $xP'y$. \square

Consecuencia 3. Sean x, y tal que $x \neq y$, entonces V'' es decisivo para x contra y .

Esta consecuencia es evidente. Si todos los individuos votan a favor de x , entonces la función de bienestar social debe determinar que xPy . Esta consecuencia es conocida como el Criterio de Pareto, y en una nueva versión del Teorema de Arrow de 1963, reemplaza a las condiciones de Monotonía y Soberanía. El Criterio de Pareto implica Soberanía, pero no necesariamente Monotonía, con lo cual esta nueva versión del Teorema es más fuerte que la original tratada aquí.

Demostración. Por la Condición 4, sabemos que \exists un perfil R_1, \dots, R_n tal que $-(yRx)$, es decir, xPy .

Sea R'_1, \dots, R'_n perfil tal que $xP'_iy \forall i$, o mejor dicho, $\forall i \in V''$. Ciertamente, $xP'_iy \forall i$ tal que xR_iy . Por la consecuencia 1, como xPy , entonces $xP'y$.

Entonces tenemos perfil R'_1, \dots, R'_n tal que $xP'_iy \forall i \in V''$, $yP'_ix \forall i \notin V''$ (es decir, para ningún i), y $xP'y$. Por lo tanto, por la consecuencia 2, obtenemos que V'' es decisiva para x contra y . \square

Consecuencia 4. Si V' es decisivo para x contra y o para y contra z , entonces V' es decisivo para x contra z .

La condición 4 dice que si, dadas las alternativas x, y , existe un individuo tal que siempre que prefiera x sobre y entonces la sociedad también lo hace, entonces lo mismo sucederá dejando fijo x y reemplazando a y con cualquier otra alternativa, o dejando fijo y y reemplazando a x por cualquier otra alternativa. La existencia de tal individuo es ciertamente riesgosa, pues supone un dictador siempre y cuando las alternativas x o y estén involucradas.

Demostración.

(a) Sea V' decisivo para x contra y . Queremos ver que V' es decisivo para x contra $z \forall z \neq x$.

Consideremos al individuo 1 como el miembro de V' . Sea R_1, \dots, R_n perfil que cumpla las siguientes condiciones:

$$xP_1y \tag{1}$$

$$yP_iz \forall i \tag{2}$$

$$zP_ix \forall i \neq 1 \tag{3}$$

Por la ecuación (1) y por hipótesis, $xP_iz \forall i \in V'$, entonces, xPy .

Por otro lado, $yP_iz \forall i \in V''$, entonces por consecuencia 3 obtenemos yPz .

Por Condición 1, la relación de orden relacionada a R_1, \dots, R_n satisface conexión y transitividad, entonces xPz . De las ecuaciones (1) y (2) tenemos que $xP_iz \forall i \in V'$, mientras que de (3) obtenemos que $zP_ix \forall i \notin V'$.

Hemos encontrado perfil que cumple con las hipótesis de la consecuencia 2, por lo tanto V' es decisivo para x contra z .

(b) Sea V' decisivo para y contra z . Queremos ver que V' es decisivo para x contra $z \forall x \neq z$. Consideremos ahora el perfil tal que

$$xP_i y \forall i \quad (4)$$

$$yP_1 z \quad (5)$$

$$zP_i x \forall i \neq 1 \quad (6)$$

Al igual que en la parte (a), la ecuación (4) implica xPy , la (5) yPz , y por lo tanto, xPz . También de (1) y (2) obtenemos $xP_1 z$, y en conjunción con la ecuación (6), cumplimos las hipótesis de la consecuencia 2. Por lo tanto, V' es decisivo para x contra z .

□

Consecuencia 5. Para todo par de alternativas x, y y cualquier conjunto de un individuo V' , no es verdad que V' sea decisivo para x contra y .

Esta última consecuencia niega, para cada par de alternativas x, y , la existencia de un dictador.

Demostración. Supongamos que la consecuencia no es verdadera, es decir, que existe un individuo, digamos el individuo 1, que es decisivo para x contra y . Sea y' distinta de x, y . Entonces por consecuencia 4, V' es decisivo para x contra y' . Como también vale para y , podemos decir

$$V' \text{ es decisivo para } x \text{ contra } y' \forall y' \neq x \quad (1)$$

Ahora fijamos y' y sea x' distinto a x e y' , lo cual es posible ya que por la Condición 1 contamos con 3 alternativas. Por (1) y la consecuencia 4, obtenemos que V' es decisivo para x' contra y' , pero por (1) también vale para $x' = x$.

$$V' \text{ es decisivo para } x' \text{ contra } y' \text{ dado } y' \neq x', y' \neq x \quad (2)$$

Sea x' distinta de x e y'' distinta tanto de x' como de x , de nuevo posible gracias a la Condición 1. Entonces x' e y'' cumplen con las condiciones de (2) y vale que V' es decisivo para x' contra y'' . Por la consecuencia 4, podemos decir que

$$V' \text{ es decisivo para } x' \text{ contra } x \text{ dado } x \neq x' \quad (3)$$

Combinando (2) y (3) obtenemos

$$V' \text{ es decisivo para } x' \text{ contra } y' \forall y' \neq x' \quad (4)$$

Por definición, obtenemos que $xP_1 y \implies xPy \forall x, y$. Esto implica que 1 es un dictador y por ende, la función social es dictatorial, lo cual entra en directa contradicción con la Condición 5. Por lo tanto vale la consecuencia. □

Demostración (Teorema de Arrow).

Ahora demostraremos que una función f que cumpla con las condiciones 1-5, y por lo tanto con las consecuencias descritas anteriormente, lleva a una contradicción.

Sea $S = \{x, y, z\}$ un conjunto de tres alternativas que cumplan con la Condición 1. Para cada par ordenado (x', y') , por la consecuencia 3, existe por lo menos un conjunto de individuos, V'' el conjunto de todos los individuos, que es decisivo para x' contra y' .

Consideremos el conjunto $A = \{V \mid V \text{ es decisivo para } x' \text{ contra } y', x', y' \in S\}$. Sea $V_1 \in A$ el conjunto de individuos que posea la menor cantidad de miembros (si más de uno existe, seleccionar uno). Para mayor facilidad, podemos decir que V_1 es decisivo para x contra y .

Sea k la cantidad de individuos en V_1 , a los cuales designaremos $1, \dots, k$, y sean $k+1, \dots, n$ los individuos restantes. Entonces definimos $V' = \{1\}$, $V_2 = \{2, \dots, k\}$ y $V_3 = \{k+1, \dots, n\}$.

Por la definición de V_1 podemos concluir que

$$V_1 \text{ es decisivo para } x \text{ contra } y \quad (1)$$

y que cualquier conjunto que es decisivo para una alguna alternativa en S contra otra alternativa en S posee por lo menos k individuos. Como V_2 posee $k-1$ individuos, concluimos que V_2 no es decisivo para alguna alternativa en S contra otra alternativa en S .

Sea R_1, \dots, R_n un perfil tal que

$$\forall i \in V', xP_i y, yP_i z \quad (2)$$

$$\forall i \in V_2, zP_i x, xP_i y \quad (3)$$

$$\forall i \in V_3, yP_i z, zP_i x \quad (4)$$

Por (2) y (3) y las definiciones de V', V_1 y V_2 , podemos afirmar que $xP_i y \forall i \in V_1$. Entonces por (1) decimos

$$xPy \quad (5)$$

donde P es la relación de preferencia asociada a R_1, \dots, R_n .

Por transitividad, obtenemos de (3) que

$$zP_i y \forall i \in V_2 \quad (6)$$

y de (3) y (5) obtenemos

$$yP_i z \forall i \notin V_2 \quad (7)$$

Supongamos que zPy , entonces por (6), (7) y la consecuencia 2, obtenemos que V_2 es decisiva para z contra y , pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $-(zPy)$, o mejor dicho

$$yRz \quad (8)$$

Donde R es la relación de orden asociada a R_1, \dots, R_n . Por la condición 1, R es transitiva y por (5), (8)

$$xPz \quad (9)$$

De (2) obtenemos

$$xP_i z \forall i \in V' \quad (10)$$

Mientras que de (3) y (4)

$$zP_i x \forall i \notin V' \quad (11)$$

Por la consecuencia 2, (9), (10) y (11), obtenemos que V' es decisiva para x contra z . Pero esto contradice la consecuencia 5 ya que V' nunca puede ser decisiva para ningún par de alternativas, pues esto haría del individuo 1 un dictador.

Por lo tanto, hemos visto que si la función de bienestar social f cumple con las condiciones 1-4 de Arrow, entonces no cumple con la Condición 5. En caso de desear que la función no sea dictatorial, entonces deberá ser impuesta y así evitar la influencia del individuo perteneciente al conjunto V' . \square

1.6. Esencialmente, todos los métodos son incorrectos, pero algunos son útiles

Esta adaptación de la frase acuñada por George E. P. Box⁴: "*Esencialmente, todos los modelos son incorrectos, pero algunos son útiles.*", resulta adecuada a la conclusión arribada a través del Teorema de Arrow. Repasemos por un momento cómo llegamos aquí.

A lo largo de este primer capítulo hemos visto cómo los individuos ordenan racionalmente las alternativas según sus preferencias, de una forma conexa y transitiva.

Luego definimos varias funciones de bienestar social, las cuales nos permiten traducir las preferencias de un conjunto de individuos en una preferencia de la sociedad.

También enumeramos una serie de condiciones desarrolladas por Kenneth J. Arrow, las cuales una función de bienestar social debería cumplir en caso de aspirar a transformar de una forma verdaderamente justa las preferencias individuales en una grupal.

Por último, vimos que no existe ninguna función que cumpla con estas condiciones, es decir, no existe ninguna función verdaderamente justa.

Esta última conclusión nos lleva hacia una nueva pregunta. Si no existe ningún método verdaderamente justo, entonces ¿existirá alguno que tenga mayores ventajas sobre otros?

En nuestro caso, limitaremos esa pregunta a los métodos de elección posicionales. Ya hemos visto algunos en este capítulo, como el de pluralidad, antipluralidad y la Cuenta de Borda, y en el próximo capítulo observaremos que estos métodos no han sido elegidos al azar, sino que cumplen papeles muy importantes dentro de los métodos de elección posicionales.

⁴George Edward Pelham Box (1919-2013) fue un estadista británico conocido por sus trabajos en series de tiempo, inferencia bayesiana, control de calidad y diseño de experimentos.

Capítulo 2

Construcción geométrica de métodos de elección posicionales

El segundo capítulo de este trabajo abordará los métodos de elección posicionales, es decir, aquellos métodos donde la elección depende de la posición que ocupen las alternativas dentro de los rankings individuales. Sin embargo, para realizar esta tarea, utilizaremos un enfoque muy distinto al adoptado en el Capítulo 1, pues abordaremos este tema desde la geometría.

Para ello nos basaremos en el trabajo realizado por Donald G. Saari¹ en su libro *Geometry of Voting*[2]. Aquí el autor propone una representación geométrica para muchos de los conceptos vistos en el capítulo anterior, como alternativas, rankings y métodos de elección. Como se verá a lo largo de este capítulo, la geometría resulta ser una herramienta sorprendentemente útil para abordar la teoría de la elección.

2.1. Alternativas, rankings y perfiles en el espacio

Antes de adentrarnos en los métodos de elección posicionales, debemos definir cómo representaremos geoméricamente las nociones de alternativas, rankings y perfiles.

2.1.1. El simplex $S_i(6)$

Sean x_1, x_2, x_3 alternativas, entonces asumiremos que los individuos establecen sus preferencias individuales mediante una relación de orden estricto, es decir, no existe para ellos la noción de indiferencia entre alternativas. Esta condición nos define seis (3!) tipos de votantes:

¹Donald Gene Saari (1940-presente) es un distinguido profesor de matemática y economía. Sus especialidades son los métodos de elección, el problema de los N cuerpos y la aplicación de las matemáticas en asuntos de las ciencias sociales.

Tipo	Ranking
1	$x_1 > x_2 > x_3$
2	$x_1 > x_3 > x_2$
3	$x_3 > x_1 > x_2$
4	$x_3 > x_2 > x_1$
5	$x_2 > x_3 > x_1$
6	$x_2 > x_1 > x_3$

Por lo tanto, un perfil queda definido por la cantidad de votantes que exista de cada tipo. Es decir, si hay 3 votantes del tipo 2, 5 del tipo 5 y 2 del tipo 6, entonces el perfil queda definido como $p = (0, 3, 0, 0, 5, 2)$. Para mayor simplicidad, trabajaremos con un perfil normalizado.

Definición 2.1. Sea p_j la fracción de votantes del tipo j , entonces definimos al *perfil normalizado* p como

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$$

$$p_j \geq 0, \sum_{j=1}^6 p_j = 1$$

En nuestro ejemplo anterior, el perfil $(0, 3, 0, 0, 5, 2)$ tiene un perfil normalizado $p = (0, \frac{3}{10}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{5})$.

Las restricciones de $p_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^6 p_j = 1$ ubican a un perfil como un punto racional en el simplex unitario del ortante positivo de \mathbb{R}^6

$$Si(3!) = Si(6) = \left\{ x = (x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{R}^6 \mid x_j \geq 0, \sum_{j=1}^6 x_j = 1 \right\}$$

Este simplex se trata de un objeto geométrico de 5 dimensiones, ya que \mathbb{R}^6 es un espacio de 6 dimensiones el cual se encuentra reducido por una sola ecuación $\sum_{j=1}^6 x_j = 1$.

Dado que un objeto de 5 dimensiones es difícil de imaginar, más aún ilustrar, debemos buscar otra forma de visualizar este espacio. Para ello utilizaremos los perfiles canónicos E_j , donde todos los votantes son del tipo j . Por ejemplo, $E_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)$ representa el perfil en el cual todos los votantes son del tipo 5, es decir, que optan por el ranking $x_2 > x_3 > x_1$. Utilizando los E_j , podemos redefinir al simplex $Si(6)$ como

$$Si(6) = \left\{ p = (p_1, \dots, p_6) = \sum_{j=1}^6 p_j E_j \mid p_j \geq 0, \sum_{j=1}^6 p_j = 1 \right\} = EC(\{E_i\})$$

Es decir, el simplex $Si(6)$ no es otra cosa que la envolvente convexa de los perfiles canónicos E_j .

2.1.2. El Triángulo de Representación

Como hemos visto, los posibles perfiles de un conjunto de individuos habitan en un espacio de 5 dimensiones, el simplex $Si(6)$, que no es otra cosa que la envolvente convexa de los perfiles canónicos. Ahora nos enfocaremos en cómo representar geoméricamente un ranking.

Definición 2.2. Sean x_1, x_2, x_3 alternativas, definimos al *vector electoral normalizado* como $q = (q_1, q_2, q_3)$, donde q_j representa la fracción de votos recibida por la alternativa x_j .

Por ejemplo, el vector normalizado $(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5})$ indica que si 50 votos fueron emitidos, entonces x_1 recibió 15 votos, x_2 5 votos y x_3 los restantes 30 votos, resultando así en el ranking $x_3 > x_1 > x_2$.

Por su definición, podemos observar que un vector electoral normalizado cumple

$$q_j \geq 0, \sum_{j=1}^3 q_j = 1$$

con lo cual podemos ubicar al vector electoral como un punto racional dentro del simplex unitario en el octante positivo de \mathbb{R}^3

$$Si(3) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_j \geq 0, \sum_{j=1}^3 x_j = 1 \right\}$$

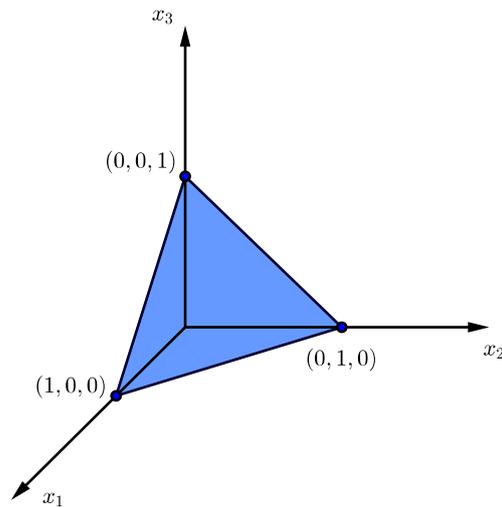


Figura 2.1: El simplex $Si(3)$

Bajo un razonamiento análogo al realizado con el espacio de perfiles, el simplex $Si(3)$ es un objeto de 2 dimensiones, que coincide con la envoltura convexa de los vectores electorales canónicos (o de unanimidad, ya que representan la decisión unánime por una de las alternativas) e_j . Se trata del triángulo equilátero cuyos vértices son los vectores electorales canónicos e_j , y que denominaremos *triángulo de representación*. Dado que ahora trabajaremos sobre una figura en 2 dimensiones, prescindiremos de los ejes cartesianos x_1, x_2 y x_3 .

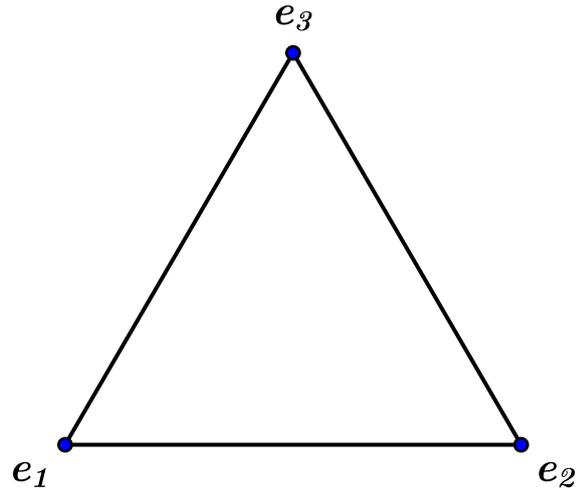


Figura 2.2: Triángulo de Representación

Cada punto dentro del triángulo de representación se encuentra asociado a un ranking. Por ejemplo, el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ está asociado al ranking $x_1 \sim x_2 \sim x_3$, y el punto $(\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{10})$ al ranking $x_2 > x_3 > x_1$.

Una propiedad visual muy interesante del triángulo de representación es que podemos inferir el ranking simplemente observando la cercanía que tienen el punto q a cada vértice e_j . Esto se debe a que mientras más cerca esté q al vértice e_k , es decir mientras más cerca esté al voto unánime para la alternativa x_k , mayor será el valor de q_k , y por lo tanto, mayor será la proporción de votos para la alternativa x_k .

Tomemos, por ejemplo, todos los puntos equidistantes a e_1 y e_2 , es decir, aquellos puntos para los cuales $q_1 = q_2$. Esto es equivalente a dibujar la mediatriz del segmento $e_1 - e_2$. Si ubicamos un punto q sobre este segmento, sabemos que $x_1 \sim x_2$. Ahora si movemos el punto q hacia la derecha, nos encontramos más cerca de e_2 que de e_1 y por lo tanto $x_2 > x_1$. De la misma manera si nos paramos a la izquierda de la mediatriz, nuestro ranking tendrá la relación $x_1 > x_2$. Llamaremos a este segmento la *línea de indiferencia* $x_1 - x_2$.

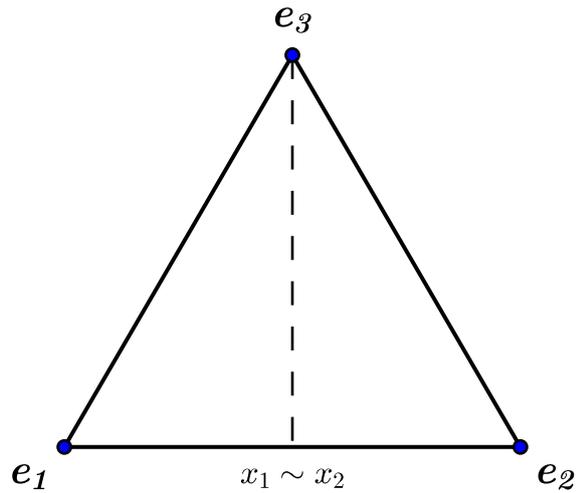


Figura 2.3: Línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$

Realizando el mismo procedimiento con los dos restantes pares de vértices, podemos definir 13 regiones en las cuales queda dividido nuestro triángulo de representación:

- 6 regiones que corresponden a los 6 triángulos delimitados por las líneas de indiferencia y el triángulo de representación.
- 6 regiones definidas por las 2 mitades de cada línea de indiferencia, es decir, los 6 segmentos que parten del baricentro del triángulo de representación.
- El baricentro del triángulo de representación, donde las 3 líneas de indiferencia se intersecan y existe la misma distancia hacia cada vértice del triángulo, es decir, el punto $I = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

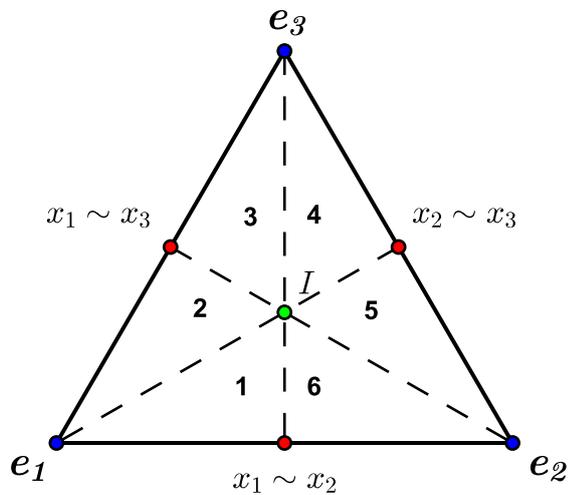


Figura 2.4: Regiones del Triángulo de Representación

Realicemos un pequeño ejercicio. Supongamos las siguientes relaciones $x_3 > x_1, x_3 > x_2$ y $x_1 > x_2$. Comencemos con la relación $x_3 > x_1$, es decir, parémonos en el triángulo por encima de la línea de indiferencia $x_1 - x_3$. Así mismo, las relaciones $x_3 > x_2$ y $x_1 > x_2$ nos ubican por encima de la línea $x_3 - x_2$ y a la izquierda de la línea $x_1 - x_2$. La intersección de estos tres triángulos nos ubica en la región 3, es decir, el ranking $x_3 > x_1 > x_2$. Por lo tanto, las 6 regiones triangulares representan aquellos rankings donde las preferencias entre las alternativas son estrictas.

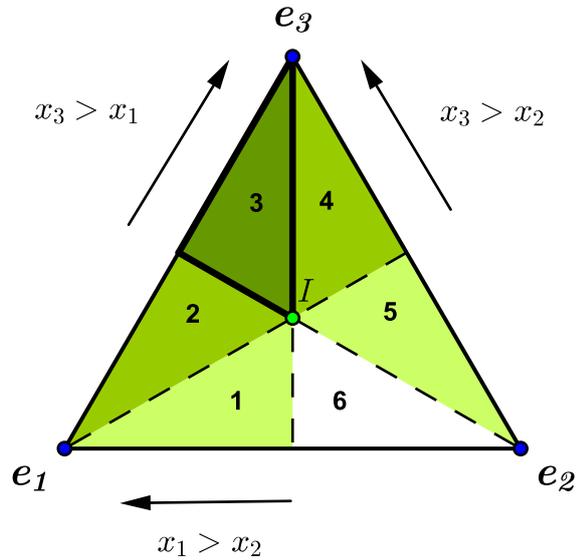


Figura 2.5: La intersección de los triángulos definen la región 3

Ahora supongamos que queremos obtener el ranking $x_2 \sim x_3 > x_1$. Cómo x_2 es indiferente a x_3 , debemos posicionarnos sobre la línea de indiferencia $x_2 - x_3$, en particular, ubiquémonos sobre el punto I . Este punto sirve de pivot para cómo se relacionan las alternativas x_2 y x_3 con la alternativa x_1 . Si desde I nos movemos sobre la línea $x_2 - x_3$ hacia el vértice e_1 entonces obtendremos el ranking $x_1 > x_2 \sim x_3$, mientras que si nos movemos en dirección contraria, obtendremos el ranking $x_2 \sim x_3 > x_1$. Podemos concluir entonces que los 6 segmentos que parten del punto I , representan aquellos rankings donde existe una relación de indiferencia entre 2 de las alternativas.

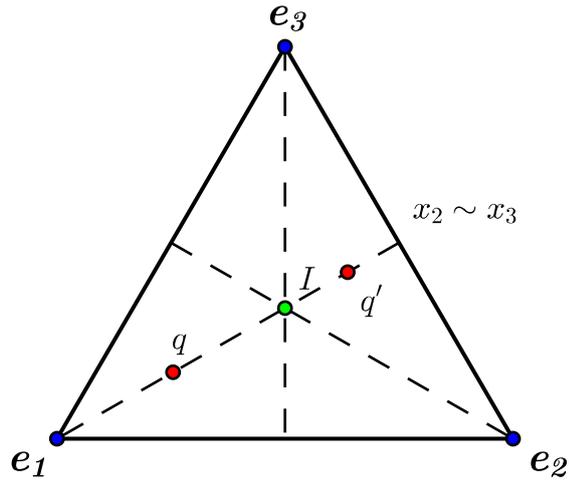


Figura 2.6: El punto q' representa el ranking $x_2 \sim x_3 > x_1$

Por último, si deseamos obtener un ranking de indiferencia entre las 3 alternativas $x_1 \sim x_2 \sim x_3$, siguiendo el razonamiento anterior, deberíamos posicionarnos simultáneamente sobre las 3 líneas de indiferencia. La única forma de hacer esto es ubicandonos sobre el punto I , el cual define nuestra última región.

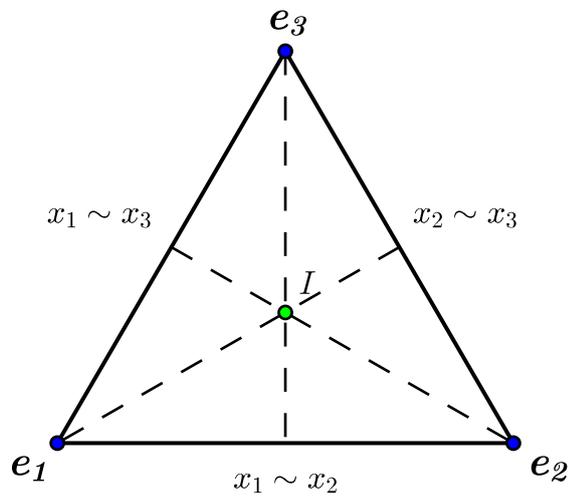


Figura 2.7: El punto I representa el ranking $x_1 \sim x_2 \sim x_3$

2.2. Métodos de Elección Posicionales

2.2.1. El vector de votación W

Como hemos visto en el Capítulo 1, un método de elección es una función f que toma el perfil de una sociedad y devuelve un único ranking. Con nuestra nueva representación geométrica desarrollada en la Sección 2.1, podemos decir que

$$f : Si(6) \rightarrow Si(3)$$

donde cada elemento de $Si(3)$ está asociado a un único ranking social.

Como dijimos en un principio, nuestro estudio se enfocará en los Métodos de Elección Posicionales, es decir, aquellos métodos que asignan un puntaje a cada candidato dependiendo de la posición que ocupen en cada ranking individual. Ya hemos discutido algunos de ellos en el Capítulo 1, como los métodos de pluralidad y antipluralidad, y la Cuenta de Borda. A continuación volveremos a introducirlos desde un enfoque geométrico.

Definición 2.3. Sea $W = (w_1, w_2, w_3)$, decimos que W es un *vector de votación* si satisface

$$w_i \geq w_{i+1} \text{ y } w_1 > w_3$$

Un método de elección posicional viene definido por un vector de votación W , donde w_j puntos se le asignan a la alternativa ubicada en la posición j . De esta forma, podemos asociar los métodos ya conocidos a un vector de votación.

El método de pluralidad, el cual asigna un punto a la alternativa que se encuentre en la primera posición se asocia al vector de votación

$$W_P = e_1 = (1, 0, 0)$$

El método de antipluralidad, el cual asigna un punto negativo a la alternativa que se encuentre en último lugar podría representarse con el vector $(0, 0, -1)$. Otra forma de ver al método de antipluralidad es como aquel que asigna un punto a las alternativas que ocupan el primer y segundo lugar, y ningún punto a la que ocupa el último. Por lo tanto,

$$W_{AP} = (1, 1, 0)$$

Por último, la Cuenta de Borda, se puede definir mediante el vector

$$W_{CB} = (2, 1, 0)$$

Ya definido el vector de votación y establecida su relación con los métodos de elección posicionales, ahora queda encontrar una representación funcional de estos métodos.

Comencemos con los vectores E_j , es decir, veamos la imagen de los perfiles canónicos. Tomemos por ejemplo el vector E_6 , el cual representa el voto unánime por el ranking de tipo 6, $x_2 > x_1 > x_3$. Sea $W = (w_1, w_2, w_3)$ un vector de votación, podemos decir que $f(E_6, W_s) = (w_2, w_1, w_3)$, ya que de esta forma indicamos que la alternativa x_1 recibe w_2 puntos por ubicarse en segundo lugar, x_2 recibe w_1 puntos y x_3 recibe w_3 puntos. Por lo tanto, la imagen del perfil canónico E_6 es una permutación de W_s .

De esta forma, definimos $[W]_j$ como la permutación del vector W correspondiente al tipo de ranking j , y por lo tanto

$$f(E_j, W) = [W]_j$$

j	Ranking	$f(E_j, W) = [W]_j$
1	$x_1 > x_2 > x_3$	(w_1, w_2, w_3)
2	$x_1 > x_3 > x_2$	(w_1, w_3, w_2)
3	$x_3 > x_1 > x_2$	(w_2, w_3, w_1)
4	$x_3 > x_2 > x_1$	(w_3, w_2, w_1)
5	$x_2 > x_3 > x_1$	(w_3, w_1, w_2)
6	$x_2 > x_1 > x_3$	(w_2, w_1, w_3)

Definición 2.4. Sea W un vector de votación, $[W]_j$ la permutación de W correspondiente al ranking tipo j y $p \in Si(6)$ un perfil, entonces definimos al *método de elección posicional* f como

$$f : Si(6) \rightarrow Si(3)$$

$$f(p, W) = \sum_{j=1}^6 p_j f(E_j, W) = \sum_{j=1}^6 p_j [W]_j$$

Por ejemplo, sea $p = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)$ y $W = W_{CB}$, entonces

$$\begin{aligned} f(p, W) &= \frac{1}{3}[W_{BC}]_1 + \frac{1}{3}[W_{BC}]_3 + \frac{1}{3}[W_{BC}]_5 \\ &= \frac{1}{3}(2, 1, 0) + \frac{1}{3}(1, 0, 2) + \frac{1}{3}(0, 2, 1) \\ &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

Teorema 2.1. f es una transformación lineal tanto en p como en W .

Demostración. Sean p y q dos perfiles, W y V dos vectores de votación y α un escalar,

$$\begin{aligned} f(p + q, W) &= \sum_{j=1}^6 (p_j + q_j)[W]_j = \sum_{j=1}^6 \{(p_j[W]_j) + (q_j[W]_j)\} \\ &= \sum_{j=1}^6 p_j[W]_j + \sum_{j=1}^6 q_j[W]_j = f(p, W) + f(q, W) \\ f(\alpha p, W) &= \sum_{j=1}^6 (\alpha p_j)[W]_j = \sum_{j=1}^6 \alpha(p_j[W]_j) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^6 p_j[W]_j = \alpha f(p, W) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(p, W + V) &= \sum_{j=1}^6 p_j([W + V]_j) = \sum_{j=1}^6 p_j([W]_j + [V]_j) \\
&= \sum_{j=1}^6 \{p_j[W]_j + p_j[V]_j\} = \sum_{j=1}^6 p_j[W]_j + \sum_{j=1}^6 p_j[V]_j \\
&= f(p, W) + f(p, V) \\
f(p, \alpha W) &= \sum_{j=1}^6 (p_j)[\alpha W]_j = \sum_{j=1}^6 p_j(\alpha[W]_j) \\
&= \sum_{j=1}^6 \alpha(p_j[W]_j) = \alpha \sum_{j=1}^6 p_j[W]_j \\
&= \alpha f(p, W)
\end{aligned}$$

□

2.2.2. Vectores de votación equivalentes

Si bien por definición existen infinitos vectores de votación, podemos ver que varios de ellos son equivalentes. Por ejemplo, sean los vectores $W_P = (1, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$ y $(5, 1, 1)$, podemos ver que el resultado de una elección bajo cualquiera de estos 3 vectores de votación sería la misma para todo perfil p , ya que los 3 casos se puntúa en mayor medida al primer lugar e indiferentemente al segundo y tercero. Este razonamiento nos lleva a la siguiente definición

Definición 2.5. Sean W_1 y W_2 vectores de votación, entonces definimos la relación de equivalencia \sim como $W_1 \sim W_2$ si y solo si existen escalares a y b , $a > 0$, tal que

$$W_1 = aW_2 + b(1, 1, 1)$$

Veamos que \sim se trata efectivamente de una relación de equivalencia.

- *Reflexiva:* $W_1 = 1W_1 + 0(1, 1, 1)$, entonces $W_1 \sim W_1 \forall W_1$.
- *Simétrica:* Si $W_1 \sim W_2$ entonces $W_1 = aW_2 + b(1, 1, 1)$. Por lo tanto $W_2 = \frac{1}{a}W_1 + (-\frac{b}{a})(1, 1, 1)$, con lo cual, $W_2 \sim W_1$.
- *Transitiva:* Si $W_1 \sim W_2$ y $W_2 \sim W_3$ entonces vale $W_1 = aW_2 + b(1, 1, 1)$, $a > 0$ y $W_2 = cW_3 + d(1, 1, 1)$, $c > 0$. Reemplazando W_2 en la primera ecuación se obtiene que $W_1 = (ac)W_3 + (ad + b)(1, 1, 1)$, $ac > 0$, y entonces $W_1 \sim W_3$.

Teorema 2.2. Sean W_1 y W_2 vectores de votación tal que $W_1 \sim W_2$, entonces el ranking para $f(p, W_1)$ es el mismo que para $f(p, W_2)$

Demostración. $W_1 \sim W_2$, por lo tanto $W_1 = aW_2 + b(1, 1, 1)$

$$\begin{aligned}
f(p, W_1) &= f(p, aW_2 + b(1, 1, 1)) \\
&= af(p, W_2) + bf(p, (1, 1, 1)) \\
&= af(p, W_2) + b(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(p, W_2) = (r, s, t)$ y arroja el ranking $x_2 > x_1 > x_3$, es decir $s > r > t$. Entonces

$$f(p, W_1) = af(p, W_2) + b(1, 1, 1) = (ar + b, as + b, at + b) = (u, v, w)$$

Como $s > r > t$ y $a > 0$, entonces $v > u > w$ y por lo tanto $f(p, W_1)$ arroja el mismo ranking que $f(p, W_2)$. \square

En un ejemplo anterior vimos cómo para $p = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)$, $f(p, W_{CB})$ arrojaba un ranking $x_1 \sim x_2 \sim x_3$.

Sea $W = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, observemos que $W = \frac{1}{3}W_{CB}$, por lo tanto $f(p, W)$ debería arrojar el mismo ranking que $f(p, W_{CB})$.

$$f(p, W) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Como podemos observar, efectivamente $f(p, W)$ arroja el ranking $x_1 \sim x_2 \sim x_3$.

Establecida esta relación de equivalencia, podemos proceder a designar un vector para que represente a toda una clase.

Sea $W = (w_1, w_2, w_3)$, tomemos los escalares $b = -\frac{w_3}{w_1+w_2-2w_3}$ y $a = \frac{1}{w_1+w_2-2w_3}$. Utilizando la relación de equivalencia

$$\begin{aligned} aW + b(1, 1, 1) &= \frac{1}{w_1 + w_2 - 2w_3} (w_1, w_2, w_3) - \frac{w_3}{w_1 + w_2 - 2w_3} (1, 1, 1) \\ &= \left(\frac{w_1 - w_3}{w_1 + w_2 - 2w_3}, \frac{w_2 - w_3}{w_1 + w_2 - 2w_3}, 0 \right) \\ &= \left(1 - \frac{w_2 - w_3}{w_1 + w_2 - 2w_3}, \frac{w_2 - w_3}{w_1 + w_2 - 2w_3}, 0 \right) \\ &= (1 - s, s, 0) = W_s \end{aligned}$$

donde $s = \frac{w_2 - w_3}{w_1 + w_2 - 2w_3}$, $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$.

W_s es el *vector normalizado*. Observar que la restricción $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ captura la noción de que una alternativa que ocupa la primera posición debe recibir por lo menos la misma cantidad de puntos que aquella que ocupa la segunda. También es importante destacar que s nos da una noción de qué tan importante es la alternativa que ocupa la segunda posición, es decir, de cuál es el peso de la segunda elección para el método.

El método de pluralidad definido por el vector $(1, 0, 0)$ ya se encuentra normalizado, con un valor de $s = 0$. Por lo tanto,

$$W_P = W_0 = (1, 0, 0)$$

Un valor de $s = 0$ nos indica que el método de pluralidad no asigna ninguna importancia a la segunda elección, lo que es evidente ya que sólo le interesa qué alternativa ocupa el primer lugar.

Por otro lado, analicemos el método de antipluralidad. Para normalizarlo, debemos tomar el vector de votación $(1, 1, 0)$ e ingresarlo en la fórmula de s

$$s = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$W_{AP} \sim W_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

En este caso, s toma el mayor valor posible, es decir, aquel que le da mayor importancia a la segunda elección de los votantes. Tal es el peso que le da, que no distingue entre la primera y segunda elección.

Por último, veamos que sucede con la Cuenta de Borda.

$$s = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$W_{CB} \sim W_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

En este caso, es importante notar que con $s = \frac{1}{3}$, las diferencias entre los puntajes son constantes, es decir, $w_1 - w_2 = w_2 - w_3 = \frac{1}{3}$. Esta particularidad nos da una noción de que la Cuenta de Borda mantiene una relación equilibrada entre el peso asignado a cada posición dentro de un ranking.

2.2.3. Los resultados de W_s en el triángulo de representación

Ya hemos visto que f es una transformación lineal que parte del espacio de perfiles $Si(6)$ y devuelve un ranking en el triángulo de representación $Si(3)$. También encontramos una relación de equivalencia entre vectores de votación que nos permite identificar a cada vector de votación W con un vector normalizado W_s .

Ahora explotaremos el hecho de que $Si(6)$ es la envoltura convexa de los perfiles canónicos o de unanimidad E_j , $1 \leq j \leq 6$.

Como f es una transformación lineal, para encontrar la imagen de f para un W_s determinado no tenemos más que encontrar las imágenes de los perfiles canónicos, es decir, $f(E_j, W_s) = [W_s]_j$, $1 \leq j \leq 6$. f transformará la envoltura convexa $EC(\{E_j\}) = Si(6)$ en la envoltura convexa $EC(\{f(E_j, W_s)\}) = EC(\{[W_s]_j\}) = EC(W_s)$.

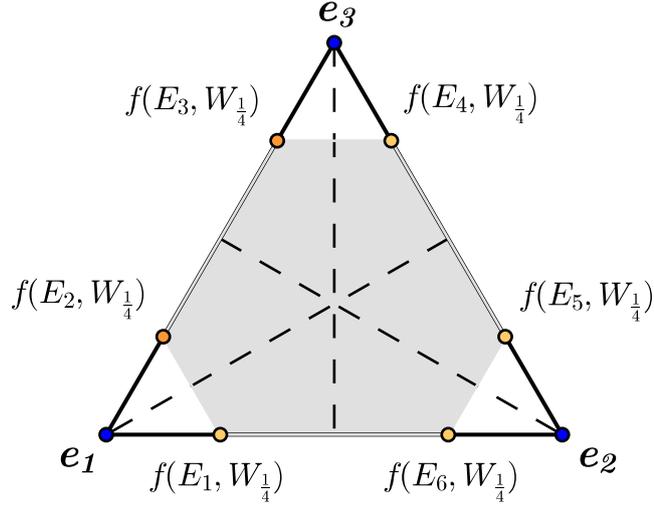


Figura 2.8: Ejemplo de imagen de $f(p, W_s)$ para $s = \frac{1}{4}$

Cualquier punto dentro de $EC(W_s)$ puede ser expresado como una combinación lineal de $[W_s]_j$

$$\sum_{j=1}^6 p_j [W_s]_j$$

para alguna elección de (p_1, \dots, p_6) , $p_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^6 p_j = 1$.

Por lo tanto, todo punto dentro de $EC(W_s)$ es el resultado de una elección para algún perfil, y los pesos de la representación convexa del punto determinan tal perfil.

Veamos qué sucede con los métodos de pluralidad, antipluralidad y la Cuenta de Bor-da.

j	$f(E_j, W_s)$	$f(E_j, W_0)$	$f(E_j, W_{\frac{1}{2}})$	$f(E_j, W_{\frac{1}{3}})$
1	$(1 - s, s, 0)$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
2	$(1 - s, 0, s)$	$(1, 0, 0)$	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	$(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})$
3	$(s, 0, 1 - s)$	$(0, 0, 1)$	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$
4	$(0, s, 1 - s)$	$(0, 0, 1)$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
5	$(0, 1 - s, s)$	$(0, 1, 0)$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
6	$(s, 1 - s, 0)$	$(0, 1, 0)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$

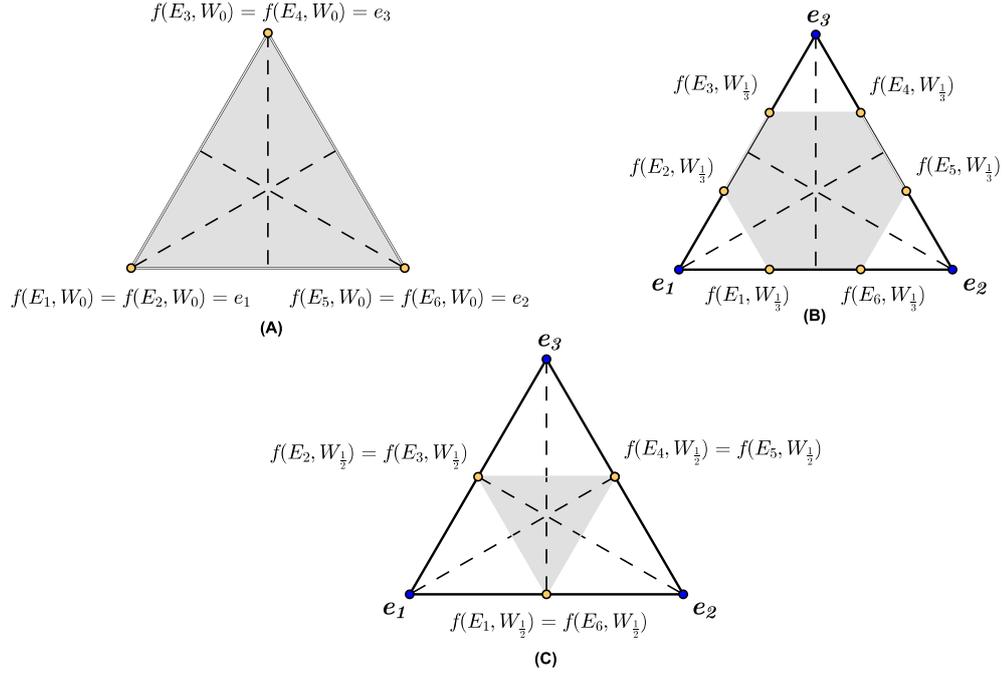


Figura 2.9: (A) La envoltura del método de pluralidad. (B) La envoltura de la Cuenta de Borda (C) La envoltura del método de antipluralidad

Observando las tres envolturas, nos vemos tentados a decir que a medida que s se hace más grande, la envoltura convexa $EC(W_s)$ se reduce. Esta conclusión se concreta en el siguiente teorema.

Teorema 2.3. Sean W_{s_1} y W_{s_2} dos vectores de votación, entonces si $0 \leq s_2 < s_1 \leq \frac{1}{2}$, vale que

$$EC(W_{s_1}) \subset EC(W_{s_2})$$

Demostración. Sea $x \in EC(W_{s_1})$, entonces $x = \sum_{j=1}^6 p_j [W_{s_1}]_j$, con $p_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^6 p_j = 1$. Queremos ver que podemos expresar x como $x = \sum_{j=1}^6 q_j [W_{s_2}]_j$, con $q_j \geq 0$ y $\sum_{j=1}^6 q_j = 1$.

Primero, observemos que $[W_{s_1}]_j \in EC(W_{s_2}) \forall j$.

Tomemos por ejemplo $[W_{s_1}]_1$ y $[W_{s_1}]_6$. Como $s_1 > s_2$, ambos se encuentran más cerca del punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, es decir el punto medio entre e_1 y e_2 , que $[W_{s_2}]_1$ con $[W_{s_2}]_6$, y por ende ambos se encuentran sobre el segmento que une $[W_{s_2}]_1$ con $[W_{s_2}]_6$. Por lo tanto ambos pueden ser escritos como $t[W_{s_2}]_1 + (1-t)[W_{s_2}]_6$ para algún t , donde $t + (1-t) = 1$. Entonces podemos expresarlos de la siguiente manera

$$[W_{s_1}]_j = \sum_{i=1}^6 q_{ij} [W_{s_2}]_i, \quad j = 1, 6$$

donde $q_{ij} = 0$ para $i = 2, 3, 4, 5$ y $\sum_{i=1}^6 q_{ij} = 1$.

De forma análoga para el resto de los $[W_{s_1}]_j$ arribamos a que

$$[W_{s_1}]_j = \sum_{i=1}^6 q_{ij}[W_{s_2}]_i, \quad \forall j$$

con $\sum_{j=1}^6 q_{ij} = 1 \quad \forall j$. Por lo tanto $[W_{s_1}]_j \in EC(W_{s_2}) \quad \forall j$

Ahora veamos qué sucede con un punto cualquiera $x \in EC(W_{s_1})$.

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^6 p_j [W_{s_1}]_j = \sum_{j=1}^6 p_j \left(\sum_{i=1}^6 q_{ij} [W_{s_2}]_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^6 \left(\sum_{i=1}^6 p_j q_{ij} [W_{s_2}]_i \right) = \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^6 p_j q_{ij} [W_{s_2}]_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^6 [W_{s_2}]_i \left(\sum_{j=1}^6 p_j q_{ij} \right) \end{aligned}$$

Sea $q_i = \sum_{j=1}^6 p_j q_{ij}$, solo resta ver que $\sum_{i=1}^6 q_i = 1$ y que por lo tanto $x \in EC(W_{s_2})$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 q_i &= \sum_{i=1}^6 \left(\sum_{j=1}^6 p_j q_{ij} \right) = \sum_{j=1}^6 \left(\sum_{i=1}^6 p_j q_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^6 p_j \left(\sum_{i=1}^6 q_{ij} \right) = \sum_{j=1}^6 p_j 1 = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto queda demostrado que $EC(W_{s_1}) \subset EC(W_{s_2})$. □

Este resultado no es menor, ya que nos dice que todo W_s se encuentra delimitado por los métodos de pluralidad y antipluralidad de la siguiente manera

$$EC(W_{\frac{1}{2}}) \subset EC(W_s) \subset EC(W_0) = Si(3)$$

Concentrémonos en la primera inclusión por unos minutos. Como hemos visto, la envoltura convexa del método de antipluralidad $EC(W_{\frac{1}{2}})$ se interseca con las 13 regiones del triángulo de representación, y por lo tanto, también lo hace cualquier otro método de elección posicional W_s . Esta propiedad nos asegura el cumplimiento de la condición de Soberanía establecida por Arrow para todos los métodos posicionales, ya que para cualquier resultado deseado, existe un perfil con el cual el método arroja dicho ranking.

2.2.4. La recta de procedimientos

En el Capítulo 1 pudimos observar cómo un mismo perfil podía devolver distintos rankings sociales al variar el método de elección. La pregunta que surge entonces es, en el caso de los métodos de elección posicionales ¿qué tanto puede variar el resultado de la elección? ¿Existirá algún perfil que admita todos los posibles rankings con sólo variar el método posicional elegido?

Para responder estas preguntas, retomemos el perfil P propuesto en el Capítulo 1 a la hora de ver los rankings que distintos métodos podían arrojar.

- 5 $x_1 > x_2 > x_3$
- 4 $x_2 > x_3 > x_1$
- 3 $x_3 > x_1 > x_2$

Este perfil posee 5 votantes del tipo 1, 4 del tipo 5 y 3 del tipo 3, por lo tanto $p = (\frac{5}{12}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3})$. Ahora veamos qué resultados obtenemos al utilizar distintos métodos de elección posicionales.

s	$f(p, W_s)$	Ranking
0	$(\frac{5}{12}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	$x_1 > x_2 > x_3$
1/4	$(\frac{3}{8}, \frac{17}{48}, \frac{13}{48})$	$x_1 > x_2 > x_3$
1/3	$(\frac{13}{36}, \frac{13}{36}, \frac{5}{18})$	$x_1 \sim x_2 > x_3$
3/8	$(\frac{17}{48}, \frac{35}{96}, \frac{9}{32})$	$x_2 > x_1 > x_3$
1/2	$(\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{7}{24})$	$x_2 > x_1 > x_3$

Veamos como se ven los $f(p, W_s)$ en el triángulo de representación $Si(3)$

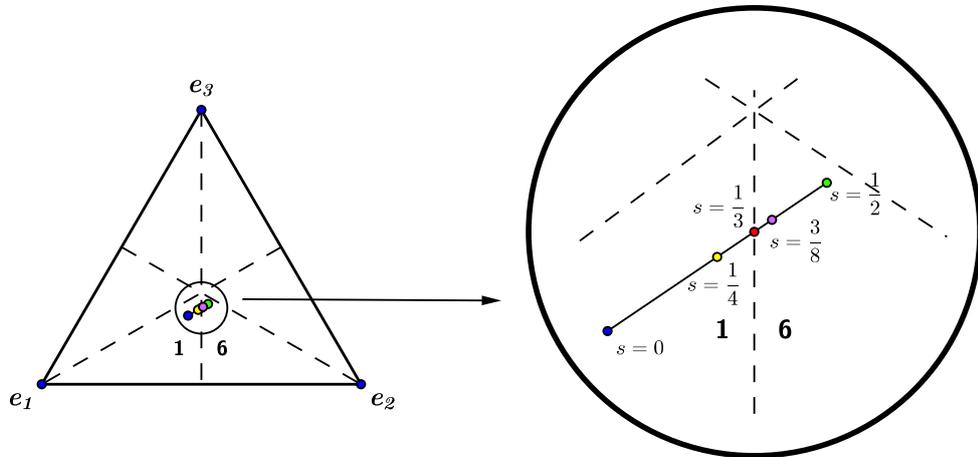


Figura 2.10: Los resultados de $f(p, W_s)$ para $p = (\frac{5}{12}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3})$ y distintos valores de s .

Sorpresivamente, los resultados de cada método para el perfil p parecen estar alineados, y no sólo eso, sino que moviéndose de $f(p, W_0)$ hacia $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ a medida que el valor de s aumenta, lo cual nos lleva a formular el siguiente teorema.

Teorema 2.4. Dado un perfil $p \in Si(6)$ y W_s , entonces $f(p, W_s) \in Si(3)$ se encuentra en el segmento que conecta a $f(p, W_0)$ y $f(p, W_{\frac{1}{2}})$. Más aún

$$f(p, W_s) = (1 - 2s)f(p, W_0) + 2sf(p, W_{\frac{1}{2}}), \quad s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Demostración. Sea W_s , entonces

$$\begin{aligned} W_s &= (1 - s, s, 0) = (1 - 2s, 0, 0) + (s, s, 0) \\ &= (1 - 2s)(1, 0, 0) + 2s\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = (1 - 2s)W_0 + 2sW_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Dado que f es lineal en W_s , obtenemos

$$\begin{aligned} f(p, W_s) &= f(p, (1 - 2s)W_0 + 2sW_{\frac{1}{2}}) \\ &= (1 - 2s)f(p, W_0) + 2sf(p, W_{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

□

Tal como lo habíamos sospechado, dado un perfil p , todos los posibles resultados de la elección se encuentran alineados en un segmento que tiene como extremos $f(p, W_0)$ y $f(p, W_{\frac{1}{2}})$, al cual llamaremos *recta de procedimientos*. No sólo eso, sino que con sólo saber cuál es el resultado de la elección para los métodos de pluralidad y antipluralidad, podemos saber el resultado de cualquier otro método posicional, ya que este es el que se encuentra a $2s$ de la distancia de $f(p, W_0)$ a $f(p, W_{\frac{1}{2}})$.

Definición 2.6. Sea p un perfil, entonces definimos $Sup(p)$ como

$$Sup(p) = \{\text{todos los rankings de 3 candidatos que pueden surgir de } p \\ \text{a partir de cambios en el método de elección posicional elegido}\}$$

En el ejemplo anterior, podemos decir que

$$\{x_1 > x_2 > x_3, x_1 \sim x_2 > x_3, x_2 > x_1 > x_3\} \subset Sup(p)$$

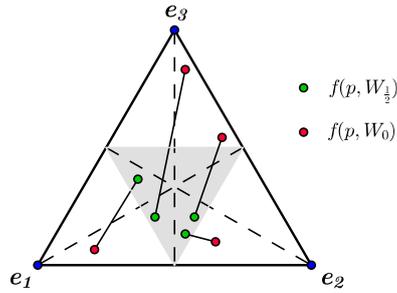
Volviendo a las preguntas planteadas al comienzo de la Subsección 2.2.4, lo que nos estamos cuestionando es el tamaño de $Sup(p)$. El hecho de todos los resultados de los métodos posicionales para un perfil p se encuentren en un segmento, nos limita la cantidad de elementos que puede poseer $Sup(p)$, y no solo eso, sino que anula la posibilidad de que un perfil p admita todos los posibles rankings a través de métodos posicionales, pues es geoméricamente imposible que un segmento atraviese las 13 regiones del triángulo de representación $Si(3)$.

Una vez más retomando el ejemplo anterior, observando las posiciones de los extremos del segmento, $f(p, W_0)$ y $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ podemos afirmar que para $p = (\frac{5}{12}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{3})$ vale que

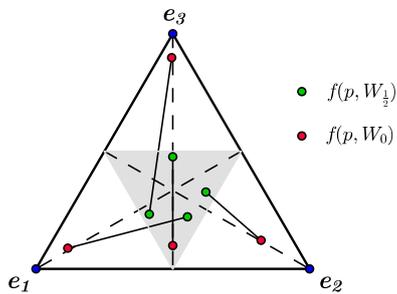
$$\begin{aligned} \{x_1 > x_2 > x_3, x_1 \sim x_2 > x_3, x_2 > x_1 > x_3\} &= Sup(p) \\ |Sup(p)| &= 3 \end{aligned}$$

Una ventaja que tiene utilizar la geometría para analizar la teoría de la elección, es su carácter visual, intuitivo y lúdico. Así como en el ejemplo, la geometría nos permite jugar con las posiciones de $f(p, W_0)$ y $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ para determinar la posición de la recta de procedimientos y, por lo tanto, el tamaño de $Sup(p)$.

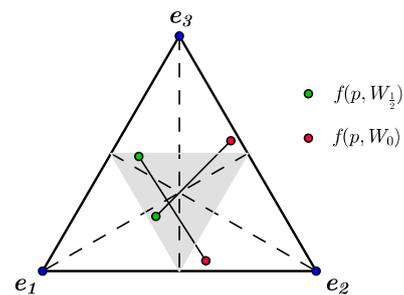
- Si $f(p, W_0)$ y $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ se encuentran en regiones que no admiten indiferencia entre alternativas, entonces $Sup(p)$ posee como mucho 7 rankings. A su vez, $Sup(p)$ admite como mucho 4 rankings puramente estrictos, y por lo tanto, un máximo de 3 rankings que involucran un empate entre alternativas.



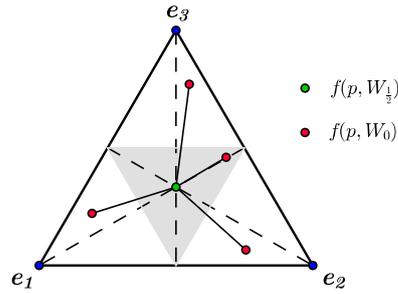
- Si $f(p, W_0)$ o $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ se encuentran en una región que involucra un empate entre 2 alternativas, entonces $Sup(p)$ posee como mucho 6 rankings.



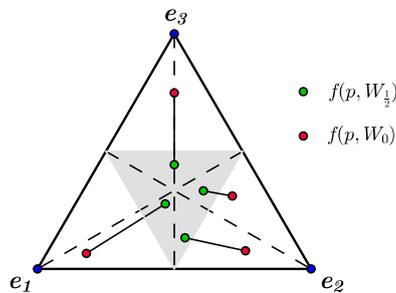
- Si el ranking de $f(p, W_0)$ es la inversión del ranking de $f(p, W_{\frac{1}{2}})$, por ejemplo el ranking de pluralidad es $x_1 > x_2 > x_3$ y el de antipluralidad es $x_3 > x_2 > x_1$, entonces $Sup(p)$ posee 7 o 3 rankings. En el último caso los rankings serán el de pluralidad, antipluralidad y $x \sim y \sim z$.



- Si $f(p, W_0)$ o $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ se encuentran sobre I , entonces $Sup(p)$ posee no más de 2 rankings. Estos serán $x_1 \sim x_2 \sim x_3$ y el ranking correspondiente al otro extremo del segmento.



- Si $f(p, W_0)$ y $f(p, W_{\frac{1}{2}})$ admiten el mismo ranking, entonces todos los métodos posicionales admitirán tal ranking y, por lo tanto, $|Sup(p)| = 1$.



2.3. Concordancia entre Métodos de Elección Posicionales y el Método de la mayoría por pares

A lo largo de este trabajo pudimos observar cómo distintos métodos de elección seleccionan distintos rankings sociales para un mismo perfil.

Tomemos por ejemplo las alternativas x_1, x_2, x_3 y el perfil $p = (\frac{5}{12}, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0)$. De utilizar el método de pluralidad, obtendríamos que la alternativa x_1 es preferida por sobre todas las alternativas. Sin embargo, para más de la mitad de los votantes, la alternativa x_1 se encuentra en último lugar.

En este ejemplo podemos ver la aparente falta de conexión entre el resultado que arroja un método posicional, en este caso el método de pluralidad que dice que $x_1 > x_2$, y el método de la mayoría por pares que nos dice que más de la mitad de los votantes prefiere x_2 sobre x_1 . Por lo tanto cabe preguntarse ¿qué condiciones debe cumplir un método de elección posicional para coincidir con el método de la mayoría por pares? ¿Serán las condiciones iguales para todos los métodos posicionales? Y de no ser así, ¿existirá algún método posicional que requiera menos condiciones que el resto?

Para visualizar el conjunto imagen, no tenemos más que ver cuál es la imagen de los perfiles canónicos para cada W_s .

j	$F(E_j, W_s)$	$F(E_j, W_0)$	$F(E_j, W_{\frac{1}{2}})$	$F(E_j, W_{\frac{1}{3}})$
1	$(1 - s, s, 0, 1)$	$(1, 0, 0, 1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$	$(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 1)$
2	$(1 - s, 0, s, 1)$	$(1, 0, 0, 1)$	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1)$
3	$(s, 0, 1 - s, 1)$	$(0, 0, 1, 1)$	$(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1)$
4	$(0, s, 1 - s, -1)$	$(0, 0, 1, -1)$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -1)$
5	$(0, 1 - s, s, -1)$	$(0, 1, 0, -1)$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1)$
6	$(s, 1 - s, 0, -1)$	$(0, 1, 0, -1)$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1)$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, -1)$

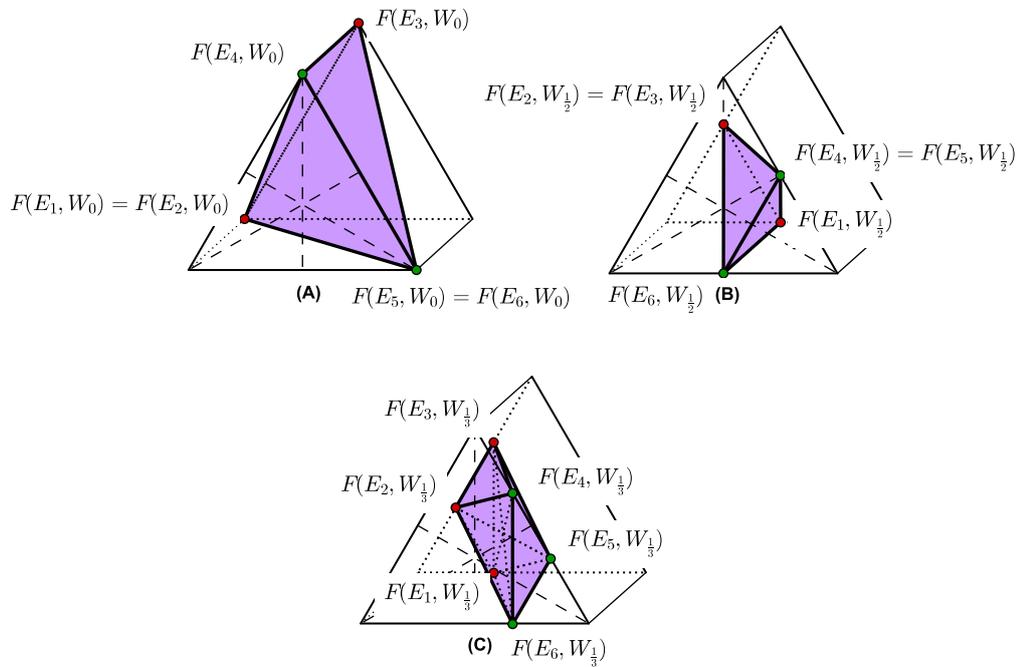


Figura 2.12: El conjunto imagen para los métodos de pluralidad (A), antipluralidad (B) y la Cuenta de Borda (C)

2.3.2. De vuelta al Triángulo de Representación

Hasta este momento hemos trabajado con figuras en 2 dimensiones, las que no sólo nos han permitido visualizar los conceptos desarrollados sino que también han sido una herramienta para arribar a resultados a partir de nociones geométricas básicas.

Nuestra actual representación de F se encuentra en un espacio de 3 dimensiones, lo cual dificulta nuestro trabajo. Por lo tanto, buscaremos una forma de volver al triángulo de representación sin perder información sobre el ranking del par x_1, x_2 .

Para ello comencemos separando nuestros tipos de votantes entre los que prefieren x_1 sobre x_2 , es decir los de tipo 1, 2 y 3, y el resto, quienes prefieren x_2 sobre x_1 . Si sólo existen votantes del primer conjunto, entonces el resultado de f se encuentra en $EC(\{f(E_j, W_s)\}_{j=1}^3) = W_s^1$, mientras que si sólo hay votantes del segundo conjunto, el resultado se encontrará en $EC(\{f(E_j, W_s)\}_{j=4}^6) = W_s^2$. Entonces, sean $\alpha_s \in W_s^1$, $\beta_s \in W_s^2$ y d la proporción de votantes que prefieren x_1 sobre x_2 , podemos expresar a f como

$$f(p, W_s) = d\alpha_s + (1 - d)\beta_s$$

$$d = \sum_{j=1}^3 p_j, \quad a_j = \frac{p_j}{d} \quad j = 1, 2, 3 \quad b_j = \frac{p_j}{1 - d}, \quad j = 4, 5, 6$$

$$\alpha_s = \sum_{j=1}^3 a_j [W_s]_j, \quad \beta_s = \sum_{j=4}^6 b_j [W_s]_j$$

Entonces, sea $q_s = f(p, W_s)$, este se encuentra sobre un segmento que tiene como extremos a α_s y β_s y se encuentra a d de la distancia de β_s a α_s .

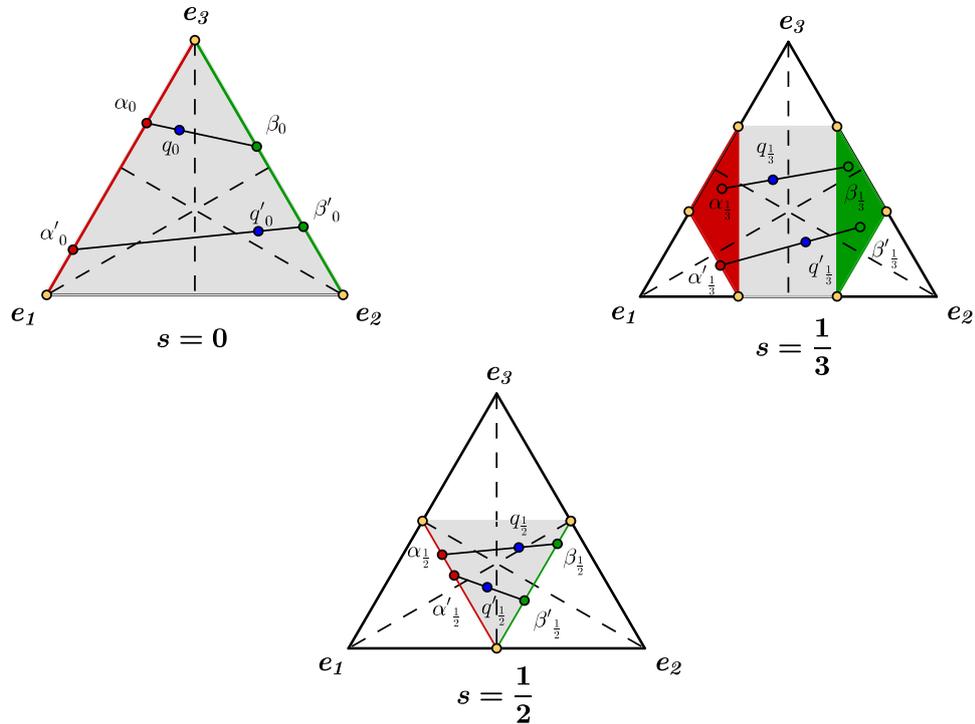


Figura 2.13: W_s^1 y W_s^2 para los métodos de pluralidad, antipluralidad y Borda

Esta nueva representación de f no sólo nos permite ubicar al punto q_s dentro del triángulo de representación, y por lo tanto, deducir su ranking posicional correspondiente, sino que también nos permite ver el ranking de a pares entre x_1 y x_2 observando la distancia del punto q_s a sus respectivos α_s y β_s .

Si q_s se encuentra más cerca de α_s que de β_s , entonces el valor de d será mayor a $\frac{1}{2}$ y por lo tanto el ranking relativo entre x_1 y x_2 será $x_1 > x_2$.

Observemos el siguiente ejemplo. Sean $W_{\frac{1}{3}}$ y $p = (0, 0, \frac{5}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$. Entonces,

$$\begin{aligned} d &= 0 + 0 + \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \\ \alpha &= 0 \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) + 0 \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right) + 1 \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) \\ \beta &= \frac{1}{3} \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3} \right) \\ f(p, W_{\frac{1}{3}}) = q &= \frac{5}{8} \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{24}, \frac{13}{24} \right) \end{aligned}$$

Analíticamente podemos observar que $q_1 > q_2$ y por lo tanto la Cuenta de Borda dice $x_1 > x_2$, mientras que por otro lado $d > \frac{1}{2}$ y por lo tanto el ranking de a pares también es $x_1 > x_2$.

Veamos ahora otro ejemplo. Sigamos con la Cuenta de Borda pero esta vez con el perfil $p' = (0, 0, \frac{5}{8}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$. Entonces,

$$\begin{aligned} d' &= 0 + 0 + \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \\ \alpha' &= 0 \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) + 0 \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right) + 1 \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) \\ \beta' &= 0 \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{3} \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9} \right) \\ f(p', W_{\frac{1}{3}}) = q' &= \frac{5}{8} \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}, \frac{2}{9} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

A diferencia del ejemplo anterior, en este caso la Cuenta de Borda nos dice que $x_1 \sim x_2$, mientras que el Método de la mayoría por pares nos da un ranking relativo de $x_1 > x_2$.

La motivación detrás de esta nueva representación de f yacía en dejar las 3 dimensiones y volver al triángulo de representación. Observemos estos dos ejemplos:

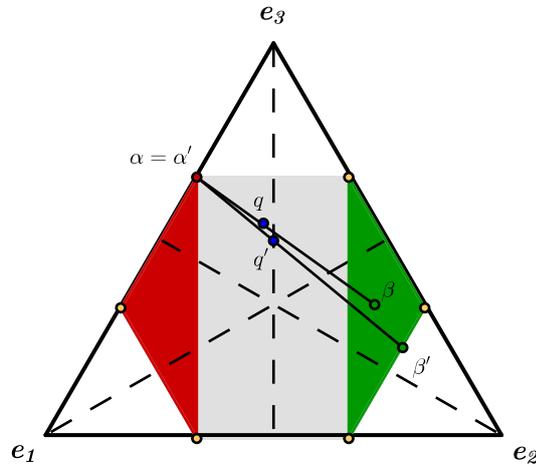


Figura 2.14: La Cuenta de Borda no siempre coincide con el Método de la mayoría por pares

Analicemos primero el punto q . Como podemos observar, éste se encuentra a la izquierda de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$, con lo cual efectivamente la Cuenta de Borda nos dice que $x_1 > x_2$. A su vez, q se encuentra más cercano a α que a β y por lo tanto el Método de la mayoría por pares coincide con la Cuenta de Borda.

Si miramos ahora el punto q' , al igual que q , éste se encuentra más cerca a α que a β . Sin embargo, se encuentra sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$, con lo cual, el Método de la mayoría por pares no coincide con la Cuenta de Borda.

2.3.3. El método de pluralidad contra la mayoría

Un caso muy interesante es el del método de pluralidad. Como hemos visto anteriormente, $f(E_1, W_0) = f(E_2, W_0)$, $f(E_3, W_0) = f(E_4, W_0)$ y $f(E_5, W_0) = f(E_6, W_0)$ lo que da a $EC(W_0)$ su forma triangular, coincidiendo con el triángulo de representación.

Dadas estas igualdades entre las imágenes de los perfiles canónicos, las regiones W_s^1 y W_s^2 se degeneran respectivamente en los lados $e_1 - e_3$ y $e_3 - e_2$, como se puede observar en la Figura 2.13.

Por lo tanto, con el método de pluralidad, el movimiento de los α_0 y β_0 queda sujeto a un espacio de 1 dimensión, es decir, sólo es posible subir y bajar los α_0 y β_0 por los lados del triángulo de representación.

Supongamos $d = \frac{1}{2}$, entonces el método de la mayoría por pares dice que $x_1 \sim x_2$. Si queremos hacer coincidir el resultado del método de pluralidad, debemos colocar el punto q_s sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$. Para ello, por propiedades de triángulos similares, α_0 y β_0 deben estar a la misma altura. Cualquier perturbación sobre α_0 o β_0 colocaría al punto q_0 en la región $x_1 > x_2$ o $x_2 > x_1$.

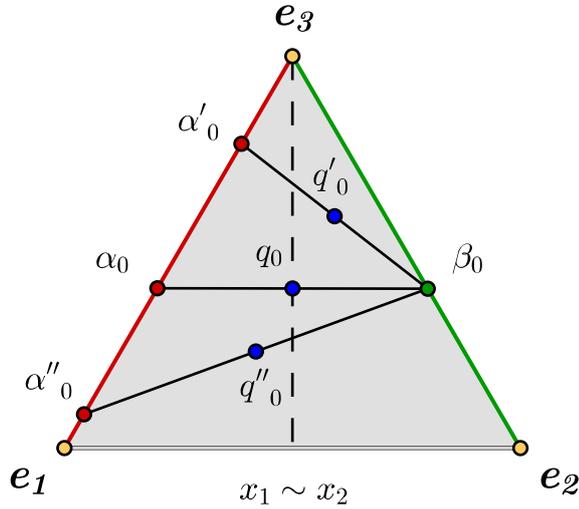


Figura 2.15: Perturbaciones en α_s posicionan a q_s en distintos lados de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$

Como podemos observar, para el método de pluralidad existen casos donde, si $d = \frac{1}{2}$, entonces el ranking obtenido no siempre coincide con el método de la mayoría por pares. Recordemos que d representa la fracción de votantes que prefieren $x_1 > x_2$, por lo tanto, no alcanza con que el 50% de los votantes dentro de un perfil prefieran x_1 sobre x_2 para que el método de pluralidad devuelva el mismo resultado.

Por lo tanto, ahora nos preguntamos cuál es el mínimo porcentaje de votantes que debe preferir x_1 sobre x_2 de forma tal que el método de pluralidad coincida, o mejor dicho, cuál es el valor mínimo que d debe tomar. Llamaremos d^* a dicho valor.

Podemos observar en la figura anterior, que mientras más alto se encuentra α_0 y más bajo β_0 , es decir, mientras mayor es la pendiente, más alto debe ser el valor de d para que q_0 se ubique a la izquierda de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ y de esa forma $x_1 > x_2$ para ambos métodos.

Siguiendo esta lógica, tiene sentido buscar el caso extremo, o sea el segmento de mayor pendiente, para encontrar d^* . Este caso es aquel en el que α_0 se encuentra más cerca de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ mientras que β_0 se encuentra lo más lejos posible. Para ello, α_0 debe ser igual a $f(E_3, W_0) = f(E_4, W_0) = e_3$, mientras que β_0 es igual a $f(E_5, W_0) = f(E_6, W_0) = e_2$.

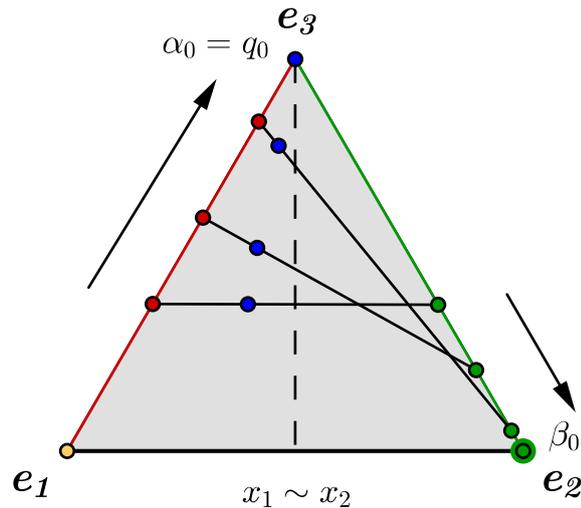


Figura 2.16: Para mantenerse a la izquierda de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ a medida que la pendiente aumenta, el valor de d se hace mayor.

Podemos ver que la única manera de que q_0 no se ubique a la derecha de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ es ubicándose sobre la línea misma. Para ello, q_0 debe coincidir con α_0 y por lo tanto $d = 1$. Por lo tanto, para el método de pluralidad, $d^* = 1$.

Esto quiere decir que con el método de pluralidad, el voto unánime por x_1 sobre x_2 nos asegura por lo menos un empate entre las alternativas, pero nunca ocurrirá $x_2 > x_1$. En otras palabras, no importa que tan avasallante y cercana a la unanimidad sea la victoria de x_1 sobre x_2 , el método de pluralidad puede aún decir que x_2 es preferida sobre x_1 .

Tomemos el siguiente ejemplo para ilustrar esta importante conclusión. Supongamos que 9999 de 10000 votantes eligen el ranking $x_3 > x_1 > x_2$, mientras que el restante opina que $x_2 > x_1 > x_3$. Uno pensaría que el ranking social obtenido es $x_3 > x_1 > x_2$, y por lo tanto $x_1 > x_2$ pues es claramente lo que la mayoría prefiere. Sin embargo, el método de pluralidad nos dice que $x_3 > x_2 > x_1$.

Esta característica del método de pluralidad es ciertamente poco deseable. Cuando $s = 0$, el método posicional muestra la mayor resistencia a coincidir con el método de la mayoría por pares. No sólo eso, sino que el valor de $d^* = 1$ no llega a asegurar completamente que x_1 será preferida sobre x_2 , ya que hay casos donde a pesar del voto unánime, el método de pluralidad indica indiferencia entre las dos alternativas.

2.3.4. Los métodos posicionales restantes frente a la mayoría

Como vimos recién, el método de pluralidad no resulta un método posicional eficiente a la hora de conciliar sus resultados con las preferencias de la mayoría. Ahora analizaremos el resto de los métodos posicionales en pos de encontrar, de existir, alguno que sea la óptima elección en caso de desear una concordancia con el método de la mayoría por pares.

Comencemos con el método de antipluralidad, es decir, W_s con $s = \frac{1}{2}$. La geometría de la imagen para tal método es muy similar a la del método de pluralidad ya que se trata de un triángulo, pero en este caso invertido. Bajo un razonamiento completamente análogo al realizado para $s = 0$, arribamos a la conclusión de que $d^* = 1$ para el método de antipluralidad.

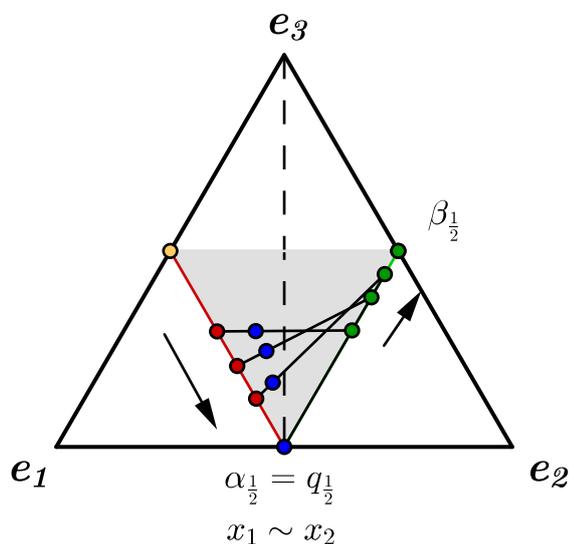


Figura 2.17: Para mantenerse a la izquierda de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ a medida que la pendiente aumenta, el valor de d se hace mayor.

Observemos un ejemplo similar al analizado para el método de pluralidad. Supongamos que 9999 de 10000 votantes poseen el ranking $x_2 > x_1 > x_3$, mientras que el restante opina que $x_3 > x_1 > x_2$. Por mayoría, el ranking social es $x_2 > x_1 > x_3$ mientras que el método de antipluralidad indica el ranking $x_1 > x_2 > x_3$. Al igual que con el método de pluralidad, la casi unanimidad no alcanza para asegurar la concordancia entre el método de la mayoría por pares y el de antipluralidad.

Ya resueltos los casos de pluralidad y antipluralidad, ahora procedamos a ver el resto de W_s , $0 < s < \frac{1}{2}$. A diferencia de los dos métodos anteriores, W_s^1 y W_s^2 son objetos de dos dimensiones, por lo tanto, el movimiento de los α_s y β_s ya no se ven limitados a movimientos verticales sobre los bordes de un triángulo, sino que también pueden moverse en dirección horizontal.

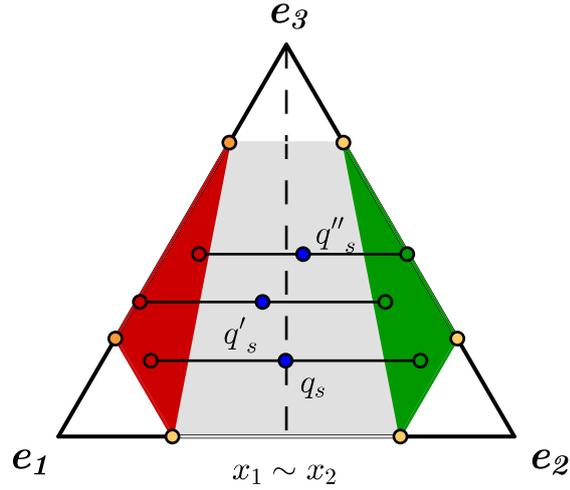


Figura 2.18: Para α_s y β_s a la misma altura, $d = \frac{1}{2}$ no asegura el ranking $x_1 \sim x_2$

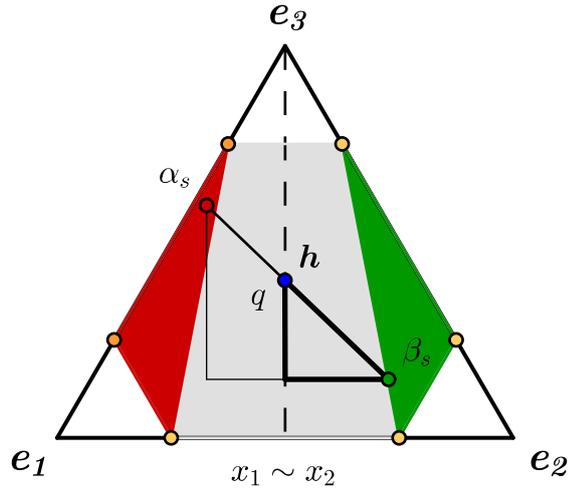
Esta nueva dimensión trae consigo un pequeño inconveniente. Como muestra la imagen, si $d = \frac{1}{2}$ y α_s y β_s están a la misma altura, ya no podemos afirmar que el punto q_s se encuentre sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$. Afortunadamente, las propiedades de triángulos similares nos permiten deducir el valor necesario que debe tener d para ubicarse sobre dicha línea.

Proposición 2.1. Sea $q \in Si(3)$, $\rho(q)$ la distancia de q a la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$, y $q_s = f(p, W_s) = d\alpha_s + (1 - d)\beta_s$, entonces para

$$d = \frac{\rho(\beta_s)}{\rho(\alpha_s) + \rho(\beta_s)}$$

q_s se encuentra sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$.

Demostración. Sean α_s y β_s , como ambos se encuentran en W_s^1 y W_s^2 respectivamente, entonces el segmento que los une corta a la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ en un punto q , el cual se encuentra a d de la distancia de tal segmento de β_s . Tracemos ahora la línea que pasa por α_s y es paralela a la línea $x_1 \sim x_2$, y por otro lado, tracemos la recta que pasa por β_s y es perpendicular a la línea de indiferencia.



Observemos que quedan definidos 2 triángulos similares. El triángulo más grande tiene como hipotenusa al segmento que une α_s con β_s y tiene un largo h , y como base un segmento de largo $\rho(\alpha_s) + \rho(\beta_s)$. A su vez, el triángulo más pequeño tiene de hipotenusa al segmento que va de β_s a q , el cual por definición tiene un largo de dh , y de base un segmento de largo $\rho(\beta_s)$. Por propiedades de triángulos similares vale

$$\begin{aligned} \frac{h}{\rho(\alpha_s) + \rho(\beta_s)} &= \frac{dh}{\rho(\beta_s)} \\ \frac{dh}{h} &= \frac{\rho(\beta_s)}{\rho(\alpha_s) + \rho(\beta_s)} \\ d &= \frac{\rho(\beta_s)}{\rho(\alpha_s) + \rho(\beta_s)} \end{aligned}$$

Observar que si $\rho(\alpha_s) = \rho(\beta_s)$ entonces $d = \frac{1}{2}$. □

Ahora queremos buscar el valor de d^* para cada W_s , $0 < s < \frac{1}{2}$. Al igual que lo realizado para los métodos de pluralidad y antipluralidad, analizaremos el caso extremo, es decir, aquel donde la pendiente del segmento que une α_s con β_s sea mayor y buscaremos el valor d^* tal que q_s se encuentre sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$, pues para cualquier $d > d^*$ nos aseguramos que W_s y el método de la mayoría por pares coincidirán en $x_1 > x_2$.

El caso donde la pendiente es mayor, como ya hemos dicho, es aquel en el que α_s se encuentra más cerca de la línea de indiferencia, mientras que β_s se encuentra más lejos. Para todo s , el punto más lejano a la línea de indiferencia en W_s^2 es $f(E_5, W_s)$, por lo tanto colocaremos a β_s allí. Por otro lado, si $s < \frac{1}{3}$, el punto más cercano en W_s^1 es $f(E_3, W_s)$, mientras que si $s > \frac{1}{3}$, $f(E_1, W_s)$ lo es. Por lo tanto α_s dependerá del valor de s , con $s = \frac{1}{3}$, es decir la Cuenta de Borda, sirviendo de pivot.

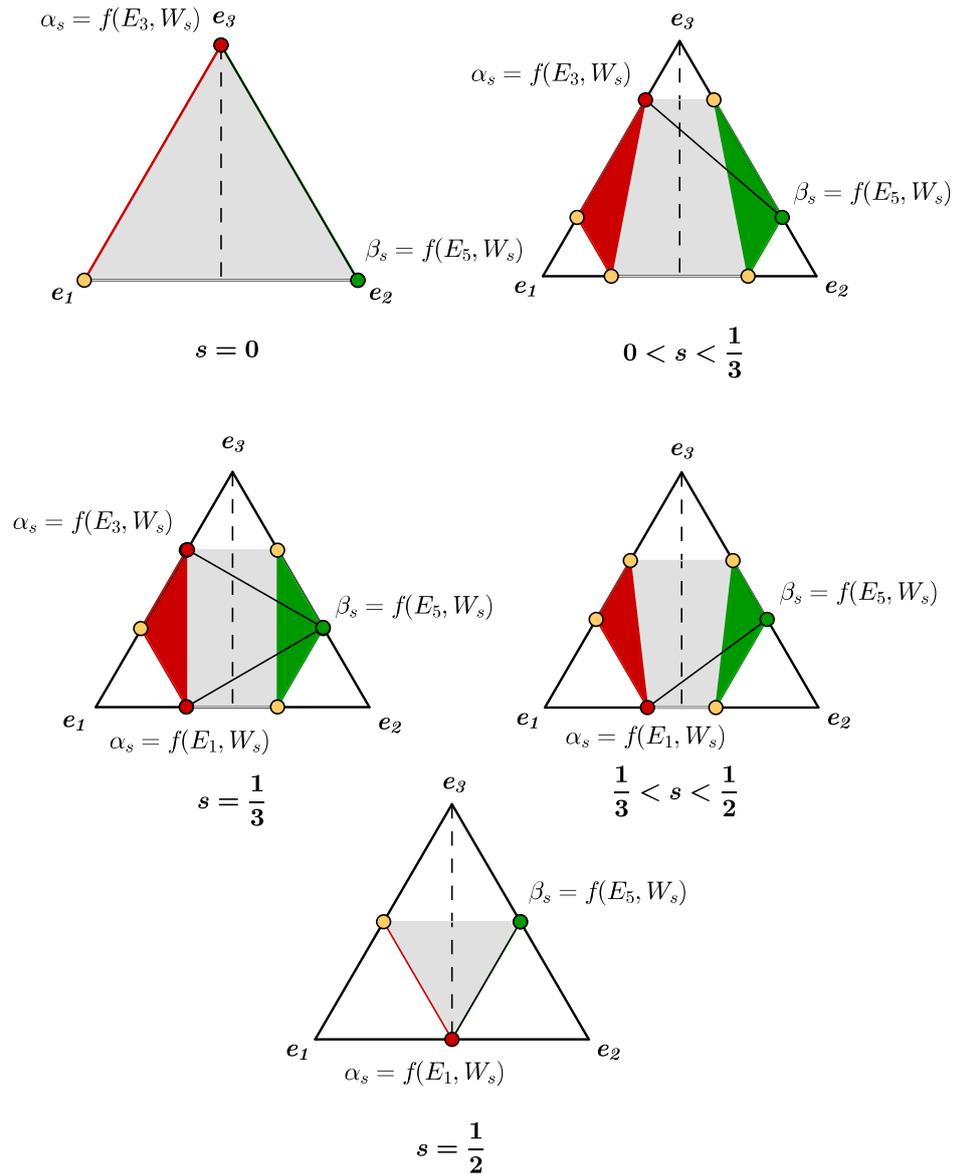


Figura 2.19: Las rectas para determinar d^* para cada s

Bajo este razonamiento arribamos al siguiente teorema.

Teorema 2.5. El valor de d^* es

$$d^* = \begin{cases} 1 - s & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1-s}{2-3s} & \text{si } \frac{1}{3} \leq s \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Demostración.

$$0 \leq s \leq \frac{1}{3}$$

Como ya dijimos, en este caso $\alpha_s = f(E_3, W_s) = (s, 0, 1 - s)$ y $\beta_s = f(E_5, W_s) = (0, 1 - s, s)$. Ahora busquemos las distancias de estos dos puntos a la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$. En ambos casos, el punto más cercano sobre la línea es aquel que se encuentra a la misma altura, es decir, $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2}, 1 - s)$ y $(\frac{1-s}{2}, \frac{1-s}{2}, s)$ respectivamente. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_s) &= \rho((s, 0, 1 - s)) = \sqrt{(s - \frac{s}{2})^2 + (0 - \frac{s}{2})^2 + ((1 - s) - (1 - s))^2} \\ &= \sqrt{(\frac{s}{2})^2 + (\frac{s}{2})^2} = \sqrt{2} \frac{s}{2} \\ \rho(\beta_s) &= \rho((0, 1 - s, s)) = \sqrt{(0 - \frac{1-s}{2})^2 + ((1 - s) - \frac{1-s}{2})^2 + (s - s)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{1-s}{2})^2 + (\frac{1-s}{2})^2} = \sqrt{2} \frac{1-s}{2} \end{aligned}$$

Por la Proposición 2.1,

$$d^* = \frac{\sqrt{2} \frac{1-s}{2}}{\sqrt{2} \frac{1-s}{2} + \sqrt{2} \frac{s}{2}} = 1 - s$$

$$\frac{1}{3} \leq s \leq 1$$

En este caso β_s tiene el mismo valor que en el caso anterior mientras que $\alpha_s = f(E_1, W_s) = (1 - s, s, 0)$ y $\rho(\alpha_s)$ viene dada por el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha_s) &= \rho((1 - s, s, 0)) = \sqrt{((1 - s) - \frac{1}{2})^2 + (s - \frac{1}{2})^2 + (0 - 0)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{1}{2} - s)^2 + (s - \frac{1}{2})^2} = \sqrt{2} \frac{1 - 2s}{2} \end{aligned}$$

Nuevamente por la Proposición 2.1 obtenemos,

$$d^* = \frac{\sqrt{2} \frac{1-s}{2}}{\sqrt{2} \frac{1-s}{2} + \sqrt{2} \frac{1-2s}{2}} = \frac{1 - s}{2 - 3s}$$

□

El Teorema 2.5 es fundamental en nuestra búsqueda de un método posicional óptimo a la hora de coincidir con el resultado del método de la mayoría por pares.

Por un lado nos expresa una falencia común a todos los métodos posicionales. Dado que el valor mínimo de d^* es $\frac{2}{3}$, para todo método posicional, existe un perfil tal que, por más que x_1 sea preferido a x_2 por el 65 % de los votantes, éste aún puede ser superado por x_2 .

Pero por otro lado, $d = \frac{2}{3}$ corresponde a $s = \frac{1}{3}$. Entonces el teorema nos dice que si x_1 vence a x_2 por $\frac{2}{3}$ de los votos, en el peor de los casos empatará para la Cuenta de Borda. Esto quiere decir que la Cuenta de Borda es el método posicional que impone las condiciones más leves para coincidir con el método de la mayoría por pares.

2.3.5. ¿Un posible ganador?

Iniciamos este capítulo con el objetivo de realizar un análisis de los métodos de elección posicionales. Mediante el uso de la geometría como principal herramienta, pudimos imaginar, y en algunos casos hasta visualizar, el conjunto de perfiles, y la imagen para cada método posicional.

También vimos cómo cualquier método posicional podía expresarse en función de los métodos de pluralidad y antipluralidad mediante la recta de procedimientos. Dado que el valor s es un indicador de la importancia que un método deposita en la segunda elección de los votantes, podemos ver a los métodos posicionales como un promedio ponderado entre la total ignorancia de la segunda elección que expresa el método de pluralidad, y la excesiva importancia que asigna el método de antipluralidad. Entre todos estos métodos, pudimos visualizar a la Cuenta de Borda como el que asigna un peso equilibrado a las distintas posiciones que ocupan las alternativas. Este fue nuestro primer indicador que la Cuenta de Borda y su valor de $s = \frac{1}{3}$, sobresalía sobre los demás métodos y se posicionaba como un candidato a ser el método posicional óptimo.

Finalmente planteamos un desafío para los métodos posicionales. Introdujimos el Método de la mayoría por pares, el cual representa las preferencias de la mayoría, pero como vimos en el Capítulo 1, puede dar lugar a un resultado cíclico. Dado que el Método de la mayoría por pares analiza las preferencias de a pares de alternativas, identificamos como deseable que los métodos posicionales coincidan con lo que la mayoría prefiere al analizar un par de alternativas.

Mediante nuestro análisis encontramos que ningún método posicional coincide en el 100 % de los casos con el Método de la mayoría por pares, siendo los métodos de pluralidad y antipluralidad los máximos exponentes, ya que existen casos donde la alternativa x_1 puede ser preferida a la alternativa x_2 por decisión casi unánime y sin embargo el método arrojará el resultado contrario.

Esto no es más que una consecuencia directa del hecho de que los métodos posicionales no cumplen con la condición de IAI enunciada por Arrow. Cuando analizamos solo el par x_1, x_2 , los métodos posicionales y el Método de la mayoría por pares son totalmente equivalentes. Al ingresar una 3ra alternativa, x_3 , los métodos se diferencian ya que para un método posicional $x_3 > x_1 > x_2$ no es igual que $x_1 > x_3 > x_2$ ya que las posiciones son relevantes, mientras que para el Método de la mayoría por pares sí son indiferentes, pues éste ignora la intensidad con la que se prefiere x_1 sobre x_2 .

Sin embargo, también notamos que a medida que el valor de s se acerca a $\frac{1}{3}$, la exigencia sobre el margen mínimo con el cual x_1 debe vencer a x_2 para que los métodos coincidan, disminuye y toma su valor mínimo de $\frac{2}{3}$ con la Cuenta de Borda. Es decir, si x_1 vence a x_2 por $\frac{2}{3}$ de los votos, entonces para todos los métodos puede suceder que el resultado sea $x_2 > x_1$, salvo para la Cuenta de Borda donde, en el peor de los casos, x_1 será indiferente a x_2 .

Por lo tanto, hemos establecido que la Cuenta de Borda no sólo asigna un puntaje equilibrado a cada posición, sino que también es el método que menos exige a los perfiles para poder coincidir con las preferencias de la mayoría, y por lo tanto, con el Método de la mayoría por pares. Claramente, la Cuenta de Borda comienza a perfilarse como el ganador entre los métodos de elección posicionales.

Capítulo 3

La Cuenta de Borda

En el capítulo anterior, desarrollamos una construcción geométrica de los métodos de elección posicionales para finalmente proponer un desafío a estos métodos ¿Con qué frecuencia los métodos posicionales coinciden con los deseos de la mayoría?

Gracias a la geometría, arribamos a la conclusión de que la Cuenta de Borda es el método que mayor margen de concordancia presenta. De esta forma, perfilamos a la Cuenta de Borda como un posible método óptimo entre los métodos posicionales.

En este último capítulo, analizaremos otras propiedades que destacan a la Cuenta de Borda por sobre el resto de los métodos de elección posicionales y que sumarán argumentos a nuestra conclusión anterior.

3.1. Neutralidad

La propiedad de neutralidad dice que el resultado de una elección no depende de los nombres de las alternativas, es decir, que el método es totalmente imparcial frente a los candidatos. Ciertamente esta es una propiedad que uno encuentra deseable para el método de elección a utilizar. Veamos entonces si los métodos de elección posicionales, y en particular la Cuenta de Borda, satisfacen dicha propiedad.

Que un método cumpla con la propiedad de neutralidad dice que si, por ejemplo, los votantes confunden a la alternativa x_1 con x_2 , es decir, estas dos alternativas intercambian posiciones en los rankings individuales, entonces también lo harán en el ranking social.

La permutación $x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1$ puede ser representada por $\sigma = (1, 2, 1)$ lo cual indica que la alternativa x_1 ocupa el lugar de x_2 y la alternativa x_2 el de x_1 . De forma más simple, podemos utilizar también $\sigma = (1, 2)$, donde la última alternativa pasa a ocupar el lugar de la primera. De esta forma, la permutación $x_1 \rightarrow x_3, x_3 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1$ es representada por $\sigma = (1, 3, 2)$.

Es interesante observar las propiedades combinatorias de las permutaciones de alternativas. Por ejemplo, sea $\sigma = (1, 3, 2)$, observemos qué sucede al aplicar dicha permutación dos veces, es decir $\sigma\sigma = \sigma^2 = (1, 3, 2)(1, 3, 2)$. La alternativa x_1 cambia a x_3 en la primera ronda mientras que luego pasa a x_2 en la segunda, con lo cual $(1, 2)$. De la misma manera observamos que $(2, 3)$ y $(3, 1)$, por lo tanto $\sigma^2 = (1, 2, 3)$.

También es importante observar el caso en el que luego de aplicar una permutación σ , deseamos volver a la configuración original. Para ello debemos definir σ^{-1} tal que $\sigma\sigma^{-1} = (1)$. Si la permutación involucra solo dos alternativas, por ejemplo $\sigma = (1, 2)$, con sólo aplicar la misma permutación invertiremos el efecto de σ , por lo tanto $\sigma^{-1} = \sigma$. Por otro lado, si la permutación involucra a las 3 alternativas, es decir $(1, 2, 3)$ o $(1, 3, 2)$, entonces es suficiente aplicar 2 veces más la misma permutación para volver a la configuración inicial, con lo que $\sigma^{-1} = \sigma^2$.

Estas conclusiones respecto a σ^{-1} son aún más fáciles de deducir cuando se observa el efecto geométrico que posee una permutación. Para ello tomemos un punto q en la región 1 del triángulo de representación. Al aplicar la permutación $\sigma = (1, 2)$, obtenemos el punto q' al lado opuesto de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$, es decir, en la región 6.

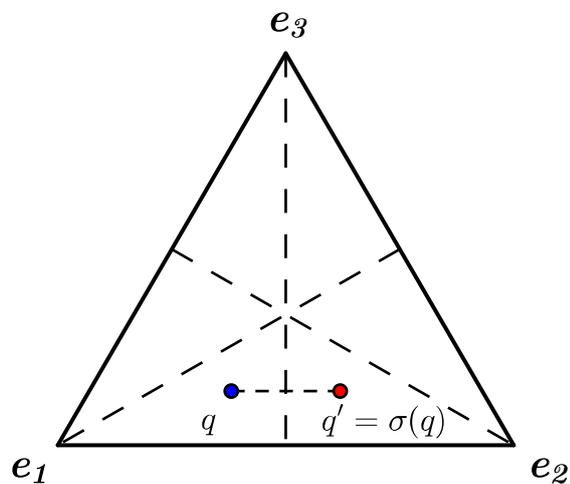


Figura 3.1: Reflexión del punto q sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$ mediante la acción de $\sigma = (1, 2)$

Como se puede observar, una permutación entre 2 alternativas equivale geométricamente a una reflexión sobre la línea de indiferencia correspondiente. Bajo este razonamiento, es evidente que para volver a la configuración original no debemos hacer más que reflejar q' sobre la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$, es decir, aplicar nuevamente $\sigma = (1, 2)$.

Tomemos nuevamente el punto q pero ahora apliquemos una permutación que involucre a las 3 alternativas, como puede ser $\sigma = (1, 3, 2)$. A diferencia de las permutaciones entre sólo 2 alternativas, en este caso σ se manifiesta como una rotación de 120° en sentido horario sobre el centro I .

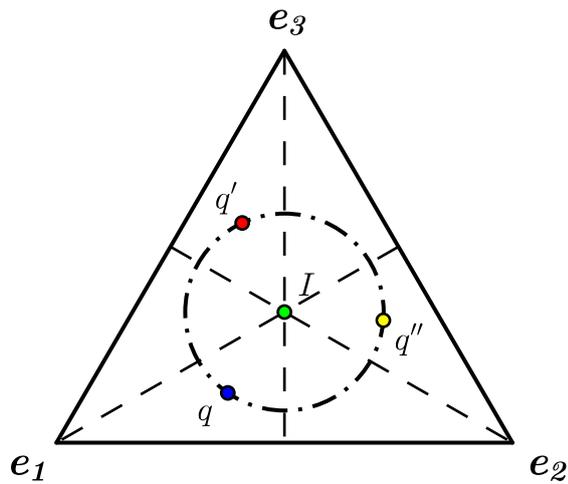


Figura 3.2: Rotación horaria de 120° del punto q sobre el centro I mediante la acción de $\sigma = (1, 3, 2)$

Como se puede observar en la imagen, al aplicar σ , q' se posiciona en la región 3 del triángulo. De aplicar σ nuevamente, obtendríamos el punto q'' en la región 5 del triángulo. Finalmente si repetimos una vez más el proceso, volveremos a obtener q . De haber estado ubicado el punto q en una región par, entonces éste habría rotado entre las regiones 2, 4 y 6.

Si en vez de utilizar $(1, 3, 2)$ hubiésemos utilizado $(1, 2, 3)$, entonces la rotación hubiese sido en el sentido antihorario.

Bajo este mismo razonamiento, podemos ver cómo se transforman las regiones bajo todo tipo de permutación σ .

σ	$\sigma(R)$
(1)	(1)
(1,2)	(1,6)(2,5)(3,4)
(1,3)	(1,4)(2,3)(5,6)
(2,3)	(1,2)(3,6)(4,5)
(1,2,3)	(1,5,3)(2,6,4)
(1,3,2)	(1,3,5)(2,4,6)

Ya desarrollada la noción de permutaciones entre alternativas, ahora podemos proceder a definir neutralidad.

Definición 3.1. Sea f un método de elección, entonces decimos que f es neutro si para toda permutación entre alternativas σ y para todo perfil p vale

$$f(\sigma(p)) = \sigma(f(p))$$

Teorema 3.1. Los métodos de elección posicionales cumplen con la propiedad de neutralidad, es decir,

$$f(\sigma(p), W_s) = \sigma(f(p), W_s)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} f(\sigma(p), W_s) &= f\left(\sigma\left(\sum_{j=1}^6 p_j E_j\right), W_s\right) = f\left(\sum_{j=1}^6 p_j \sigma(E_j), W_s\right) \\ &= \sum_{j=1}^6 p_j f(\sigma(E_j), W_s) = \sum_{j=1}^6 p_j \sigma([W]_j) \\ &= \sigma\left(\sum_{j=1}^6 p_j [W]_j\right) = \sigma(f(p, W_s)) \end{aligned}$$

□

Veamos un ejemplo. Sea $\sigma = (2, 3)$, $p = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ y $W_s = W_{\frac{1}{3}}$. Entonces, si observamos la tabla anterior, σ cambia los votantes de tipo 1 con 2, 3 con 6 y 4 con 5, por lo tanto, $\sigma(p) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$. Veamos qué sucede al aplicar la Cuenta de Borda a p y $\sigma(p)$.

$$\begin{aligned} f(p, W_{\frac{1}{3}}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right) \\ f(\sigma(p), W_{\frac{1}{3}}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0 \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto, } \sigma(f(p, W_{\frac{1}{3}})) = f(\sigma(p), W_{\frac{1}{3}}).$$

Como podemos observar, la propiedad de neutralidad no es propia de la Cuenta de Borda, sino que es compartida por todos los métodos de elección posicionales. Si bien no es una propiedad que destaca a la Cuenta de Borda sobre el resto de los métodos posicionales, ciertamente es reconfortante saber que dichos métodos se mantienen imparciales frente a una elección.

A continuación analizaremos otra propiedad que brindará un carácter de superneutralidad a la Cuenta de Borda que la diferenciará de los restantes métodos posicionales.

3.2. Invertibilidad

Una extensión natural de la propiedad de neutralidad es la de invertibilidad. Esto quiere decir que si todos los votantes invierten sus preferencias, por ejemplo los votantes del tipo $x_1 > x_2 > x_3$ ahora votan $x_3 > x_2 > x_1$, entonces es esperable que el resultado de la elección se muestre invertido también.

Definición 3.2. Sea el perfil $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)$, entonces p^r es el *perfil inverso* y $p^r = (p_4, p_5, p_6, p_1, p_2, p_3)$.

La inversión es geoméricamente equivalente a una rotación de 180° respecto del centro I . Por lo tanto, si invertimos el punto q en el triángulo de representación, entonces q^r es aquel punto sobre la recta que une a q con I , y que se encuentra a la misma distancia de I que q ($|I - q| = |I - q^r|$). El inverso de una región R es la región diametralmente opuesta, R^r y el inverso de un ranking es aquel correspondiente a la región inversa.

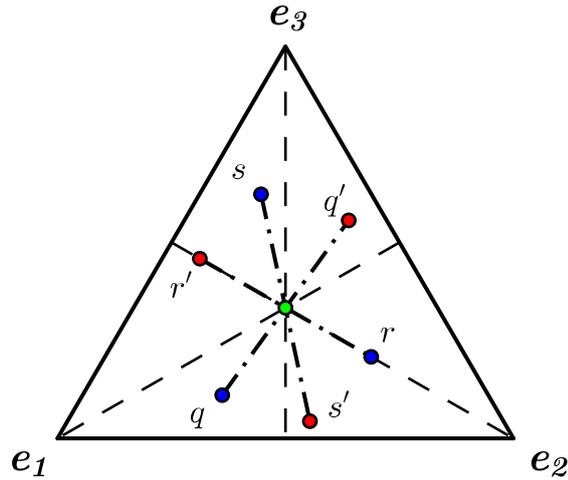


Figura 3.3: Los puntos q, r y s junto a sus respectivos inversos

Una inversión genera una permutación $(1, 4)(2, 5)(3, 6)$, que no puede ser obtenida mediante permutaciones en los nombres de las alternativas, pues no se encuentra presente en la tabla expuesta en la Sección 3.1. Por lo tanto, si bien nos podemos encontrar tentados a decir que todos los métodos posicionales deberían cumplir invertibilidad pues cumplen con neutralidad, esto no es así.

Tomemos el siguiente ejemplo. Sea el perfil $p = (\frac{3}{10}, 0, 0, 0, \frac{3}{5}, \frac{1}{10})$, entonces $p^r = (0, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, 0, 0)$. Tomemos el método de pluralidad W_0 , entonces

$$f(p, W_0) = \frac{3}{10} (1, 0, 0) + \frac{3}{5} (0, 1, 0) + \frac{1}{10} (0, 1, 0) = \left(\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, 0 \right)$$

Ciertamente, uno esperaría que de invertir sus preferencias los votantes, entonces el resultado de la elección se invertirá también. En este caso, la inversión debería favorecer a x_3 , sin embargo esto no es así.

$$f(p^r, W_0) = \frac{3}{5} (1, 0, 0) + \frac{1}{10} (0, 0, 1) + \frac{3}{10} (0, 0, 1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0 \right)$$

Como podemos observar, el método de pluralidad no cumple con la propiedad de invertibilidad ya que x_3 sigue siendo el candidato en último lugar a pesar de la inversión de las preferencias individuales.

Este ejemplo nos muestra que no todos los métodos posicionales cumplen con la propiedad de invertibilidad. Nuestro objetivo durante lo que resta de esta sección será demostrar que la Cuenta de Borda es el único método posicional que la cumple. Para ello, primero analizaremos el inverso de un vector de votación.

Definición 3.3. Seas W_s un vector de votación, entonces su inverso es

$$W_s^r = \left(\frac{1-s}{2-3s}, \frac{1-2s}{2-3s}, 0 \right)$$

Teorema 3.2.

(a) En el triángulo de representación $Si(3)$, considerar la línea que pasa por $[W]_1$ e I . Esta línea interseca a la frontera de $Si(3)$ en $[W^r]_4$.

(b) $(W_s^r)^r = W_s \forall W_s$.

(c) $W_s = W_s^r \iff s = \frac{1}{3}$

Demostración.

(a) Sean $[W]_1$ e I , entonces la recta que pasa por ellos está definida por $L = t[W]_1 + (1-t)I$. Queremos ver que el punto $[W^r]_4$ se encuentra sobre la recta L .

$$\begin{aligned} t[W]_1 + (1-t)I &= [W^r]_4 \\ t(1-s, s, 0) + (1-t)\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) &= \left(0, \frac{1-2s}{2-3s}, \frac{1-s}{2-3s}\right) \\ \left(t\left(\frac{2}{3}-s\right) + \frac{1}{3}, t\left(s-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{3}t\right) &= \left(0, \frac{1-2s}{2-3s}, \frac{1-s}{2-3s}\right) \\ \iff t &= -\frac{1}{2-3s} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $[W^r]_4$ se encuentra sobre la recta que une $[W]_1$ con I .

(b) Sea W_s , entonces $W_s^r = W_{s'} = (1-s', s', 0)$ para $s' = \frac{1-2s}{2-3s}$. Busquemos entonces el inverso de $W_{s'}$.

$$\begin{aligned} (W_s^r)^r &= (W_{s'})^r = \left(\frac{1-s'}{2-3s'}, \frac{1-2s'}{2-3s'}, 0\right) \\ &= \left(\frac{1-\left(\frac{1-2s}{2-3s}\right)}{2-3\left(\frac{1-2s}{2-3s}\right)}, \frac{1-2\left(\frac{1-2s}{2-3s}\right)}{2-3\left(\frac{1-2s}{2-3s}\right)}, 0\right) \\ &= (1-s, s, 0) = W_s \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} W_s = W_s^r &\iff (1-s, s, 0) = \left(\frac{1-s}{2-3s}, \frac{1-2s}{2-3s}, 0\right) \\ &\iff s = \frac{1-2s}{2-3s} \iff -3s^2 + 4s - 1 = 0 \\ &\iff s = \frac{1}{3} \vee s = 1 \end{aligned}$$

Como $s = 1$ no es un valor válido de s , $W_s = W_s^r \iff s = \frac{1}{3}$.

□

La parte (a) del teorema nos ayuda a encontrar geoméricamente la imagen de W_s^r sabida la imagen de W_s , pues lo mismo se puede afirmar para el resto de los $[W]_j$ con el respectivo $[W^r]_{j+3}$.

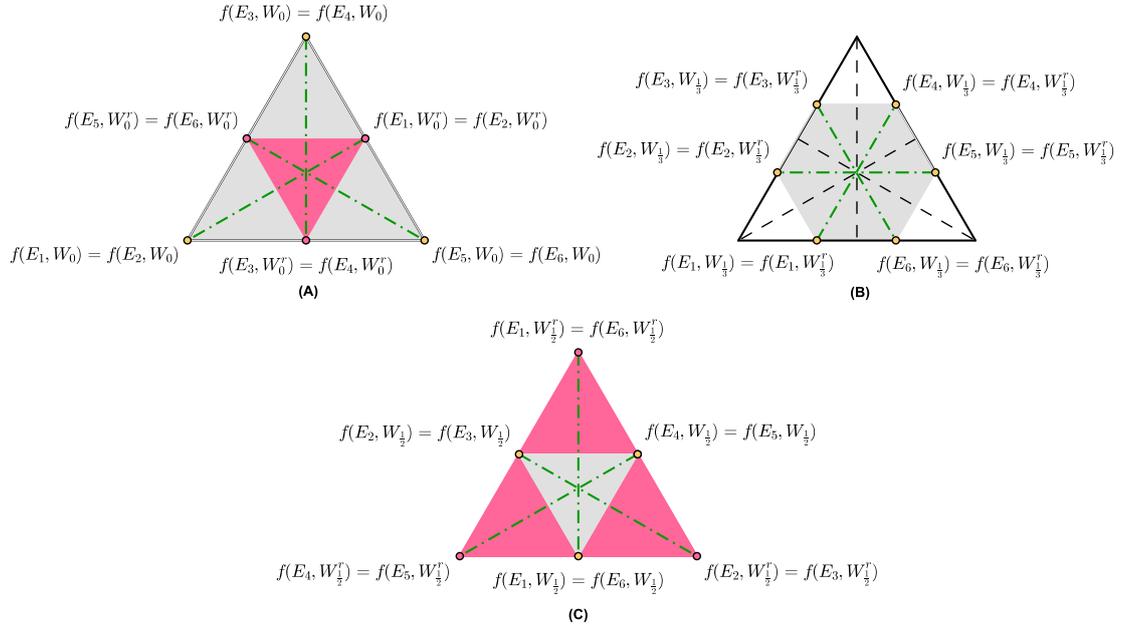


Figura 3.4: (A) El método de pluralidad y su inverso, el método de antipluralidad. (B) La Cuenta de Borda es su propio inverso (C) El método de antipluralidad y su inverso, el método de pluralidad

De esta forma, la Cuenta de Borda es nuevamente un punto de pivot entre los métodos posicionales, siendo él su propio inverso. Las figuras confirman la intuición de que el método de pluralidad es el inverso del método de antipluralidad y viceversa.

Ahora veamos qué relación existe entre p , p^r , W_s y W_s^r .

Teorema 3.3. *Sea p un perfil y W_s , entonces*

$$f(p^r, W_s^r) = t f(p, W_s) + (1 - t)I, \quad t = -\frac{1}{2 - 3s}$$

Demostración. Por el Teorema 3.2 sabemos que $[W^r]_4$ se encuentra en la recta definida por $[W]_1$ e I y por lo tanto,

$$[W^r]_4 = (1 - t)I + t[W]_1, \quad t = -\frac{1}{2 - 3s}$$

De la misma manera podemos proceder con el resto de los $[W]_j$, arribando a la ecuación general

$$[W^r]_{j+3} = (1-t)I + t[W]_j, \quad t = -\frac{1}{2-3s}$$

donde $[W]_{j+3} = [W]_{j-3}$ para $j = 4, 5, 6$.

Si $p^r = (p_1^r, \dots, p_6^r)$ entonces $p_{j+3}^r = p_j$, donde $p_{j+3}^r = p_{j-3}^r$ para $j = 4, 5, 6$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(p^r, W_s^r) &= \sum_{j=1}^6 p_{j+3}^r [W^r]_{j+3} = \sum_{j=1}^6 p_j [W^r]_{j+3} \\ &= \sum_{j=1}^6 p_j \{(1-t)I + t[W]_j\} \\ &= \sum_{j=1}^6 p_j (1-t)I + \sum_{j=1}^6 p_j t [W]_j \\ &= (1-t)I \sum_{j=1}^6 p_j + t \sum_{j=1}^6 p_j [W]_j \\ &= (1-t)I + t f(p, W_s), \quad t = -\frac{1}{2-3s} \end{aligned}$$

□

Este teorema relaciona los resultados de W_s con W_s^r . Más importante aún es que el ranking de $f(p^r, W_s^r)$ es igual al del inverso de $f(p, W_s)$. Esto se debe a que ambos se encuentran sobre la recta que une $f(p, W_s)$ con I , y por lo tanto, en la misma región del triángulo de elección.

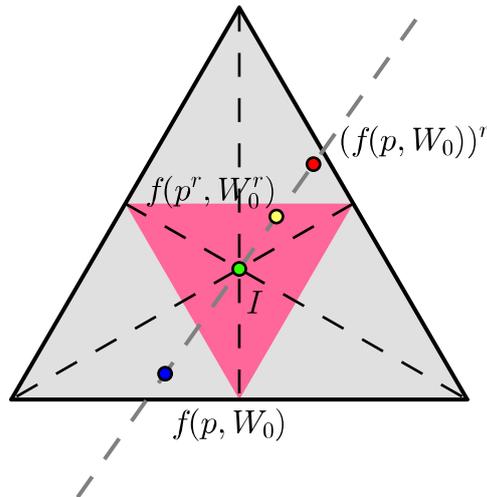


Figura 3.5: $f(p^r, W_0^r) = f(p^r, W_{\frac{1}{2}})$ se encuentra en la misma región que el inverso de $f(p, W_0)$

Más importante aún, y la principal razón de este desarrollo, es observar qué sucede cuando $s = \frac{1}{3}$.

Corolario 3.1. *Para la Cuenta de Borda, los resultados normalizados satisfacen*

$$f(p^r, W_{\frac{1}{3}}) = (f(p, W_{\frac{1}{3}}))^r$$

Para cualquier otra elección de W_s , existen perfiles p para los cuales la ecuación no se cumple.

Demostración. Si $s = \frac{1}{3}$, entonces $W_s = W_s^r$ y $t = -1$. Al ser $t = -1$, $tf(p, W_{\frac{1}{3}}) + (1 - t)I$ es el inverso de $f(p, W_{\frac{1}{3}})$ pues se encuentra a la misma distancia de I . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f(p^r, W_s^r) &= tf(p, W_s) + (1 - t)I \\ f(p^r, W_{\frac{1}{3}}) &= (f(p, W_{\frac{1}{3}}))^r \end{aligned}$$

Para $s \neq \frac{1}{3}$, tomemos el siguiente perfil $p = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$. Observemos que $p = p^r$. Supongamos que W_s cumple con la ecuación del teorema, entonces

$$\begin{aligned} f(p^r, W_s) &= (f(p, W_s))^r \\ f(p, W_s) &= (f(p, W_s))^r \end{aligned}$$

Esto es verdadero si y solo si $f(p, W_s) = I$, es decir, si el ranking es $x_1 \sim x_2 \sim x_3$. Observemos a continuación los resultados de la elección para los distintos valores de s

$$f(p, W_s) = \begin{cases} x_1 \sim x_3 > x_2 & \text{si } s \in [0, \frac{1}{3}) \\ x_1 \sim x_2 \sim x_3 & \text{si } s = \frac{1}{3} \\ x_2 > x_1 \sim x_3 & \text{si } s \in (\frac{1}{3}, 1] \end{cases}$$

Como los rankings para $s \neq \frac{1}{3}$ son distintos a $x_1 \sim x_2 \sim x_3$, entonces W_s no cumple con la ecuación. \square

Por lo tanto, la Cuenta de Borda demuestra ser el único método posicional que cumple con la propiedad de invertibilidad. Esta propiedad sumada a la propiedad de neutralidad que gozan todos los métodos posicionales, dotan a la Cuenta de Borda con una calidad de superneutralidad y nuevamente la posicionan por encima de los métodos de elección posicionales restantes.

3.3. Método de Pares Agregados

El método de la mayoría es uno de los métodos más utilizados debido a su practicidad y simpleza. Sin embargo, como hemos visto en la Subsección 1.2.1, dicho método sufre una falla muy grande, la posibilidad de obtener ciclos como resultado de la elección, es decir, el no cumplimiento de la propiedad de transitividad.

Este problema que presenta el método de la mayoría es consecuencia de la omisión de la intensidad con la cuál se prefiere a una alternativa sobre otra. Es decir, si uno analiza la cantidad de votantes que prefieren x_1 sobre x_2 , el método no distingue entre aquellos casos donde la preferencia es leve, como $x_1 > x_2 > x_3$ y $x_3 > x_1 > x_2$, de aquellos casos donde la preferencia es intensa, como lo es en $x_1 > x_3 > x_2$. El método realiza un análisis unidimensional de las preferencias, ignorando una dimensión muy importante que es la intensidad.

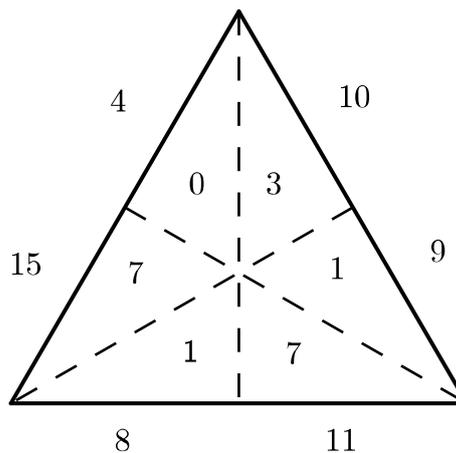
A continuación presentaremos una variante de tal método, a la que denominaremos *Método de Pares Agregados*, que incluirá esta dimensión adicional, y por lo tanto resolverá la existencia de ciclos.

Definición 3.4. Para $\{x_i, x_j\}$, sea $q_{i,j}$ la fracción de votantes que prefieren x_i sobre x_j . El Método de Pares Agregados es aquel donde $\sum_{j \neq i} q_{i,j}$ puntos son asignados a x_i y los candidatos son rankeados de acuerdo a éstos.

Observemos el siguiente ejemplo para comprender mejor como funciona este nuevo método. Tomemos el siguiente perfil:

Votantes	Ranking
1	$x_1 > x_2 > x_3$
7	$x_1 > x_3 > x_2$
3	$x_3 > x_2 > x_1$
1	$x_2 > x_3 > x_1$
7	$x_2 > x_1 > x_3$

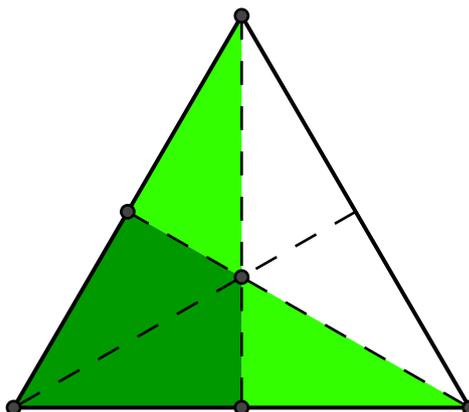
Plasmemos estos resultados en el triángulo de representación



Como se puede observar, en este caso el método de la mayoría nos devuelve un ciclo, pues $x_2 > x_1$, $x_1 > x_3$ y $x_3 > x_2$.

Tomemos ahora el Método de Pares Agregados. Para ello, debemos sumar los puntos recibidos por cada alternativa en cada comparación de a pares. De esta forma, x_1 recibe 23 puntos (8+15), x_2 recibe 20 (11+9) y finalmente x_3 recibe 14 (10+4), con lo que el ranking es $x_1 > x_2 > x_3$ y el ciclo se ha evitado.

Para ver cómo el método sí toma en consideración la intensidad de las preferencias, veamos qué sucede con la alternativa x_1 .



Cuando queremos analizar x_1 contra x_2 , x_1 recibe la suma de los términos que se encuentran a la izquierda de la línea de indiferencia $x_1 \sim x_2$. Por otro lado, cuando lo comparamos con x_3 , x_1 recibe la suma de los términos por debajo de la línea $x_1 \sim x_3$.

Como se puede ver en la imagen, existen 2 regiones donde las sombras se superponen y por lo tanto la cantidad de votantes se cuenta dos veces. Estas regiones coinciden con aquellas donde x_1 se encuentra rankeado primero. Si continuamos, podemos ver que en aquellas regiones donde se encuentra rankeado segundo los votos se cuentan una sola vez y finalmente no hay puntos asignados en aquellas regiones donde se encuentra en la última posición.

En resumen, contar 2 veces los votos donde x_1 se encuentra en primer lugar, 1 vez donde se encuentre en el medio e ignorar aquellas ocasiones donde se encuentre en último lugar. Equivalentemente, para cada votante, asignar 2 puntos a la alternativa que se encuentre en primer lugar, 1 punto a la que se encuentre en segundo y ningún punto a la última ¡El Método de Pares Agregados es equivalente a la Cuenta de Borda!

Veamos nuevamente el ejemplo anterior. x_1 se encuentra en primer lugar 8 veces y en segundo lugar 7 veces, con lo que recibe 23 puntos. De forma análoga, x_2 recibe 20 puntos y x_3 14 puntos. Los resultados obtenidos son iguales a los del Método de Pares Agregados.

¿Por qué es importante esta equivalencia a la hora de diferenciar la Cuenta de Borda de los demás métodos posicionales? Para responder la pregunta, veamos el siguiente cuadro que compara el método de la mayoría con la Cuenta de Borda. Supongamos un votante con el ranking $x_1 > x_2 > x_3$

Método	Alternativas	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_3\}$
Mayoría	$\{x_1, x_2\}$	1	0	
Mayoría	$\{x_1, x_3\}$	1		0
Mayoría	$\{x_2, x_3\}$		1	0
Cuenta de Borda	$\{x_1, x_2, x_3\}$	2	1	0

La Cuenta de Borda es la versión agregada del método de la mayoría por pares para 2 alternativas. Ver a la Cuenta de Borda como el Método de Pares Agregados demuestra que, el método desarrollado por Borda y no cualquier otro método posicional, es la extensión natural para tres alternativas del método de la mayoría para dos alternativas.

Para finalizar esta sección, redefinamos a la Cuenta de Borda en función de los pares agregados.

$$f(p, W_{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \left(\sum_{j \neq 1} q_{1,j}, \sum_{j \neq 2} q_{2,j}, \sum_{j \neq 3} q_{3,j} \right)$$

3.4. Criterio de Condorcet

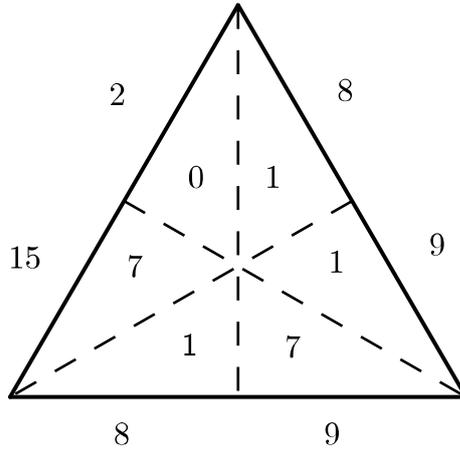
La última propiedad que analizaremos para la Cuenta de Borda tiene que ver con los ganadores y perdedores de Condorcet.

Definición 3.5. La alternativa x_k es un *Ganador de Condorcet* si resulta ganador de cada comparación de a pares con las restantes alternativas. Por otro lado, la alternativa x_j es un *Perdedor de Condorcet* si pierde cada una de las comparaciones de a pares.

Ciertamente es de esperar que si una alternativa gana frente a cada una de las alternativas restantes, el método de elección corone a tal como la ganadora. De forma análoga, el perdedor de Condorcet debería ocupar el último lugar. Cabe notar que un ganador o perdedor de Condorcet no necesariamente debe existir. Un método de elección que cumpla con estas dos propiedades se dice que cumple el *Criterio de Condorcet*, y por lo tanto, es un *Método de Condorcet*.

Por lo tanto ahora nos preguntamos ¿Será la Cuenta de Borda un Método de Condorcet? Afortunadamente, esta pregunta tiene una respuesta fácil y rápida, aunque desafortunadamente para Borda, la respuesta es no. Veamos el siguiente ejemplo:

Votantes	Ranking
1	$x_1 > x_2 > x_3$
7	$x_1 > x_3 > x_2$
1	$x_3 > x_2 > x_1$
1	$x_2 > x_3 > x_1$
7	$x_2 > x_1 > x_3$



Si observamos el triángulo, podemos ver que x_2 es un ganador de Condorcet, pues vence a x_1 por 9 : 8 y a x_3 por 9 : 8. A su vez, x_3 es un perdedor de Condorcet. A pesar de esto, la Cuenta de Borda arroja los puntajes 23 : 18 : 10, con lo que x_1 , y no x_2 , es el ganador.

Este simple ejemplo es suficiente para determinar que la Cuenta de Borda no es un Método de Condorcet. Frente a este resultado negativo, podemos ponernos más laxos con la Cuenta de Borda y exigirle un poco menos. Por ejemplo, si el ganador de Condorcet puede no ser elegido por Borda como el ganador, entonces podemos exigirle que, por lo menos, no ocupe el último lugar. Esta propiedad y algunas más se encuentran detalladas en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.

- (a) *La Cuenta de Borda nunca posiciona a un ganador de Condorcet en el último lugar. De manera análoga, la Cuenta de Borda nunca posiciona a un perdedor de Condorcet en primer lugar.*
- (b) *La Cuenta de Borda siempre otorga a un ganador de Condorcet más de $\frac{1}{3}$ de los puntos, mientras que siempre otorga menos de $\frac{1}{3}$ al perdedor de Condorcet. De esta forma, La Cuenta de Borda siempre rankea al ganador de Condorcet por encima del perdedor de Condorcet.*
- (c) *Si todas las comparaciones de a pares terminan en empate, entonces la Cuenta de Borda devuelve el ranking I.*

Demostración. Para esta demostración, utilizaremos la fórmula de $W_{\frac{1}{3}}$ en función de los pares agregados

$$f(p, W_{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} \left(\sum_{j \neq 1} q_{1,j}, \sum_{j \neq 2} q_{2,j}, \sum_{j \neq 3} q_{3,j} \right)$$

Sea x_1 el ganador de Condorcet, entonces

$$\begin{aligned} q_{1,j} &= \frac{1}{2} + \epsilon_{1,j}, & q_{j,1} &= \frac{1}{2} - \epsilon_{1,j}, & j &= 2, 3 \\ q_{2,3} &= \frac{1}{2} + \alpha_{2,3}, & q_{3,2} &= \frac{1}{2} - \alpha_{2,3} \end{aligned}$$

donde $\epsilon_{1,j} > 0$ es la cantidad sobre $\frac{1}{2}$ por la cual x_1 vence a x_j . Por otro lado, el signo de $\alpha_{2,3}$ determina quien es el ganador de la contienda entre x_2 y x_3 .

Sustituyendo estos valores en la ecuación de $f(p, W_{\frac{1}{3}})$,

$$f(p, W_{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3} (1 + \epsilon_{1,2} + \epsilon_{1,3}, 1 - \epsilon_{1,2} + \alpha_{2,3}, 1 - \epsilon_{1,3} - \alpha_{2,3})$$

El primer componente de la Cuenta de Borda fuerza a x_1 , el ganador de Condorcet, a recibir más de $\frac{1}{3}$ de los votos. Supongamos ahora que x_2 , y no x_1 , ocupa el primer lugar. Entonces,

$$\alpha_{2,3} > 2\epsilon_{1,2} + \epsilon_{1,3} > 0$$

Esta desigualdad determina por cuánto x_2 debe vencer a x_3 para que la Cuenta de Borda lo posicione por encima del ganador de Condorcet. El valor de $\alpha_{2,3} > 0$ fuerza a x_3 a tener menos de $\frac{1}{3}$ de los votos y por lo tanto se encuentra rankeado por debajo del ganador de Condorcet x_1 . Por lo tanto, el ganador de Condorcet nunca puede ocupar el último lugar.

De forma totalmente análoga, podemos probar que el perdedor de Condorcet nunca puede ser rankeado primero por la Cuenta de Borda, y que siempre recibe menos de $\frac{1}{3}$ de los votos.

Dado que el ganador de Condorcet recibe siempre más de $\frac{1}{3}$ de los votos, y el perdedor de Condorcet recibe menos de $\frac{1}{3}$, la Cuenta de Borda rankea siempre primero por encima del segundo.

Por último, si todas las comparaciones de a pares terminan en empate, entonces $\forall j, i$ vale que $q_{i,j} = \frac{1}{2}$ y por ende $\sum_{j \neq i} q_{i,j} = 1$. Entonces $f(p, W_{\frac{1}{3}}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y el ranking es I . □

Este Teorema demuestra que si bien la Cuenta de Borda no es un método de Condorcet, pues existen casos donde ésta no rankea al ganador de Condorcet en primer lugar, sí logra evitar ciertas anomalías indeseables y contraintuitivas.

3.5. Las propiedades de Borda

Comenzamos este capítulo bajo la premisa de que la Cuenta de Borda era el método posicional que menos condiciones establecía a la hora de concordar con las preferencias de la mayoría. Frente a la pregunta de si existe un método que sea mejor que otros, esta cualidad nos presentaba al método establecido por Borda como un potencial ganador entre los métodos posicionales.

A lo largo de este capítulo, analizamos ciertas propiedades más que la Cuenta de Borda cumple y que sirven de sustento a la conclusión arribada anteriormente, con lo que podemos concluir:

- La Cuenta de Borda es el método posicional que menos condiciones impone a la hora de coincidir con el método de la mayoría.
- La Cuenta de Borda, así como los demás métodos posicionales, es neutra, con lo que cualquier permutación en los nombres de las alternativas se verá reflejada de igual manera en el resultado de la elección.
- La Cuenta de Borda es el único método posicional que, además de respetar la propiedad de neutralidad, respeta inversiones en las preferencias individuales.
- La Cuenta de Borda puede verse como la extensión natural a 3 alternativas del voto de la mayoría para 2 alternativas.
- La Cuenta de Borda no es un método de Condorcet. Sin embargo, garantiza que un ganador de Condorcet nunca ocupará el último lugar, ni un perdedor de Condorcet ocupará el primero. Más aún, el ganador de Condorcet siempre se encontrará rankeado por encima del perdedor de Condorcet.

Conclusión

Comenzamos nuestro estudio con una pregunta ¿qué método de elección representa fielmente las preferencias de un conjunto de individuos?.

Para responder dicha pregunta, iniciamos nuestro primer capítulo desarrollando los conceptos básicos de alternativas y preferencias. Luego introdujimos los métodos de elección, y vimos cómo algunos de ellos tomaban las preferencias individuales de los miembros de una sociedad para obtener un ranking social. También observamos cómo distintos métodos arrojaban distintos resultados bajo un mismo perfil, demostrando así que la pregunta planteada era verdaderamente relevante.

Luego, gracias a la ayuda de Kenneth J. Arrow, establecimos 5 condiciones que un método de elección debe cumplir para verdaderamente reflejar las preferencias de los individuos. Al enfrentar algunos de los métodos presentados con las condiciones de Arrow, observamos cómo uno por uno iban fallando en cumplir con todas ellas. Esta observación nos llevó a pensar que quizás la pregunta planteada inicialmente no era la correcta. En vez de preguntarnos qué método representa fielmente los intereses de una sociedad, debíamos preguntar si existe acaso un método que lo haga, es decir, si existe un método que cumpla con las condiciones de Arrow. La respuesta a esta nueva interrogante fue revelada por la famosa Paradoja de Arrow. Si un método cumple con las condiciones de Transitividad y Conexión, Monotonía e Independencia de Alternativas Irrelevantes, entonces el método es impuesto o es dictatorial.

El resultado era verdaderamente sorprendente. Arrow establece 5 condiciones que podrían considerarse razonables y hasta evidentes, y sin embargo no existe ningún método que las satisfaga en su totalidad. Por lo tanto nuestro enfoque tuvo que cambiar una vez más. Ningún método es verdaderamente bueno, pero quizás podamos resaltar las ventajas de alguno sobre otros.

Con esta nueva idea en mente, comenzamos el segundo capítulo de nuestro estudio vi- rando hacia un conjunto muy particular de métodos de elección, los métodos posicionales. Gracias al enfoque geométrico desarrollado por Donald G. Saari, ubicamos a los perfiles en un simplex $S_i(6)$ de 5 dimensiones y a los posibles resultados de una elección en un simplex $S_i(3)$ de 2 dimensiones llamado triángulo de representación, siendo un método de elección una transformación lineal entre estos dos espacios.

Por un lado observamos como al dejar fijo el método, los distintos perfiles se ubicaban dentro de una envoltura determinada por las imágenes de los perfiles canónicos, aquellos que describen el voto unánime hacia cada tipo de ranking. Para todo método posicional, la envoltura se encontraba centrada en el punto $I = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, ocupando así una porción de cada región del triángulo de representación, lo que nos permite afirmar que todos los métodos posicionales admiten todos los posibles rankings sociales.

Por el otro lado, vimos que al dejar fijo el perfil, las imágenes se movían en un segmento, la recta de procedimientos, donde en un extremo se ubica la imagen del método de pluralidad, y en el otro la del método de antipluralidad. De esta forma, los métodos de elección se convertían en un promedio entre el desinterés total que muestra el método de pluralidad por la segunda elección de los individuos, y la sobreestimación de la segunda elección establecida por el método de antipluralidad. Bajo esta nueva mirada, la Cuenta de Borda demostró ser el método que asigna el peso justo a la segunda elección, pues mantiene una diferencia constante entre los pesos asignados a cada posición.

Nuestro siguiente paso fue comparar a los métodos posicionales con el voto de la mayoría. La inserción de un nuevo método agregó una nueva dimensión a nuestro estudio, pasando así del triángulo de representación a un prisma. Desafortunadamente, las figuras en 3 dimensiones sobre una hoja de 2 dimensiones no son visualmente efectivas, por lo tanto nos vimos forzados a volver al triángulo de representación. Para ello, introdujimos una nueva representación de un punto sobre el triángulo. Un punto q era definido como un punto sobre un segmento, cuyo primer extremo era el resultado de la elección si sólo los votantes que prefieren x_1 sobre x_2 participaban, y el segundo extremo venía dado por el resultado en caso de solo votar aquellos que preferían x_2 sobre x_1 . La ubicación de q sobre el segmento determinaba que proporción de los votantes prefieren x_1 sobre x_2 .

Esta nueva representación resultó ser verdaderamente conveniente para cumplir nuestro objetivo. Mientras que la ubicación de q en el triángulo de representación nos comunicaba qué ranking del par x_1, x_2 era obtenido por el método posicional, la posición de q sobre el nuevo segmento definido nos diría qué resultado se obtenía mediante el Método de la mayoría por pares.

Mediante un simple contraejemplo, vimos que estos dos métodos no siempre coinciden. No sólo eso, sino que demostramos que para los métodos de pluralidad y antipluralidad, la población puede preferir una alternativa sobre otra por tan cerca a la unanimidad como se desee y sin embargo estos métodos pueden devolver el resultado opuesto. A medida que nos alejamos de estos métodos, las probabilidades de que esto suceda van disminuyendo, y alcanzan su mínimo en la Cuenta de Borda.

Por lo tanto la Cuenta de Borda no sólo asigna el peso adecuado a la segunda elección de los individuos, sino que es el método posicional que menos inconvenientes presenta a la hora de coincidir con las preferencias de la mayoría. Estas dos conclusiones ubicaron a la Cuenta de Borda por encima del resto de los métodos posicionales.

En nuestro tercer y último capítulo ahondamos aún más en dicho método. Vimos cómo el método de Borda no sólo respeta permutaciones en los nombres de las alternativas como el resto de los métodos posicionales, sino que también, a diferencia del resto, respeta inversiones en las preferencias individuales. Dichas propiedades se reflejaban en el triángulo de representación como reflexiones, rotaciones e inversiones, con lo que nuestra ya establecida herramienta geométrica demostró ser una vez más una gran aliada.

También establecimos la equivalencia entre el Método de Pares Agregados y la Cuenta de Borda, determinando así que esta última es la extensión natural a 3 alternativas de la elección entre 2 alternativas.

Finalmente, analizamos el comportamiento de la Cuenta de Borda frente a los Ganadores y Perdedores de Condorcet. Si bien la Cuenta de Borda demostró no ser un Método de Condorcet, vimos que por lo menos no rankea al ganador de Condorcet en último lugar ni al perdedor de Condorcet en primero.

Es importante destacar el trabajo realizado por Saari. Ciertamente resulta contraintuitivo analizar una temática social como la Teoría de la Elección desde el punto de vista de la geometría, sin embargo ésta resulta ser sorpresivamente efectiva a la hora de desarrollar resultados y demostrarlos, así como también didáctica gracias a su fácil visualización.

Limitándonos a los métodos de elección posicionales, fuimos capaces de encontrar un método que posee muchas cualidades positivas que lo diferencian del resto. La Cuenta de Borda podrá no cumplir con la condición de Independencia de Alternativas Irrelevantes, pero comparado con otros métodos posicionales, podemos decir que tiene méritos suficientes para denominarlo el mejor entre los métodos posicionales.

Bibliografía

- [1] Kenneth J. Arrow, *Social Choice and Individual Values. Third Edition*. Yale University Press, New Haven and London, 2012.
- [2] Donald G. Saari, *Geometry of Voting*. Springer-Verlag, 1994.